KANSREKENING

Module voor Wiskunde D vwo – voorlopige versie, juni 2008

Alex van den Brandhof

Voorwoord

Kansrekening is een verplicht onderdeel binnen het vak Wiskunde D. Deze module bevat een uitbreiding op de hoofdstukken kansrekening die de wiskunde-d-boeken van de bekende wiskundemethoden bevatten. Kansrekening is een serieuze tak van de wiskunde, die tal van raakvlakken heeft met andere onderwerpen uit de wiskunde, zoals analyse en meetkunde. Deze module is dan ook speciaal geschreven voor leerlingen met Wiskunde B: er is kennis van de differentiaal- en integraalrekening nodig. In de appendices worden de belangrijkste zaken uit de combinatoriek, analyse, verzamelingenleer en meetkunde, die nodig zijn voor deze module, kort besproken.

Het is de bedoeling dat deze module kansrekening in 2009 wordt uitgegeven door Epsilon Uitgaven. Tot die tijd zal er nog veel gesleuteld worden aan deze module. De discrete kansrekening zal worden uitgebreid. Ook een uitgebreide literatuurlijst wordt in een latere versie opgenomen. Op deze plaats wil ik *Understanding Probabililty* (2nd edition, Cambridge University Press, 2007) van H.C. Tijms niet onvermeld laten. Dit boek is voor mij een rijke bron van inspiratie geweest en ik ben de auteur dankbaar voor het feit dat ik diverse opgaven heb mogen overnemen in deze module. Verder verwijs ik hier naar het gratis te downloaden softwarepakket ORSTAT-2000 met vele modules over kansrekening; een gepolijste Engelstalige versie is gratis te downloaden van http://staff.feweb.vu.nl/tijms.

Suggesties en op- en aanmerkingen op deze voorlopige versie stel zeer op prijs.

Amsterdam, juni 2008
Alex van den Brandhof

Alex van den Brandhof is docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam. Verder is hij eindredacteur van *Pythagoras* en vakredacteur wiskunde van *Kennislink*.

Inhoudsopgave

1 Voorkennis

Dit hoofdstuk bevat opgaven uit de kansrekening waarvan de theorie bekend wordt verondersteld. Deze theorie omvat het vaasmodel, waarbij zowel trekken zónder teruglegging als trekken mét teruglegging aan de orde komen, en enkele regels uit de kansrekening. Zonder verdere toelichting geven we hieronder de kansdefinitie van Laplace, de (uitgebreide) somregel, de productregel, de complementregel en het uitsplitsingsprincipe; ze worden in de schoolboeken behandeld. In appendix A worden in kort bestek de belangrijkste formules uit de combinatoriek beschreven.

Kansdefinitie van Laplace
Bij een kansexperiment met een eindig aantal uitkomsten die alle even waarschijnlijk zijn, is de kans op een gebeurtenis A gelijk aan

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}.$$

Somregel
Voor *elkaar uitsluitende* gebeurtenissen A en B geldt: $\mathbf{P}(A \text{ of } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

Uitgebreide somregel
Voor gebeurtenissen A en B geldt: $\mathbf{P}(A \text{ of } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \text{ en } B)$.

Productregel
Voor *onafhankelijke* gebeurtenissen A en B geldt: $\mathbf{P}(A \text{ en } B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$.

Complementregel
Het complement van een gebeurtenis A bestaat uit alle uitkomsten die *niet* tot A behoren; er geldt: $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\text{niet-}A)$.

Uitsplitsingsprincipe
Voor gebeurtenissen A en B geldt: $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \text{ en } B) + \mathbf{P}(A \text{ en niet-}B)$.

---

1 Je werpt met twee dobbelstenen en let daarbij op het totale aantal ogen.

a. Noteer de uitkomsten in een rooster.

b. Bereken de kans dat het totale aantal ogen tien is.

c. Bereken de kans dat het totale aantal ogen ten hoogste tien is.

2 Aad en Bram werpen elk met een dobbelsteen. Aad wint als de som van de ogentallen even is, anders wint Bram. Bereken voor zowel Aad als Bram de winkans.

3 In een doos zitten twintig ballen, genummerd van 1 tot en met 20.

a. Je trekt één bal uit de doos. Bereken de kans dat het nummer een priemgetal is.

b. Je trekt twee ballen uit de doos, zonder teruglegging. Bereken de kans dat beide getallen priemgetallen zijn.

c. Je trekt twee ballen uit de doos, met teruglegging. Bereken de kans dat beide getallen priemgetallen zijn.

4 Uit een volledig spel kaarten (2, 3, . . . , 10, boer, vrouw, heer, aas; elk in de kleuren harten, ruiten, klaveren, schoppen) worden willekeurig vijf kaarten getrokken. Bereken de kans dat hier ten minste één aas bij zit.

5 Uit een volledig spel kaarten wordt willekeurig één kaart getrokken. Bereken de kans dat dit een harten kaart of een aas is.

6 In een bak zitten vier rode, vijf witte en zes blauwe knikkers. Je pakt vijf knikkers uit die bak, zonder teruglegging. Bereken de kans dat je ten minste drie rode knikkers trekt.

7 Je werpt met twee munten.

a. Bereken de kans dat er twee keer 'kop' wordt gegooid.

b. Bereken de kans dat er één keer 'kop' en één keer 'munt' wordt gooid.

8 In een bak zitten negentien enveloppen. In vier enveloppen zit een waardecheque van € 10,- en in één enveloppe zit een waardecheque van € 20,-. In de overige veertien enveloppen zit niets. Als je blindelings vier enveloppen uit de bak trekt, bereken dan de kans dat

a. je geen enkele lege enveloppe trekt;

b. je vier enveloppen met gelijke inhoud trekt;

c. de getrokken enveloppen in totaal € 30,- aan waardecheques bevatten.

9 In een bak zitten tien gekleurde ballen: twee rode, drie gele en vijf blauwe.

Je pakt blindelings in één greep drie ballen uit de bak.

a. Bereken de kans dat je drie verschillend gekleurde ballen pakt.

b. Bereken de kans dat je drie ballen van dezelfde kleur pakt.

Bram gaat met deze ballenbak op de kermis staan. De bezoekers van de kermis mogen voor € 2,- hun geluk beproeven. Bram geeft € 10,- aan iedereen die in één greep drie ballen van dezelfde kleur pakt. Wie drie verschillend gekleurde ballen pakt, krijgt zijn € 2,- terug. Wie twee verschillende kleuren onder de drie gepakte ballen aantreft, wint niets.

c. Bereken in vier decimalen de kans dat Bram na zijn eerste vijf klanten precies € 10,- winst heeft gemaakt.

d. Bereken in vier decimalen de kans dat Bram na zijn eerste vijf klanten precies quitte heeft gespeeld, dat wil zeggen: geen winst en geen verlies heeft gemaakt.

10 Vier jongens en drie meisjes gaan naar de bioscoop. Ze komen op een rij van zeven stoelen te zitten. Iedereen neemt willekeurig op een stoel plaats.

a. Bereken de kans dat de meisjes allemaal naast elkaar komen te zitten.

Na het bioscoopbezoek bezoeken de zeven personen een café. Zij nemen daar, wederom op willekeurige wijze, plaats aan een ronde tafel.

b. Bereken de kans dat Carl (één van de vier jongens) naast Eva (één van de drie meisjes) komt te zitten.

11 Aad, Bram en Carl spelen een tennistoernooi, bestaande uit zes wedstrijden: elke speler speelt één keer tegen elke andere speler.

Gegeven is $\mathbf{P}(\text{Aad wint van Bram}) = 0{,}5$; $\mathbf{P}(\text{Aad wint van Carl}) = 0{,}7$; $\mathbf{P}(\text{Bram wint van Carl}) = 0{,}4$.

Bereken de kans dat Aad ten minste even veel wedstrijden wint als elk van de overige spelers.

12 Wat is waarschijnlijker:

I. ten minste eenmaal 'zes' in 4 worpen met een dobbelsteen;

II. ten minste eenmaal 'dubbel-zes' in $6 \cdot 4 = 24$ worpen met twee dobbelstenen?

Dit probleem staat bekend als 'de paradox van De Meré'. De edelman Antoine Gombauld, Chevalier de Meré (zeventiende eeuw), was verzot op kansspelen. Hij redeneerde als volgt: de verhouding $4:6$ *(4 worpen, 6 mogelijke uitkomsten) is gelijk aan de verhouding* $24:36$ *(24 worpen, 36 mogelijke uitkomsten), dus beide situaties zijn even waarschijnlijk. Na vele spelletjes merkte hij echter dat deze theorie niet strookte met de ervaring.*

13 Je gooit met drie dobbelstenen. Bereken de kans dat de som van de ogentallen ten minste 17 is.

14 Je gooit met vier dobbelstenen. Bereken de kans dat *alleen* de ogentallen van de tweede en de derde dobbelsteen hetzelfde zijn.

15 Drie personen gooien elk met een dobbelsteen; wie het hoogste aantal ogen gooit, wint. Als meerdere personen het hoogste aantal ogen gooien, beginnen ze opnieuw. Wat is de kans dat de beslissing meteen valt?

16 Uit een volledig spel kaarten worden na elkaar twee kaarten getrokken. Bereken de kans dat de tweede kaart hoger is dan de eerste kaart. Hanteer, ongeacht de kleur van de kaarten, de volgende ordening: $2 < 3 < \cdots < 10 < \text{boer} < \text{vrouw} < \text{heer} < \text{aas}$.

Aanwijzing: gebruik het feit dat $\mathbf{P}(2^{\text{de}} \text{ kaart is hoger}) + \mathbf{P}(2^{\text{de}} \text{ is lager}) + \mathbf{P}(2^{\text{de}} \text{ is gelijk}) = 1$, *en maak gebruik van de symmetrie-eigenschap* $\mathbf{P}(2^{\text{de}} \text{ is hoger}) = \mathbf{P}(2^{\text{de}} \text{ is lager})$.

17 Een volledig spel kaarten wordt goed geschud; vervolgens worden de kaarten in de dan ontstane volgorde één voor één omgekeerd.

a. Bereken de kans dat de veertiende kaart die wordt omgekeerd, een aas is.

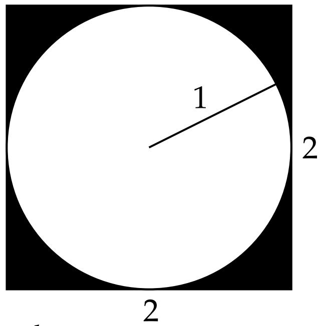
b. Bereken de kans dat de eerste aas die wordt omgekeerd, de veertiende kaart is.

2 Kans en oppervlakte

Bij veel opgaven in hoofdstuk 1 heb je gebruik gemaakt van de *kansdefinitie van Laplace*:

> Bij een kansexperiment met een eindig aantal uitkomsten die alle even waarschijnlijk zijn, is de kans op een gebeurtenis A gelijk aan
>
> $$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}.$$

Stel je een vierkant dartbord voor met zijde 2, met daarin een cirkel met straal 1. Een dart wordt lukraak naar het bord gegooid. De dart kan overal terechtkomen, binnen of buiten de cirkel, maar wel met zekerheid ín het vierkant. Om de kans te bepalen dat de dart in de cirkel terechtkomt, is de kansdefinitie van Laplace niet toepasbaar, het vierkant bevat immers oneindig veel punten waar de dart terecht kan komen. Met de kansdefinitie van Laplace zou de kans op het treffen van de cirkel neerkomen op de ongedefinieerde uitdrukking $\frac{\infty}{\infty}$.



Er bestaat een voor de hand liggend *continu analogon* van de kansdefinitie van Laplace:

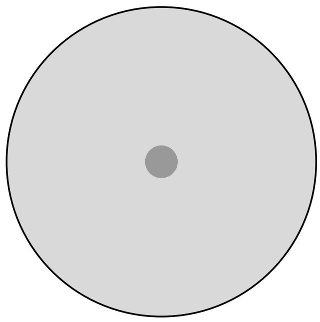
> Bij een kansexperiment waarin een punt blindelings wordt gekozen in een begrensd gebied V in het vlak, wordt de kans dat het punt zal vallen in een deelgebied A van het gehele gebied V gegeven door
>
> $$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{oppervlakte van } A}{\text{oppervlakte van } V}.$$

Deze kansdefinitie zegt dat de kans dat een punt in een zeker deelgebied van V valt, *evenredig* is met de oppervlakte van dat deelgebied. In de context van het vierkante dartbord, kan met deze definitie de kans dat de dart binnen de cirkel terecht komt, worden berekend:

$$\mathbf{P}(\text{dart komt terecht in cirkel}) = \frac{\text{oppervlakte cirkel}}{\text{oppervlakte vierkant}} = \frac{\pi}{4}.$$

De kans dat de dart een specifiek *punt* treft, is gelijk aan nul. Het heeft alleen zin om te spreken van de kans dat de dart een *gebied van positieve oppervlakte* treft. Dit is een fundamenteel verschil met de kansmodellen van hoofdstuk 1.

Voorbeeld 1 Een dartspeler werpt een dart naar een cirkelvormig dartbord met straal 1, waarvan de roos een cirkelschijfje is met straal $\frac{1}{10}$.
Hij doet dit blindelings, maar treft wel met zekerheid het bord.



a. Bereken de kans dat de speler de roos treft.

b. Bereken de kans dat de dart minder dan $\frac{1}{10}$ van de rand terecht komt.

Oplossing

a. $\mathbf{P}(\text{dartspeler treft roos}) = \dfrac{\text{oppervlakte roos}}{\text{oppervlakte dartbord}} = \dfrac{\frac{1}{100}\pi}{\pi} = \dfrac{1}{100}.$

b. $\mathbf{P}(\text{dart komt minder dan } \frac{1}{10} \text{ van de rand terecht}) =$
$$\frac{\text{oppervlakte dartbord} - \text{oppervlakte cirkel met straal } \frac{9}{10}}{\text{oppervlakte dartbord}} = \frac{\pi - \frac{81}{100}\pi}{\pi} = \frac{9}{100}.$$

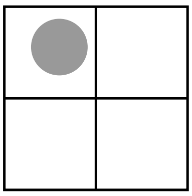
Bij dit voorbeeld veronderstelden we dat alle gebieden van gelijke grootte met dezelfde kans worden geraakt. Een gevorderde dartspeler die op de roos mikt, zal zó kunnen richten dat de kans dat hij de roos treft groter is dan $\frac{1}{100}$; voor een dergelijke speler zijn kansen en oppervlakken *niet evenredig* met elkaar, in welk geval we het kansmodel *niet-homogeen* noemen. De bovenstaande kansdefinitie kan dan niet worden gebruikt. In dat geval wordt gebruik gemaakt van *kansdichtheden*; dit komt in hoofdstuk 6 uitgebreid aan de orde.

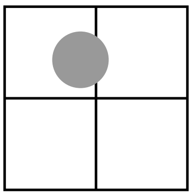
In de rest van dit hoofdstuk gaan we uit van een *homogeen* model: de kans dat een punt in een zeker deelgebied van een vastgesteld gebied valt, is evenredig met de oppervlakte van dat deelgebied. Overigens zij opgemerkt dat met 'gebied' ook een begrensd deel van een *lijn* of begrensd deel van de *ruimte* kan worden bedoeld. In plaats van *oppervlakte* moet in dat geval de *lengte* respectievelijk *inhoud* worden genomen.

---

1 Op een rechthoekig dartbord van 20 cm bij 50 cm wordt een dart gegooid. Bereken de kans dat de dart minder dan 5 cm van een hoekpunt van het dartbord terecht komt.

2 Euromunten van 10, 20 en 50 cent hebben een diameter van respectievelijk 19,75, 22,25 en 24,25 millimeter. Wanneer je een munt op een schaakbord met hokjes van 40 bij 40 millimeter laat vallen, is het mogelijk dat de munt helemaal binnen een hokje valt, zoals in het linker plaatje.





a. Bereken voor elk van de drie muntsoorten (10, 20 en 50 cent) de kans dat de munt helemaal binnen een hokje valt. *Aanwijzing: bezie de ligging van het middelpunt van de munt binnen een hokje.*

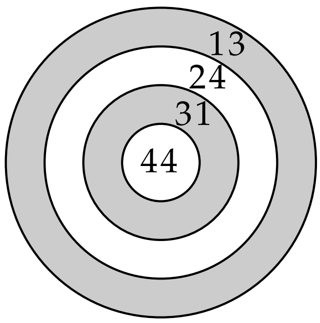
b. Bereken de diameter van een munt die met kans 0,5 binnen een hokje valt.

Ga nu uit van een schaakbordpatroon met vierkantjes met zijde a en een munt met diameter d.

c. Stel een formule op voor de kans dat de munt binnen een hokje valt.

3 Een dartbord bestaat uit vier concentrische cirkels, met stralen van 1, 2, 3 en 4. In de figuur zie je de punten die gescoord kunnen worden.

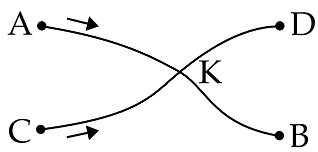
Aad werpt met drie darts, Bram met vier darts en Carl met vijf darts. Zij werpen blindelings, maar treffen wel steeds met zekerheid het bord. Bereken voor alledrie de kans op een totaalscore van 101 punten.



4 Je kiest een willekeurig reëel getal x tussen 0 en 1.
Bereken de kans dat $x^2 - x + \frac{2}{9} < 0$.

5 In een kubus met ribbe 2 past precies een bol met straal 1.
In de kubus wordt willekeurig een punt gekozen.
Bereken de kans dat dit punt buiten de bol valt.

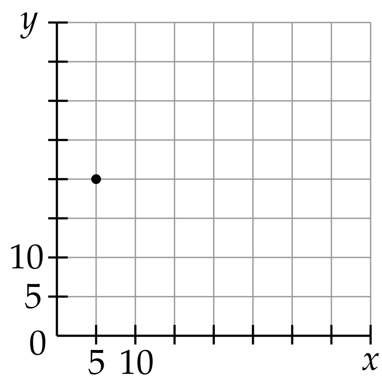
6 Een busmaatschappij heeft een buslijn van stad A naar stad B, en een andere lijn van stad C naar stad D. De routes van beide buslijnen kruisen elkaar bij kruispunt K, in *the middle of nowhere*.



Tussen 17.00 uur en 17.30 uur komt van beide lijnen een bus bij kruispunt K. Ze komen daar elk op een willekeurig moment ergens in dat halve uur, onafhankelijk van elkaar. Om passagiers de gelegenheid te geven om over te stappen, wachten de twee bussen daar op elkaar, maar nooit langer dan tien minuten. Dus als de andere bus er na tien minuten nog niet is, rijdt de wachtende bus weg.

We willen weten hoe groot de kans is dat de bussen elkaar treffen.

Stel dat de aankomsttijden van bus I en bus II respectievelijk x en y minuten na 17.00 uur zijn. Alle mogelijke tijden waarop de bussen bij K kunnen arriveren, kunnen we weergeven in een assenstelsel. Zo hoort het punt in nevenstaande figuur bij de tijdstippen 17.05 en 17.20 uur voor respectievelijk bus I en bus II.



a. Markeer in het assenstelsel de rand van het gebied van alle mogelijke tijden waarop de bussen bij K kunnen arriveren.

b. Teken de lijn van alle mogelijke tijden waarbij de beide bussen precies tegelijkertijd bij K arriveren.

c. Teken de lijn van alle mogelijke tijden waarbij bus II precies tien minuten later bij K arriveert dan bus I.

d. Teken de lijn aan van alle mogelijke tijden waarbij bus I precies tien minuten later bij K arriveert dan bus II.

e. Arceer het gebied van alle mogelijke tijden waarbij de bussen elkaar treffen.

f. Bereken nu de kans dat de bussen elkaar treffen.

7 Aad en Bram komen, onafhankelijk van elkaar, op een willekeurig tijdstip tussen 22.00 en 23.00 uur binnen in café Laplace. Aad blijft tien minuten in het café, Bram een kwartier. Bereken de kans dat Aad en Bram elkaar daar treffen.

8 Op een willekeurig tijdstip tussen 6.30 en 7.30 uur wordt bij de heer Haché de ochtendkrant bezorgd. De heer Haché vertrekt naar zijn werk op een willekeurig tijdstip tussen 7.00 en 8.00 uur. Bij vertrek kijkt hij of de krant is bezorgd. Bereken de kans dat hij de krant naar zijn werk kan meenemen.

9 Je kiest willekeurig twee reële getallen tussen 0 en 1. We willen weten hoe groot de kans is dat het product van deze twee getallen kleiner is dan $\frac{1}{2}$.

a. Noem de twee getallen x en y. Geef in een assenstelsel het gebied van alle mogelijke punten (x, y) aan.

b. Teken in het assenstelsel de verzameling punten (x, y) waarvoor geldt dat $x \cdot y = \frac{1}{2}$.

c. Arceer het gebied van alle punten (x, y) waarvoor geldt dat $x \cdot y < \frac{1}{2}$.

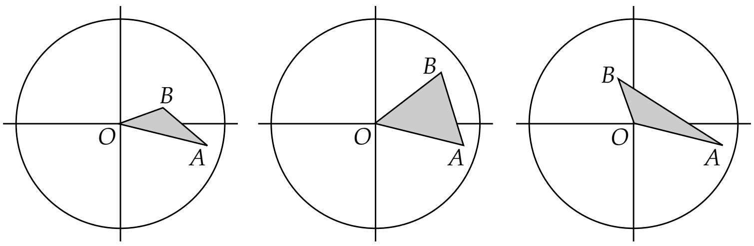
d. Bereken nu de kans dat het product van de twee gekozen getallen kleiner is dan $\frac{1}{2}$.

10 Een dunne rechte stok wordt op twee willekeurige plaatsen gebroken, zodat drie delen ontstaan. Bereken de kans dat met deze drie delen een driehoek kan worden gelegd. *Aanwijzing: Beschouw de stok als het eenheidsinterval en noem de twee breekpunten x en y. Druk de lengte van de drie stokdelen uit in x en y en gebruik de de driehoeksongelijkheid.*

11 Een dunne rechte stok van 2 meter wordt op twee plaatsen gebroken: het ene breekpunt zit links van het midden en het andere breekpunt zit rechts van het midden. Bereken de kans dat met deze drie delen een driehoek kan worden gelegd. *Aanwijzing: Beschouw de stok als het interval* $[0, 2]$*, noem het breekpunt dat zich in* $\langle 0, 1\rangle$ *bevindt x, en noem het breekpunt dat zich in* $\langle 1, 2\rangle$ *bevindt y.*

12 In een gelijkzijdige driehoek ABC wordt willekeurig een punt D gekozen. Bereken de kans dat $\triangle ABD$ stomphoekig is.

13 Binnen de eenheidscirkel worden willekeurig twee punten A en B gekozen. Bereken de kans dat $\triangle OAB$ stomphoekig is. *Aanwijzing: Veronderstel dat $|OA| > |OB|$. Punt B ligt dan binnen de cirkel met middelpunt O en straal $|OA|$. Wat is het gebied waarin B kan liggen opdat $\angle OBA$ stomp is? Wat is het gebied waarin B kan liggen opdat $\angle AOB$ stomp is?*



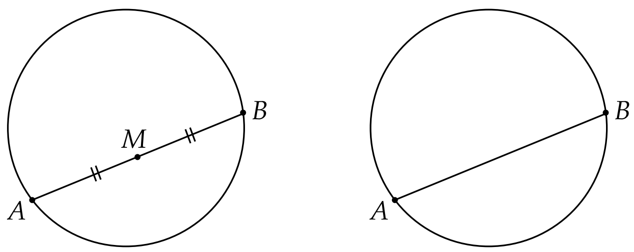
Drie situaties: in het eerste en derde geval is $\triangle OAB$ stomphoekig, in het tweede geval is $\triangle OAB$ scherphoekig.

14 Gegeven is een cirkel met straal 1 (dit is de *omgeschreven cirkel* van een gelijkzijdige driehoek met zijde $\sqrt{3}$).

a. *Binnen* de cirkel wordt willekeurig een punt M gekozen. Vervolgens wordt de koorde AB getekend zó, dat M het midden is van deze koorde. Zie het linker plaatje hieronder. Bereken de kans dat de lengte van koorde AB kleiner is dan $\sqrt{3}$.

b. *Op* de cirkel (dat wil zeggen: op de rand van de cirkel) worden willekeurig twee punten A en B gekozen. Zie het rechter plaatje hieronder. Bereken de kans dat de lengte van koorde AB kleiner is dan $\sqrt{3}$.

De vragen a en b leveren verschillende antwoorden. Dit probleem staat bekend als 'de paradox van Bertrand'.



In de linker situatie worden A en B bepaald door een willekeurig gekozen punt M binnen de cirkel. In de rechter situatie worden A en B willekeurig op de cirkel gekozen.

3 Voorwaardelijke kansen en onafhankelijkheid

Kansen veranderen wanneer de beschikbare informatie verandert. We spreken van een *voorwaardelijke kans* indien de kans betrekking heeft op een situatie waarin gedeeltelijke informatie over de uitkomst van het kansexperiment beschikbaar is. Iemand die met twee dobbelstenen gooit, heeft kans $\frac{1}{36}$ op ‘dubbel-zes’. Als hij jou gedeeltelijke informatie van de uitkomst verschaft, bijvoorbeeld ‘ten minste één van de ogentallen is zes’, verandert de kans op ‘dubbel-zes’. Deze kans is niet $\frac{1}{6}$, zoals je wellicht zou denken, maar $\frac{1}{11}$, zoals je straks in voorbeeld 1 zult zien.

3.1 Voorwaardelijke kans

Als A en B twee gebeurtenissen zijn, met $\mathbf{P}(B) \neq 0$, dan definiëren we de *voorwaardelijke kans van A gegeven B*, of de *kans van A onder de voorwaarde B*, notatie $\mathbf{P}(A|B)$, als volgt:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \text{ en } B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Deze definitie komt niet uit de lucht vallen. Het *frequentiequotiënt* van een gebeurtenis A is gedefinieerd als $\text{fq}(A) = \frac{n(A)}{n}$, waarbij $n(A)$ het aantal keren is dat de gebeurtenis A optreedt in n uitvoeringen van het kansexperiment. Stel nu dat in die n uitvoeringen van het kansexperiment de gebeurtenis B r keer gelijktijdig met de gebeurtenis A optreedt en s keer zónder de gebeurtenis A, dan is $\text{fq}(A \text{ en } B) = \frac{r}{n}$ en $\text{fq}(B) = \frac{r+s}{n}$. Delen we $\text{fq}(A \text{ en } B)$ door $\text{fq}(B)$, dan vinden we

$$\frac{\text{fq}(A \text{ en } B)}{\text{fq}(B)} = \frac{r}{r+s}.$$

Definieer nu $\text{fq}(A|B)$ als het frequentiequotiënt van gebeurtenis A in die uitvoeringen van het kansexperiment waarin gebeurtenis B is opgetreden. Uit $\text{fq}(A|B) = \frac{r}{r+s}$ volgt nu de relatie

$$\text{fq}(A|B) = \frac{\text{fq}(A \text{ en } B)}{\text{fq}(B)},$$

hetgeen de definitie van $\mathbf{P}(A|B)$ motiveert.

De definitie $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \text{ en } B)}{\mathbf{P}(B)}$ laat zich herschrijven als

$$\mathbf{P}(A \text{ en } B) = \mathbf{P}(A|B) \cdot \mathbf{P}(B). \tag{3.1}$$

Natuurlijk geldt ook:

$$\mathbf{P}(A \text{ en } B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B|A).$$

Deze laatste twee formuleringen sluiten meer aan bij de intuïtieve gedachte over kansen.

Meer algemeen geldt:

$$\mathbf{P}(A_1 \text{ en } A_2 \text{ en } \cdots \text{ en } A_n) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbf{P}(A_3|A_1 \text{ en } A_2) \cdots \mathbf{P}(A_n|A_1 \text{ en } \cdots \text{ en } A_{n-1}).$$

Voorbeeld 1

a. Aad gooit met twee dobbelstenen, en deelt mee dat ten minste één van de ogentallen 'zes' is. Wat is de kans dat het andere ogental ook 'zes' is?

b. Bram gooit met twee dobbelstenen. Een van de dobbelstenen valt daarbij op de grond; Bram ziet dat het ogental van die dobbelsteen 'zes' is. Wat is de kans dat het andere ogental ook 'zes' is?

Oplossing

a. Noteer met A de gebeurtenis dat met beide dobbelstenen 'zes' wordt gegooid, en met B de gebeurtenis dat met ten minste één van de dobbelstenen 'zes' wordt gegooid. Merk op dat de gebeurtenis 'A en B' in dit geval hetzelfde is als de gebeurtenis A. De gevraagde kans is nu eenvoudig te bepalen met de definitie van voorwaardelijke kans:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \text{ en } B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{1}{11}.$$

b. Noteer met A de gebeurtenis dat met beide dobbelstenen 'zes' wordt gegooid, en met B de gebeurtenis dat met de op de grond gevallen dobbelsteen 'zes' wordt gegooid. Wederom is de gebeurtenis 'A en B' hetzelfde als de gebeurtenis A. De gevraagde kans is:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \text{ en } B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}.$$

Veel mensen denken (ten onrechte) dat de kansen van a en b hetzelfde zijn.

---

1 Een munt wordt drie keer geworpen. Bereken de kans op precies twee keer 'kop', gegeven dat

a. de eerste uitkomst 'kop' was;

b. de eerste uitkomst 'munt' was;

c. de eerste twee uitkomsten 'kop' waren;

d. de eerste twee uitkomsten 'munt' waren;

e. de eerste uitkomst 'kop' en de derde uitkomst 'munt' was.

2 Je werpt met een rode en met een blauwe dobbelsteen. Bereken de kans dat het totale aantal ogen zes is, gegeven dat

a. het ogental van de blauwe dobbelsteen ten minste 'vier' is;

b. het ogental van precies één van de dobbelstenen ten minste 'vier' is.

3 Uit een volledig spel kaarten wordt willekeurig één kaart getrokken.

a. Bereken de kans op een harten kaart, gegeven dat het een rode kaart is.

b. Bereken de kans op een aas, gegeven dat het een rode kaart is.

4 Je belt aan bij een huis waarvan je weet dat er een gezin met twee kinderen woont.

a. Een dochter opent de deur; bereken de kans dat de twee kinderen van het gezin meisjes zijn.

b. De moeder opent de deur en zegt dat ze in elk geval één dochter heeft; bereken de kans dat de twee kinderen van het gezin meisjes zijn.

5 Een dartspeler werpt een dart naar een cirkelvormig dartbord met straal 10. Hij doet dit blindelings, maar treft wel met zekerheid het bord. Gegeven is dat de dart in de bovenste helft van het dartbord terechtkomt. Bereken de kans dat

a. de dart in de rechter helft van het dartbord terechtkomt;

b. de afstand van de dart tot het middelpunt van het dartbord minder dan 5 is;

c. de afstand van de dart tot het middelpunt van het dartbord meer dan 5 is.

6 Je kiest willekeurig een reëel getal x tussen 0 en 1. Bereken de kans dat dit getal groter dan $\frac{1}{2}$ is, gegeven dat

a. $x > \frac{1}{4}$;

b. $x < \frac{3}{4}$;

c. $|x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{4}$;

d. $x^2 - x + \frac{2}{9} > 0$.

7 Je kiest willekeurig twee reële getallen x en y tussen 0 en 1. Gegeven is dat $x + y < 1$. Bereken de kans dat

a. $|x - y| < 1$;

b. $x > \frac{1}{4}$;

c. $x^2 + y^2 < \frac{1}{4}$;

d. $x > y$.

8 Uit een volledig spel kaarten worden dertien kaarten getrokken. Bereken de kans op ten minste twee azen, gegeven dat

a. ten minste één van de kaarten een aas is;

b. één van de kaarten de harten aas is.

9 Ga bij de volgende vragen uit van jaren van 365 dagen.

a. Bereken de kans dat twee willekeurige personen op verschillende dagen jarig zijn.

b. Bereken de kans dat vijf willekeurige personen op verschillende dagen jarig zijn.

c. Bereken de kans dat in een groep van twintig personen er ten minste twee op dezelfde dag jarig zijn.

d. Uit hoeveel personen moet een groep minimaal bestaan, opdat de kans dat er ten minste twee op dezelfde dag jarig zijn, groter dan 50% is?

10 Ga bij de volgende vragen uit van jaren van 365 dagen.
Bij de kassa van een theater staat een rij personen. De eerste persoon in de rij die tegelijk jarig is met één van de personen vóór hem of haar in de rij, krijgt een gratis kaartje.

a. Carl staat als vijfde in de rij. Bereken de kans dat hij het gratis kaartje bemachtigt.

Noteer met p_n de kans dat je het gratis kaartje bemachtigt indien je de n-de persoon in de rij bent.

b. Geef een uitdrukking voor p_n.

c. Bepaal met de grafische rekenmachine voor welke n de waarde van p_n maximaal is. Hoe groot is die optimale kans op het bemachtigen van het gratis kaartje?

d. Bereken op algebraïsche wijze voor welke n de waarde van p_n maximaal is. Doe dit door te bedenken dat p_n maximaal voor de kleinste gehele waarde van n waarvoor $p_n/p_{n+1} > 1$.

3.2 Conditionering

In sommige situaties is het handig om voorwaardelijke kansen als uitgangspunt te kiezen bij de bepaling van de kans op een zekere gebeurtenis. Bekijk hiertoe het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 2 Je werpt met een munt; als 'kop' valt, trek je blindelings een bal uit een doos met één witte bal en twee zwarte ballen, bij 'munt' uit een doos met drie witte en twee zwarte ballen. Bereken de kans op een witte bal.

Oplossing Het experiment is samengesteld uit twee afhankelijke deelexperimenten. Noteer met A de gebeurtenis dat een witte bal wordt getrokken en met B de gebeurtenis dat er 'kop' wordt gegooid. Op grond van de gegevens kunnen we de volgende kansen vaststellen:

$$\mathbf{P}(B) = \tfrac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(A|B) = \tfrac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(A|\text{niet-}B) = \tfrac{3}{5}.$$

We zijn geïnteresseerd in $\mathbf{P}(A)$. Omdat gebeurtenis A optreedt met óf gebeurtenis B óf gebeurtenis niet-B, geldt:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B)\cdot\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A|\text{niet-}B)\cdot\mathbf{P}(\text{niet-}B) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{7}{15}.$$

In dit voorbeeld hebben we gebruik gemaakt van een speciaal geval van het *conditioneringsprincipe*. Dit principe volgt met behulp van (3.1) uit het *uitsplitsingsprincipe*, dat in hoofdstuk 1 al ter sprake kwam. Meer algemeen luidt dit principe als volgt:

Uitsplitsingsprincipe
Stel A is een gebeurtenis die alleen kan optreden indien een van de elkaar uitsluitende gebeurtenissen $B_1, \ldots, B_n$ optreedt. Dan geldt:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \text{ en } B_1) + \cdots + \mathbf{P}(A \text{ en } B_n).$$

Passen we op elke term van het rechterlid (3.1) toe, dan vinde we:

Conditioneringsprincipe
Stel A is een gebeurtenis die alleen kan optreden indien een van de elkaar uitsluitende gebeurtenissen $B_1, \ldots, B_n$ optreedt. Dan geldt:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B_1) \cdot \mathbf{P}(B_1) + \cdots + \mathbf{P}(A|B_n) \cdot \mathbf{P}(B_n).$$

---

11 Uit een volledig spel kaarten worden achtereenvolgens twee kaarten getrokken. Bereken de kans dat de tweede kaart rood is.

12 Bij een televisieshow wordt de finalist voor drie kluizen geplaatst. In één kluis zit een enveloppe met € 10.000, in één kluis zit een enveloppe met € 1000 en één kluis is leeg.

Er is een bak met vijf sleutels: één opent de kluis met de enveloppe van € 10.000, één opent de kluis met de enveloppe van € 1000, één opent de lege kluis, één opent geen enkele kluis en één opent álle kluizen.

De finalist mag twee keer met een munt gooien. Voor elke keer dat 'kop' verschijnt, mag hij één sleutel uit de bak pakken. Elke verkregen sleutel mag de finalist op alle drie de kluizen passen. Hij wint de inhoud van de enveloppe(n) in de geopende klui(s)(zen).

We zijn geïnteresseerd in de kans dat de finalist ten minste € 10.000 wint.

a. Noteer met A de gebeurtenis dat de finalist de kluis met de enveloppe van € 10.000 opent, en met B_k de gebeurtenis dat de finalist k keer 'kop' gooit. Bepaal $\mathbf{P}(A|B_k)$ voor $k = 0, 1, 2$.

b. Bereken $\mathbf{P}(A)$.

3.3 Onafhankelijke gebeurtenissen

Als de informatie dat een gebeurtenis B is opgetreden, de kans van A níét beïnvloed, dus als $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$, dan heten A en B *onafhankelijk*. In dat geval wordt ook de kans van B niet beïnvloed door het optreden van A, dus $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$. We komen hiermee tot de uit hoofdstuk 1 bekende stelling voor onafhankelijke gebeurtenissen A en B:

De gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk $\Leftrightarrow$ $\mathbf{P}(A \text{ en } B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$.

---

13 Bewijs bovenstaande equivalentie.

14 Bewijs: als A en B onafhankelijke gebeurtenissen zijn, zijn ook A en niet-B onafhankelijk (en dan ook niet-A en niet-B). *Aanwijzing: pas het conditioneringsprincipe toe op* $\mathbf{P}(A)$.

15 Voor onafhankelijkheid van *drie* gebeurtenissen A, B en C is het in het algemeen niet voldoende dat $\mathbf{P}(A \text{ en } B \text{ en } C) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C)$. Laat dit zien aan de hand van drie muntworpen, met de volgende gebeurtenissen:
A: eerste worp geeft 'kop';
B: meer keren 'kop' dan 'munt';
C: de laatste twee worpen geven dezelfde uitkomst.

Drie gebeurtenissen A, B en C heten *onafhankelijk* indien

$$\mathbf{P}(A\,\text{en}\,B) = \mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B), \quad \mathbf{P}(A\,\text{en}\,C) = \mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(C), \quad \mathbf{P}(B\,\text{en}\,C) = \mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(C),$$

en bovendien

$$\mathbf{P}(A\,\text{en}\,B\,\text{en}\,C) = \mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(C).$$

Indien alleen aan de eerste drie van deze vier eigenschappen wordt voldaan (en niet aan de laatste), heten de gebeurtenissen A, B en C *paarsgewijs onafhankelijk*.

---

16 Je werpt met een regelmatig viervlak waarvan één zijde rood is, één zijde wit, één zijde blauw en één zijde rood, wit én blauw. Met R, W en B noteren we de gebeurtenis waarbij een zijde met de kleur rood, wit, respectievelijk blauw boven komt.

Toon aan dat deze gebeurtenissen niet onafhankelijk zijn, maar wel paarsgewijs onafhankelijk.

3.4 De regel van Bayes

Voorbeeld 3 In voorbeeld 2 hebben we met het conditioneringsprincipe de kans $\mathbf{P}(A)$ op het trekken van een witte bal berekend. Nu willen we, bij hetzelfde kansexperiment, de voorwaardelijke kans $\mathbf{P}(B|A)$ bepalen: de kans dat er 'kop' is gegooid, als er een witte bal getrokken blijkt te zijn.

Oplossing Met de definitie van voorwaardelijke kans herschrijven we $\mathbf{P}(B|A)$:

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(B\,\text{en}\,A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|B)\cdot\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

hiermee is $\mathbf{P}(B|A)$ uitgedrukt in $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$ en $\mathbf{P}(A|B)$; deze waarden waren reeds vastgesteld in voorbeeld 2:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{7}{12}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(A|B) = \frac{1}{3},$$

waarmee de gevraagde kans direct kan worden bepaald:

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{7}{15}} = \frac{5}{14}.$$

De in voorbeeld 3 gegeven berekening van $\mathbf{P}(B|A)$ is een voorbeeld van een toepassing van de *regel van Bayes*.

Regel van Bayes

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B)\cdot\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Passen we het conditioneringsprincipe toe op $\mathbf{P}(A)$, dan luidt de regel van Bayes als volgt:

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B)\cdot\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A|B)\cdot\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A|\text{niet-}B)\cdot\mathbf{P}(\text{niet-}B)}.$$

17 In een land heeft gemiddeld 1 op de 1000 personen een bepaalde ziekte. Een diagnostische test bepaalt of iemand de ziekte heeft. Deze test is echter niet 100% betrouwbaar: bij personen die de ziekte hebben, reageert de test in gemiddeld 99% van de gevallen op de ziekte door een positieve uitslag te geven; bij personen die de ziekte *niet* hebben, is de kans 2% dat de test (ten onrechte) een positieve uitslag geeft.

Noteer met A de gebeurtenis dat iemand de ziekte heeft en met B dat de test een positieve uitslag geeft. Bepaal op grond van de gegevens $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B|A)$, bereken $\mathbf{P}(B)$ met behulp van het conditioneringsprincipe, en bereken ten slotte $\mathbf{P}(A|B)$, de kans dat iemand met een positieve testuitslag daadwerkelijk de ziekte heeft.

18 Op een luchthaven wordt elke passagier met een detector onderzocht op explosieven. Gemiddeld 1 op de 10 miljoen passagiers draagt explosieven bij zich. Elke passagier met explosieven bij zich wordt ontdekt door het apparaat. In de andere gevallen geeft het apparaat gemiddeld één in de tienduizend keer een vals alarm. Bereken de kans dat bij het afgaan van een alarm de betreffende passagier explosieven bij zich draagt.

19 Een verzekeringsmaatschappij veronderstelt dat de bevolking in twee categorieën is te verdelen: 30% pechvogels met kans 0,4 op schade in een jaar en 70% niet-pechvogels voor wie deze kans slechts 0,2 is. Beschouw een nieuwe polishouder; op grond van het voorgaande kun je stellen dat deze met kans 0,3 pechvogel is. Hoe verandert deze kans als de nieuwe polishouder binnen een jaar schade heeft?

20 Een langgezocht scheepswrak ligt in een bepaald gebied met een kans geschat op 40%. Een zoektocht in dat gebied zou met een kans van 90% tot het wrak leiden als het wrak inderdaad in het gebied zou zijn. Het onderzoek wordt uitgevoerd, maar leidt niet tot het wrak. Bereken de kans dat het wrak zich toch in het betreffende gebied bevindt.

21 In een bepaalde streek regent het gemiddeld één keer in de tien dagen. Voor de dagen dat het regent is in 85% van de gevallen regen voorspeld, terwijl voor dagen dat het niet regent in 25% van de gevallen regen is voorspeld. Voor morgen is regen voorspeld. Wat is de kans dat het morgen werkelijk zal regenen?

22 In een stad zijn twee taxibedrijven: de 'Gele Rijders' en de 'Witte Rijders', waarbij 85% van de taxi's van het eerste bedrijf zijn en 15% van het tweede bedrijf. Op een regenachtige avond is een taxi na een aanrijding doorgereden. Een getuige van het ongeluk meent de taxi geïdentificeerd te hebben als een taxi van de 'Witte Rijders'. Als de rechtbank de betrouwbaarheid van de waarneming van de getuige test onder vergelijkbare weersomstandigheden, dan blijkt dat in 80% van de gevallen de getuige de kleur van de taxi juist identificeert en in 20% van de gevallen verkeerd. Wat is de kans dat de doorgereden taxi inderdaad van de 'Witte Rijders' is?

23 In een bepaalde regio worden regelmatig alcoholcontroles bij automobilisten uitgevoerd. Een aangehouden automobilist wordt eerst aan een blaasproeftest onderworpen. Als deze test leidt tot een positieve reactie, wordt de automobilist meegenomen voor een bloedproef. De blaasproeftest geeft bij dronkenschap in gemiddeld 90% van de gevallen een positieve reactie, terwijl bij geen dronkenschap in gemiddeld 5% van de gevallen een positieve reactie ontstaat. Momenteel wordt een automobilist alleen voor een blaasproeftest aangehouden bij verdacht verkeersgedrag. Het voorstel is nu om willekeurig automobilisten aan te houden voor een blaasproeftest. Van alle weggebruikers in de betreffende regio rijdt gemiddeld 1 op de 25 onder invloed. Wat is de kans dat een willekeurig aangehouden automobilist bij wie de blaasproeftest positief uitvalt, onnodig aan een bloedproef onderworpen wordt?

24 Van tweelingen is 30% eeneiïg (noodzakelijk van hetzelfde geslacht) en 70% twee-eiïg. Elvis Presley (1935-1977) had een tweelingbroer Jesse die bij zijn geboorte overleed. Wat is, achteraf, de kans dat Elvis en Jesse een eeneiïge tweeling waren?

25 Een atleet wordt na een wedstrijd onderzocht op dopinggebruik. De dopingtest geeft een betrouwbare uitslag in 90% van de gevallen. Geschat wordt dat 5% van de atleten doping gebruikt. De testuitslag wijst op dopinggebruik bij de betreffende atleet. Wat is de kans dat de atleet werkelijk doping heeft gebruikt?

26 Een belangrijke voetbalwedstrijd tussen Nederland en Engeland staat op het programma. De Nederlandse sterspeler Dennis Nightmare is geblesseerd. De kans dat hij op tijd fit is voor de wedstrijd wordt geschat op 75%. Vooraf wordt de kans dat Nederland de wedstrijd wint geschat op 30% als Dennis niet meespeelt, en op 50% als Dennis wel meespeelt. Je bent elders en je hoort zonder enige verdere informatie dat Nederland heeft gewonnen. Wat is de kans dat Dennis heeft meegespeeld?

27 Iemand heeft in zijn zak een normale munt en een bijzondere munt, die aan beide zijden 'kop' heeft. Hij neemt op goed geluk één van de munten uit zijn zak.

a. Als hij deze munt opwerpt en 'kop' komt boven, wat is dan de kans dat hij met de zuivere munt heeft gegooid?

b. Als hij dezelfde munt een tweede keer werpt en er komt weer 'kop' boven, wat is dán de kans dat hij met de zuivere munt heeft gegooid?

28 In een kamer staan drie kasten met elk twee laden. In beide laden van kast I zit een zilveren munt, in beide laden van kast II zit een gouden munt en kast III heeft één lade met een zilveren munt en één lade met een gouden munt.

Willekeurig wordt één kast aangewezen, waarna op goed geluk één van de laden van de aangewezen kast wordt geopend. Als deze een gouden munt blijkt te bevatten, wat is dan de kans dat de andere lade ook een gouden munt bevat?

4 Stochastische variabelen en verdelingsfuncties

4.1 Stochasten

Wanneer een kansexperiment bestaat uit het werpen met twee munten, zijn er vier mogelijke uitkomsten: KK, KM, MK en MM. Vaak zijn we niet zozeer geïnteresseerd in de uitkomst van het experiment zelf, maar in een van de uitkomst afhankelijke *numerieke grootheid* X. Bij het experiment met twee muntworpen kan X bijvoorbeeld *het aantal keren 'kop'* voorstellen. De gebeurtenis 'twee keer kop' kan dan worden genoteerd als '$X = 2$'.

Omdat de waarde van X afhangt van het toeval, wordt X een *toevalsvariabele* of *stochastische variabele* genoemd, of kortweg *stochast*, afgeleid van het begrip *stochastiek*, de verzamelnaam van de wetenschapsgebieden kansrekening, statistiek en besliskunde. De naam *stochastiek* is ontleend aan het Griekse werkwoord $\sigma\tau o\chi\alpha\zeta o\mu\alpha\iota$, dat 'raden' of 'gissen' betekent.

Een stochast is een variabele waarvan de waarde van het toeval afhangt.
Een stochast voegt aan elke uitkomst van een kansexperiment een getal toe.

Stochasten noteren we met hoofdletters. Stochasten zijn een handig hulpmiddel bij het beschrijven van gebeurtenissen. Een voordeel is dat je ermee kunt rekenen: je kunt ze bij elkaar optellen, van elkaar aftrekken, met elkaar vermenigvuldigen, enzovoorts.

Voorbeeld 1 Een kansexperiment bestaat uit het tweemaal werpen met een dobbelsteen. Voorbeelden van stochasten bij dit kansexperiment zijn:

$X =$ de som van de aantallen ogen;

$Y =$ het product van de aantallen ogen;

$Z =$ het hoogste aantal ogen;

$T =$ het aantal enen;

$U = 2X + 3$;

$V = X^2$;

$W = X + Y$.

Deze laatste stochast telt de som van de aantallen ogen en het product van de aantallen ogen bij elkaar op.

---

1 Gegeven zijn de stochasten uit het voorbeeld hierboven.

a. Bepaal de mogelijke uitkomsten van de stochasten X, Y, Z, T, U, V en W.

b. Bereken $\mathbf{P}(X = 6)$, $\mathbf{P}(Y \geq 5)$, $\mathbf{P}(Z = 4)$, $\mathbf{P}(T = 0)$, $\mathbf{P}(U = 15)$, $\mathbf{P}(V = 9)$ en $\mathbf{P}(4 \leq W \leq 8)$.

4.2 Verdelingsfuncties

Voorbeeld 2 Aad kiest blindelings een (geheel) getal uit de verzameling $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Bram kiest blindelings een (reëel) getal in het interval $[0, 10]$. De stochast X is het door Aad gekozen getal. De stochast Y is het door Bram gekozen getal.

a. Bereken $\mathbf{P}(X \in \{3, 4, 5\})$.

b. Bereken $\mathbf{P}(Y \in [3, 5])$.

Oplossing

a. Aad kiest willekeurig een getal uit $\{1, 2, \ldots, 10\}$, een verzameling van tien elementen. De kans dat hij een van de getallen 3, 4 en 5, drie waarden, kiest, is dus gelijk aan $\frac{3}{10}$. We gebruiken hier de bekende kansdefinitie van Laplace:
$$\frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}.$$

b. Bram kiest willekeurig een getal uit $[0, 10]$, een interval ter lengte 10. De kans het gekozen punt in het deelinterval $[3, 5]$, een interval ter lengte 2, ligt, is dan gelijk aan $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. We gebruiken hier het eendimensionale continue analogon van de kansdefinitie van Laplace, zie ook hoofdstuk 2:
$$\frac{\text{lengte deelinterval}}{\text{lengte gehele interval}}.$$

De verzameling van alle waarden die een stochast X kan aannemen, heet de *waardenverzameling* van X en wordt genoteerd met W_X, of kortweg W als duidelijk is om welke stochast het gaat. In voorbeeld 1 is $W_X = \{1, 2, \ldots, 10\}$ en $W_Y = [0, 10]$.

---

2 Geef de volgende stochasten een voor de hand liggende waardenverzameling.

a. Het totale aantal ogen bij twee dobbelsteenworpen.

b. Het aantal lidwoorden in een tekst.

c. Het alcoholpercentage in een vloeistof.

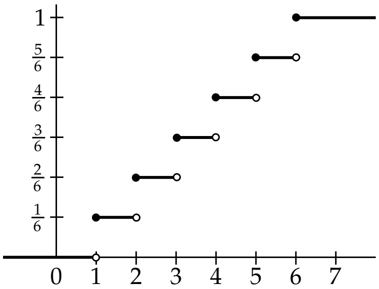
d. Het cijfer dat een leerling haalt voor een wiskundetoets.

e. De tijdsduur in minuten van een regenbui.

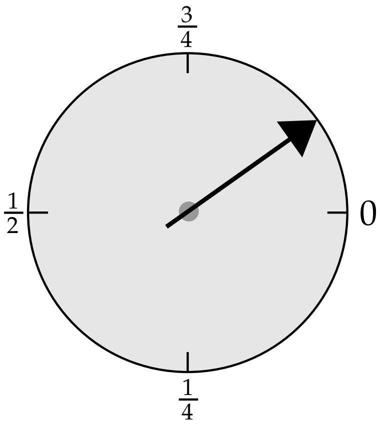
Bij de bestudering van een stochast X willen we weten welke waarden X kan aannemen en met welke kans dat gebeurt. Dat wordt beschreven door de *verdelingsfunctie* van X. De verdelingsfunctie van X noteren we met F_X, of kortweg F als duidelijk is om welke stochast het gaat. De verdelingsfunctie F_X wordt gedefinieerd door
$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x).$$

De verdelingsfunctie geeft dus de kans dat stochast X een waarde $\leq x$ aanneemt. Natuurlijk is de verdelingsfunctie een *niet-dalende* functie: voor $a < b$ geldt $F_X(a) \leq F_X(b)$.

Voorbeeld 3 De stochast X is het aantal ogen van een worp met een dobbelsteen. De verdelingsfunctie van X heeft dan de volgende grafiek:



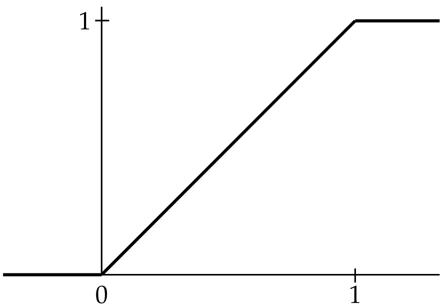
Voorbeeld 4 In het middelpunt van een ronde schijf is een vrij draaiende wijzer aangebracht. Op de omtrek van de schijf is een (continue) schaalverdeling van $[0,1\rangle$ aangebracht. Het punt X waar de wijzer tot stilstand komt, is een zeker reëel getal uit $[0,1\rangle$.



Het heeft geen zin om te kijken naar kansen $\mathbf{P}(X = x)$ voor *punten* $x \in [0,1\rangle$; die kansen zijn allemaal 0. We zullen in plaats daarvan kansen $\mathbf{P}(X \in \langle a,b\rangle)$, de kans dat X in het *interval* $\langle a,b\rangle$ terechtkomt, beschouwen.

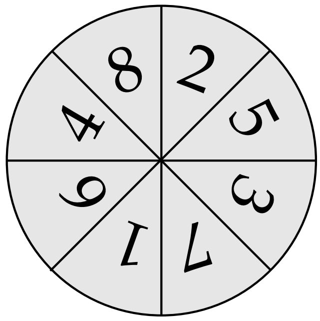
Is er geen enkele 'voorkeur' voor bepaalde richtingen, dan hangt deze kans alleen van de *lengte* van het interval af: $\mathbf{P}(X \in \langle a,b\rangle) = b - a$ voor ieder interval $\langle a,b\rangle \subset [0,1\rangle$. Dit betekent dat de kans 'met een constante dikte is uitgesmeerd over $[0,1\rangle$': het kansmodel is *homogeen*.

De verdelingsfunctie van X heeft dan de volgende grafiek:



3 Gegeven is een cirkel met straal 4, onderverdeeld in acht even grote, genummerde sectoren, zie onderstaande figuur. Je kiest blindelings een punt P binnen de cirkel.

De stochast X is het nummer van de sector waarin punt P zich bevindt en de stochast Y is de afstand van P tot het middelpunt van de cirkel.



a. Wat is de waardenverzameling van X?

b. Wat is de waardenverzameling van Y?

c. Bereken $\mathbf{P}(X = 3)$, $\mathbf{P}(X \leq 3)$ en $\mathbf{P}(X \leq 3\frac{1}{2})$.

d. Bereken $\mathbf{P}(Y = 3)$, $\mathbf{P}(Y \leq 3)$ en $\mathbf{P}(Y \leq 3\frac{1}{2})$.

e. Schets de verdelingsfunctie van X.

f. Schets de verdelingsfunctie van Y.

We hebben stochasten gezien met een *eindige* waardenverzameling, zoals de stochast X in de vorige opgave. Ook hebben we stochasten gezien met een *oneindige* waardenverzameling, zoals de stochast Y in de vorige opgave: élk reëel getal in het interval $[0, 4]$ is een mogelijke uitkomst. In het eerste geval spreken we van een *discreet* verdeelde stochast, in het tweede geval van een *continu* verdeelde stochast.

Iedere stochast waarvan de waardenverzameling uit slechts *eindig* veel elementen bestaat, is discreet. Maar níét elke stochast waarvan de waardenverzameling uit *oneindig* veel elementen bestaat, is continu! Ruwweg kun je zeggen dat een stochast continu verdeeld is indien de waardenverzameling een *interval* (of een aantal intervallen) is. Met het begrip *aftelbaar*, zie appendix D, kunnen we een precieze definitie van discreet en continu verdeelde stochast geven:

Een stochast is *discreet* verdeeld indien de waardenverzameling *eindig* of *aftelbaar* is.
Een stochast is *continu* verdeeld indien de waardenverzameling bestaat uit ten minste één interval $\langle a, b \rangle$, waarbij a en b eventueel $-\infty$ respectievelijk ∞ mogen zijn.

---

4 Welke van de volgende stochasten zijn discreet verdeeld en welke continu?

a. Het aantal verrotte sinaasappelen in een net met 18 sinaasappelen.

b. Het gewicht van een net met 18 sinaasappelen.

c. Het cijfer dat een leerling haalt voor een wiskundetoets.

d. De levensduur van een gloeilamp.

e. De prijs van een pak melk.

f. De schoenmaat van de Nederlandse vrouw.

g. De voetlengte van de Nederlandse vrouw.

h. Het aantal muntworpen dat nodig is om drie keer achter elkaar ‘kop’ te krijgen.

4.3 Onafhankelijke stochasten

In paragraaf 3.3 hebben we gezien dat twee gebeurtenissen A en B onafhankelijk zijn indien $\mathbf{P}(A \text{ en } B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$. Voor twee stochasten X en Y geldt iets soortgelijks, zie de volgende definitie:

De stochasten X en Y zijn onafhankelijk indien voor elke $x \in W_X$ en $y \in W_Y$ geldt:

$$\mathbf{P}(X \leq x \text{ en } Y \leq y) = \mathbf{P}(X \leq x) \cdot \mathbf{P}(Y \leq y).$$

Intuïtief komt het erop neer dat X en Y onafhankelijk zijn indien informatie over de uitkomst y van stochast Y, niet relevant is voor de uitkomst die stochast X zal aannemen, en vice versa.

Voor *discreet* verdeelde stochasten X en Y kan onafhankelijkheid ook als volgt worden geformuleerd:

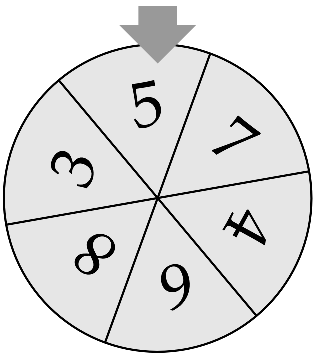
Discrete stochasten X en Y zijn onafhankelijk indien voor elke $x \in W_X$ en $y \in W_Y$ geldt:

$$\mathbf{P}(X = x \text{ en } Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \cdot \mathbf{P}(Y = y).$$

---

5 Leg uit waarom bovenstaande formulering van onafhankelijkheid niet zinvol is voor *continu* verdeelde stochasten.

Voorbeeld 5 Je laat de schijf in onderstaande figuur twee keer draaien. De stochast X is de som van de getallen die worden aangewezen, de stochast Y is het niet-negatieve verschil van de twee aangewezen getallen. Onderzoek of X en Y onafhankelijk zijn.



Oplossing Ga met een rooster met alle mogelijke uitkomsten na dat $\mathbf{P}(X = 7 \text{ en } Y = 1) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ en $\mathbf{P}(X = 7) \cdot \mathbf{P}(Y = 1) = \frac{2}{36} \cdot \frac{10}{36} = \frac{5}{324} \neq \frac{1}{18}$. Hieruit volgt dat X en Y afhankelijk zijn. *Opmerking: In plaats van de uitkomsten $X = 7$ en $Y = 1$ hadden we ook andere uitkomsten kunnen kiezen. Waarom zijn bij dit voorbeeld bijvoorbeeld de uitkomsten $X = 7$ en $Y = 2$ eigenlijk eenvoudiger keuzes?*

---

6 Iemand gooit met twee dobbelstenen. De stochast X is het kleinste ogental, de stochast Y is het grootste ogental en de stochast Z is de som van de ogentallen.

a. Toon aan dat X en Y afhankelijk zijn.

b. Toon aan dat X en Z afhankelijk zijn.

5 Discrete verdelingen

In paragraaf 4.2 is behandeld wanneer een stochast *discreet* verdeeld is: X is discreet verdeeld indien de waardenverzameling W_X *eindig* of *aftelbaar* is. Voorbeelden van discreet verdeelde stochasten zijn het aantal keer 'munt' bij zes muntworpen, het aantal benodigde worpen met een munt totdat 'kop' verschijnt, de prijs van een appartement in Amsterdam.

---

1 Je trekt aselect, zonder teruglegging, knikkers uit een vaas met twee zwarte en drie rode knikkers, tot je een rode knikker trekt. De stochast X is het aantal getrokken knikkers.

a. Wat is de waardenverzameling van X?

b. Bereken voor elke mogelijke uitkomst n de kans $\mathbf{P}(X = n)$.

c. Noteer de uitkomsten van vraag b overzichtelijk in een tabel.

2 Je trekt aselect, met teruglegging, knikkers uit een vaas met twee zwarte en drie rode knikkers, tot je een rode knikker trekt. De stochast Y is het aantal getrokken knikkers.

a. Wat is de waardenverzameling van Y?

b. Waarom kun je niet voor elke mogelijke uitkomst n de kans $\mathbf{P}(Y = n)$ weergeven in een tabel?

c. Geef een uitdrukking voor $\mathbf{P}(Y = n)$.

5.1 Kansdichtheid

In opgave 1c heb je een *tabel* gemaakt met de kansen $\mathbf{P}(X = n)$ voor alle mogelijke uitkomsten n. In opgave 2c heb je een *formule* voor $\mathbf{P}(Y = n)$ gegeven. De stochasten X en Y in deze opgaven zijn beide discreet verdeeld. De stochast X neemt immers slechts eindig veel waarden aan: 1, 2 en 3. De stochast Y neemt weliswaar oneindig veel waarden aan, maar dit zijn er slechts aftelbaar veel.

Bij een discreet verdeelde stochast X wordt de *kansdichtheid* gedefinieerd door

$$p_X(n) = \mathbf{P}(X = n).$$

Als duidelijk is om welke stochast het gaat, noteren we de kansdichtheid ook wel kortweg met $p(n)$ in plaats van $p_X(n)$.

Er geldt:

$$\sum_{n \in W_X} p_X(n) = 1,$$

in woorden: de som van alle mogelijke kansen is gelijk aan 1.

Voorbeeld 1 Je kiest drie verschillende getallen uit de verzameling $\{1, 2, \ldots, 10\}$. De stochast X is het grootste getal dat op deze manier wordt verkregen. Geef de kansdichtheid van X.

Oplossing Eerst bepalen we de waardenverzameling: $W_X = \{3, 4, \ldots, 10\}$. Het getal 3 is het grootste getal indien de getallen 1, 2 en 3 zijn gekozen. Het getal 4 is het grootste getal indien behalve 4, twee getallen uit $\{1, 2, 3\}$ worden gekozen. Het getal 5 is het grootste getal indien behalve 5, twee getallen uit $\{1, 2, 3, 4\}$ worden gekozen. In het algemeen geldt: Het getal n is het grootste getal indien behalve n, twee getallen uit $\{1, \ldots, n-1\}$ worden gekozen. Dit kan op $\binom{n-1}{2}$ manieren. In totaal zijn er $\binom{10}{3} = 120$ manieren om drie getallen te kiezen uit $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Dat geeft de volgende kansdichtheid:

$$p_X(n) = \frac{\binom{n-1}{2}}{120}.$$

---

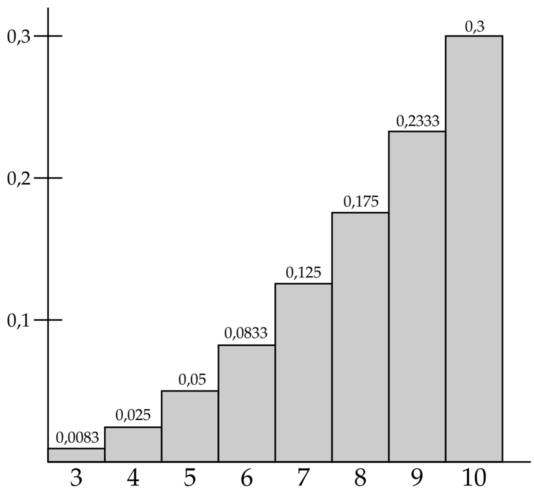
3 Je kiest drie verschillende getallen uit de verzameling $\{1, 2, \ldots, 10\}$. De stochast X is het kleinste getal dat op deze manier wordt verkregen.

a. Geef de kansdichtheid van X.

b. Bereken $\mathbf{P}(X = 7)$.

Bij een discrete kansverdeling kan een *kanshistogram* worden gemaakt: een histogram met op de horizontale as de waarden uit de waardenverzameling en op de verticale as de kansen. De oppervlakte van alle staafjes (met breedte 1) tezamen is gelijk aan 1.

Voorbeeld 2 Hieronder zie je het kanshistogram van stochast X bij voorbeeld 1.



---

4 Bij een spel wordt met drie munten gegooid. De inzet is € 2. Indien drie keer 'kop' verschijnt, win je € 5. Indien twee keer 'kop' verschijnt, win je € 3. In alle andere gevallen win je niets en ben je je inzet dus kwijt. De stochast W is de winst bij dit spel.

a. Wat is de waardenverzameling van W?

b. Bereken $p_W(n)$ voor elke mogelijke uitkomst n.

c. Teken het kanshistogram van W.

Indien er informatie over een kansexperiment beschikbaar is, zeg gebeurtenis A, kunnen we spreken over de *voorwaardelijke kansdichtheid van X gegeven A*, gedefinieerd door

$$p_X(n|A) = \mathbf{P}(X = n|A).$$

Voorbeeld 3 Je kiest drie verschillende getallen uit de verzameling $\{1, 2, \ldots, 10\}$. De stochast X is het grootste getal dat op deze manier wordt verkregen. Bepaal de voorwaardelijke kansdichtheid van X onder de voorwaarde dat het kleinste verkregen getal gelijk is aan 2.

Oplossing In voorbeeld 1 hebben we gezien dat de ónvoorwaardelijke dichtheid van X wordt gegeven door

$$p_X(n) = \frac{\binom{n-1}{2}}{120}, \quad n = 3, \ldots, 10.$$

Noteren we met A de gebeurtenis dat het kleinste verkregen getal gelijk is aan 2, dan geldt:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\binom{1}{1}\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{30}.$$

Onder de voorwaarde A heeft X natuurlijk de waardenverzameling $\{4, \ldots, 10\}$. Voor n uit deze verzameling geldt nu:

$$p_X(n|A) = \mathbf{P}(X = n|A) = \frac{\mathbf{P}(A \text{ en } X = n)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\frac{n-3}{120}}{\frac{7}{30}} = \frac{n-3}{28}, \quad n = 4, \ldots, 10.$$

Dat $p_X(n|A)$ een kansdichtheid is, is makkelijk te controleren: de som der kansen is (inderdaad) gelijk aan 1: $\frac{1}{28} + \frac{2}{28} + \cdots + \frac{7}{28} = 1$.

---

5 Je kiest drie verschillende getallen uit de verzameling $\{1, 2, \ldots, 10\}$. De stochast X is het kleinste getal dat op deze manier wordt verkregen. Bepaal de voorwaardelijke kansdichtheid van X onder de voorwaarde dat het middelste verkregen getal gelijk is aan 8.

5.2 Verwachtingswaarde

De *verwachtingswaarde*, of kortweg *verwachting*, van een discreet verdeelde stochast X is het *gewogen gemiddelde* van de mogelijke uitkomsten, met de bijbehorende kansen als gewichten. De verwachting van X wordt genoteerd met $\mathbf{E}(X)$ of μ_X, of kortweg μ. De letter E komt van het Latijnse woord *expectare* (= verwachten).

De verwachting van X in formulevorm is:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n \in W_X} n \cdot p_X(n).$$

De term 'verwachtingswaarde' kan misleidend zijn. Deze term moet je niet verwarren met 'meest waarschijnlijke waarde'. Het kan zelfs zo zijn dat $\mathbf{E}(X)$ géén element van de waardenverzameling van X is, zie het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 4 De stochast X is het aantal ogen van een worp met een dobbelsteen. De verwachting van X is dan

$$\mathbf{E}(X) = 1 \cdot \tfrac{1}{6} + 2 \cdot \tfrac{1}{6} + 3 \cdot \tfrac{1}{6} + 4 \cdot \tfrac{1}{6} + 5 \cdot \tfrac{1}{6} + 6 \cdot \tfrac{1}{6} = 3\tfrac{1}{2}.$$

De waarde $3\frac{1}{2}$ kan nooit de uitkomst zijn van een worp met een dobbelsteen. Wel blijkt dat bij een zeer groot aantal worpen de gemiddelde waarde van de ogentallen bij benadering gelijk is aan $3\frac{1}{2}$.

Hiermee komen we tot de volgende interpretatie van $\mathbf{E}(X)$: de verwachtingswaarde van een stochast is de de gemiddelde waarde die men verkrijgt bij een groot aantal onafhankelijke herhalingen van het kansexperiment.

---

6 Zie opgave 4. Bereken $\mathbf{E}(W)$.

7 Bij een spelletje wordt met een dobbelsteen geworpen. Als het ogental oneven is, krijg je het aantal ogen in euro's uitbetaald; als het ogental even is, moet je het aantal ogen in euro's betalen. Bereken de verwachtingswaarde van je winst.

8 Bij de Amerikaanse roulette is het speelveld verdeeld in 38 sectoren, die genummerd zijn van 1 tot en met 36 en verder met 0 en 00. Van de nummers 1 tot en met 36 is de helft rood, de andere helft zwart. De nummers 0 en 00 zijn groen. Per spelletje komt het balletje willekeurig op één van de 38 sectoren terecht.

a. Voor \$ 1 mag je inzetten op één van de nummers $1, \ldots, 36$. Je wint \$ 36 indien het balletje op jouw nummer belandt, anders ben je je inzet kwijt. Bereken de verwachtingswaarde van je winst.

b. Bij een andere versie mag je voor \$ 1 inzetten op één van de kleuren rood en zwart. Je wint \$ 2 indien het balletje op een nummer van jouw kleur belandt, anders ben je je inzet kwijt. Bereken de verwachtingswaarde van je winst.

Bij het berekenen van de verwachtingswaarde van een discreet verdeelde stochast X sommeer je over de elementen van de waardenverzameling W_X van X. Als de waardenverzameling eindig is, levert de definitie van verwachtingswaarde geen problemen op. Bij oneindige waardenverzamelingen is de verwachtingswaarde een som van oneindig veel getallen; in dat geval zeggen we dat de verwachtingswaarde *bestaat* indien $\mathbf{E}(X)$ *eindig* is.

---

9 Bij een spel wordt met een munt geworpen, net zolang totdat 'kop' verschijnt. De stochast X is het aantal benodigde worpen. De uitbetaling in euro is gelijk aan $Y = 2^X$.

a. Bepaal de kansdichtheid van X. Toon aan dat er inderdaad sprake is van een kansdichtheid met behulp van een van de reeksen uit appendix C.

b. Bereken $\mathbf{E}(X)$ met behulp van een van de reeksen uit appendix C.

c. Laat zien dat $\mathbf{E}(Y)$ niet bestaat.
Zou je bereid zijn € 1000 als inzet te betalen? Het feit dat $\mathbf{E}(Y) = \infty$ *staat bekend als 'de St. Petersburgparadox'.*

Soms is het nodig niet alleen de verwachting van een stochast X te kennen, maar tevens de verwachting van een *functie* φ van X. In opgave 9 heb je gezien dat $\mathbf{E}(X) = 2$. Maar $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(2^X) \neq 2^{\mathbf{E}(X)} = 2^2 = 4$. In het algemeen geldt: indien φ een *niet-lineaire* functie is, is $\mathbf{E}(\varphi(X)) \neq \varphi(\mathbf{E}(X))$. In opgave 9 was die functie $\varphi(x) = 2^x$. Ook het volgende (eenvoudige) voorbeeld illustreert nog eens dat $\mathbf{E}(\varphi(X)) \neq \varphi(\mathbf{E}(X))$.

Voorbeeld 5 De stochast X heeft waardenverzameling $\{1, 2\}$; zijn kansdichtheid wordt gegeven door $p(n) = \frac{1}{2}$, voor $n = 1, 2$. Bereken $(\mathbf{E}(X))^2$ en $\mathbf{E}(X^2)$.

Oplossing $\mathbf{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, dus $(\mathbf{E}(X))^2 = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.

De stochast $U = X^2$ heeft waardenverzameling $\{1, 4\}$; zijn kansdichtheid wordt gegeven door $p(n) = \frac{1}{2}$, voor $n = 1, 4$. Er geldt: $\mathbf{E}(U) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Het berekenen van $\mathbf{E}(\varphi(X))$ komt neer op het volgende:

Substitutieregel

$$\mathbf{E}(\varphi(X)) = \sum_{n \in W_X} \varphi(n) \cdot p_X(n).$$

Indien φ een *lineaire* functie is, dat wil zeggen: $\varphi(x) = ax + b$ met $a, b \in \mathbb{R}$, geldt wél: $\mathbf{E}(\varphi(X)) = \varphi(\mathbf{E}(X))$. Behalve deze regel voor verwachtingen, geven we, zonder bewijs, nog twee regels voor verwachtingen:

$$\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b \quad \text{en} \quad \mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).$$

Als X en Y onafhankelijk zijn, geldt bovendien

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y).$$

---

10 Je werpt met twee dobbelstenen. De stochast X is de som van de ogentallen en de stochast Y is het grootste ogental van de twee.

a. Bereken $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$ en $\mathbf{E}(XY)$.

b. Zijn X en Y onafhankelijk?

Verder is de volgende stochast gedefinieerd: $U = 2X + 3$.

c. Bereken $\mathbf{E}(U)$.

11 Je werpt met een dobbelsteen. De stochast X is het aantal ogen. In voorbeeld 4 zagen we dat $\mathbf{E}(X) = 3\frac{1}{2}$. Bereken nu $\mathbf{E}(X^2)$.

12 De stochast X heeft waardenverzameling $\{-1, 1\}$; zijn kansdichtheid wordt gegeven door $p(n) = \frac{1}{2}$, voor $n = -1, 1$. Bereken $(\mathbf{E}(X))^2$ en $\mathbf{E}(X^2)$.

Indien er informatie over een kansexperiment beschikbaar is, zeg gebeurtenis A, kunnen we spreken over de *voorwaardelijke verwachting van X gegeven A*, gedefinieerd door

$$\mathbf{E}(X|A) = \sum_{n \in W_X} n \cdot p_X(n|A).$$

---

13 Je kiest drie verschillende getallen uit de verzameling $\{1, 2, \ldots, 10\}$. De stochast X is het grootste getal dat op deze manier wordt verkregen. Zie ook voorbeeld 1.

a. Bereken $\mathbf{E}(X)$.

Met A noteren we de gebeurtenis dat het kleinste verkregen getal gelijk is aan 2. Zie ook voorbeeld 3.

b. Bereken $\mathbf{E}(X|A)$.

5.3 Variantie en standaardafwijking

Stochasten met verschillende kansverdelingen kunnen natuurlijk wel dezelfde verwachting hebben. Zo heeft een stochast X die met gelijke kans de waarden -1 en $+1$ aanneemt, dezelfde verwachting als een stochast Y waarvoor de waarden -10 en $+10$ beide kans $\frac{1}{2}$ hebben. Dit voorbeeld suggereert het belang van een tweede kenmerk van een kansverdeling, namelijk een maat voor de *spreiding* van de mogelijke waarden van een stochast X rond z'n verwachting μ.

Een voor de hand liggende keuze voor de spreidingsmaat is de verwachte afwijking van X ten opzichte van μ, dat wil zeggen: $\mathbf{E}(|X - \mu|)$, maar deze grootheid blijkt in de praktijk niet makkelijk hanteerbaar. Veel eenvoudiger is het om met $\mathbf{E}((X - \mu)^2)$ te werken; deze spreidingsmaat heet de *variantie* van X, notatie: $\mathrm{Var}(X)$. Er is geen intrinsiek argument waarom juist deze spreidingsmaat veelvuldig wordt gebruikt; de variantie heeft haar prominente plaats vooral te danken aan de fraaie wiskundige eigenschappen van $\mathbf{E}(X^2)$.

De variantie heeft niet dezelfde dimensie als de waarden van de stochast X. Als bijvoorbeeld de waarden van X zijn uitgedrukt in cm, dan is de dimensie van de variantie gelijk aan cm^2. Een spreidingsmaat die dezelfde dimensie heeft als de stochast X is de *standaardafwijking* (ook wel *standaarddeviatie*), notatie $\sigma(X)$, die gedefinieerd wordt door $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$. Dus:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}((X - \mu)^2) = \sum_{n \in W_X} (n - \mu)^2 \cdot \mathbf{P}(X = n) \quad \text{en} \quad \sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Voorbeeld 6 De stochast X is het aantal ogen van een worp met een dobbelsteen. De verwachting van X is dan $3\frac{1}{2}$, zie voorbeeld 4. De standaardafwijking van X is gemakkelijk te berekenen met de volgende tabel:

x	$(x-3\frac{1}{2})^2$
1	25/4
2	9/4
3	1/4
4	1/4
5	9/4
6	25/4

Dus

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}((X-\mu)^2) = \tfrac{1}{6}(\tfrac{25}{4} + \tfrac{9}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{4} + \tfrac{25}{4}) = \tfrac{35}{12},$$

waaruit volgt dat $\sigma(X) = \sqrt{35/12} \approx 1{,}707$.

Voor de variantie gelden volgende regels:

$$\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X) \quad \text{en} \quad \mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mu^2.$$

Als X en Y onafhankelijk zijn, geldt bovendien

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

---

14 Bewijs dat $\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mu^2$.

15 Zie voorbeeld 5. Bereken $\mathrm{Var}(X)$ en $\sigma(X)$.

16 Drie vrienden gaan wekelijks naar de bioscoop. Elke week betaalt één van hen alle toegangskaartjes. Om te besluiten wie betaalt, werpen ze alledrie tegelijk een munt. Heeft één van de drie een andere uitkomst dan de andere twee, dan betaalt hij. Wordt er drie keer hetzelfde gegooid, dan werpen de vrienden opnieuw, net zolang totdat één van de drie een afwijkende worp heeft.

De stochast X is het aantal keer dat met de drie munten wordt gegooid.

a. Bereken $\mathbf{E}(X)$.

b. Bereken $\mathrm{Var}(X)$ en $\sigma(X)$.

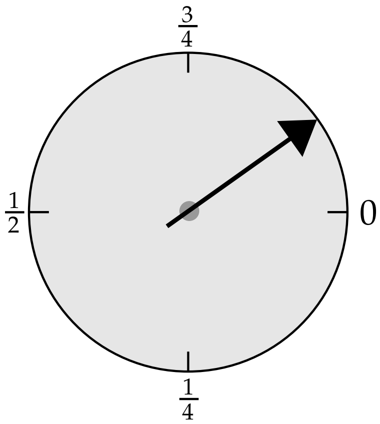
6 Continue verdelingen

In paragraaf 4.2 hebben we uitgelegd wanneer een stochast *continu* verdeeld is: X is continu verdeeld indien de waardenverzameling W_X bestaat uit ten minste één *interval*. Voorbeelden van continu verdeelde stochasten zijn de levensduur van een batterij, de tijd tussen twee aardbevingen in een bepaald gebied, de jaarlijkse regenval in Amsterdam.

Bij een discreet verdeelde stochast kan een kanshistogram worden gemaakt, zie voorbeeld 2 uit hoofdstuk 5. Omdat een continu verdeelde stochast *elke* waarde op een interval kan aannemen, is het maken van een kanshistogram onmogelijk.

6.1 Kansdichtheid

Voorbeeld 1 In het middelpunt van een ronde schijf is een vrij draaiende wijzer aangebracht. Op de omtrek van de schijf is een schaalverdeling van $[0, 1\rangle$ aangebracht. Het punt X waar de wijzer tot stilstand komt, is een zeker reëel getal uit $[0, 1\rangle$. Zie voorbeeld 4 uit hoofdstuk 4.



We nemen aan dat de wijzer geen enkele voorkeur heeft voor bepaalde richtingen. Onder deze aanname is de verdelingsfunctie van X:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{voor } x \leq 0; \\ x, & \text{voor } 0 < x \leq 1; \\ 1, & \text{voor } x > 1. \end{cases}$$

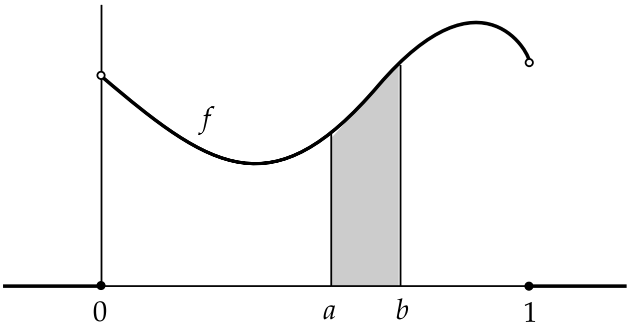
Er geldt:

$$\mathbf{P}(a < X < b) = \int_a^b 1\mathrm{d}x, \quad \text{voor } a, b \in \langle 0, 1].$$

Zou de wijzer in voorbeeld 1 wél een voorkeur hebben voor bepaalde richtingen, dan geldt dat

$$\mathbf{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

voor een zekere (niet-negatieve) functie f, die er bijvoorbeeld uit kan zien zoals in onderstaande figuur.



Deze functie heet de *kansdichtheid* van X. De grafiek van f geeft aanschouwelijk weer hoe dik de kansmassa plaatselijk is uitgesmeerd.

We hebben nu voldoende gereedschap om het begrip 'continu verdeelde stochast' precies te definiëren:

Een stochast X is continu verdeeld met *kansdichtheid* f_X als voor ieder interval $\langle a, b\rangle$ geldt:

$$\mathbf{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x.$$

In tegenstelling tot bij discreet verdeelde stochasten geldt voor een continu verdeelde stochast X dat de kans op iedere specifieke waarde gelijk is aan 0:

$$\mathbf{P}(X = x) = 0 \qquad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

Op grond hiervan is het bij de kans dat X een waarde heeft in een interval, niet van belang of het interval (half-)open of (half-)gesloten is:

$$\mathbf{P}(a < X < b) = \mathbf{P}(a < X \leq b) = \mathbf{P}(a \leq X < b) = \mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

De keuzen $a = -\infty$ en $b = \infty$ zijn toegestaan. Voor $a = -\infty$ vind je

$$\int_{-\infty}^b f_X(x)\mathrm{d}x = \mathbf{P}(X \leq b) = F_X(b),$$

dus

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\mathrm{d}t, \qquad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

Als duidelijk is om welke stochast het gaat, noteren we de kansdichtheid ook wel kortweg met f in plaats van f_X. Een kansdichtheid heeft de eigenschap

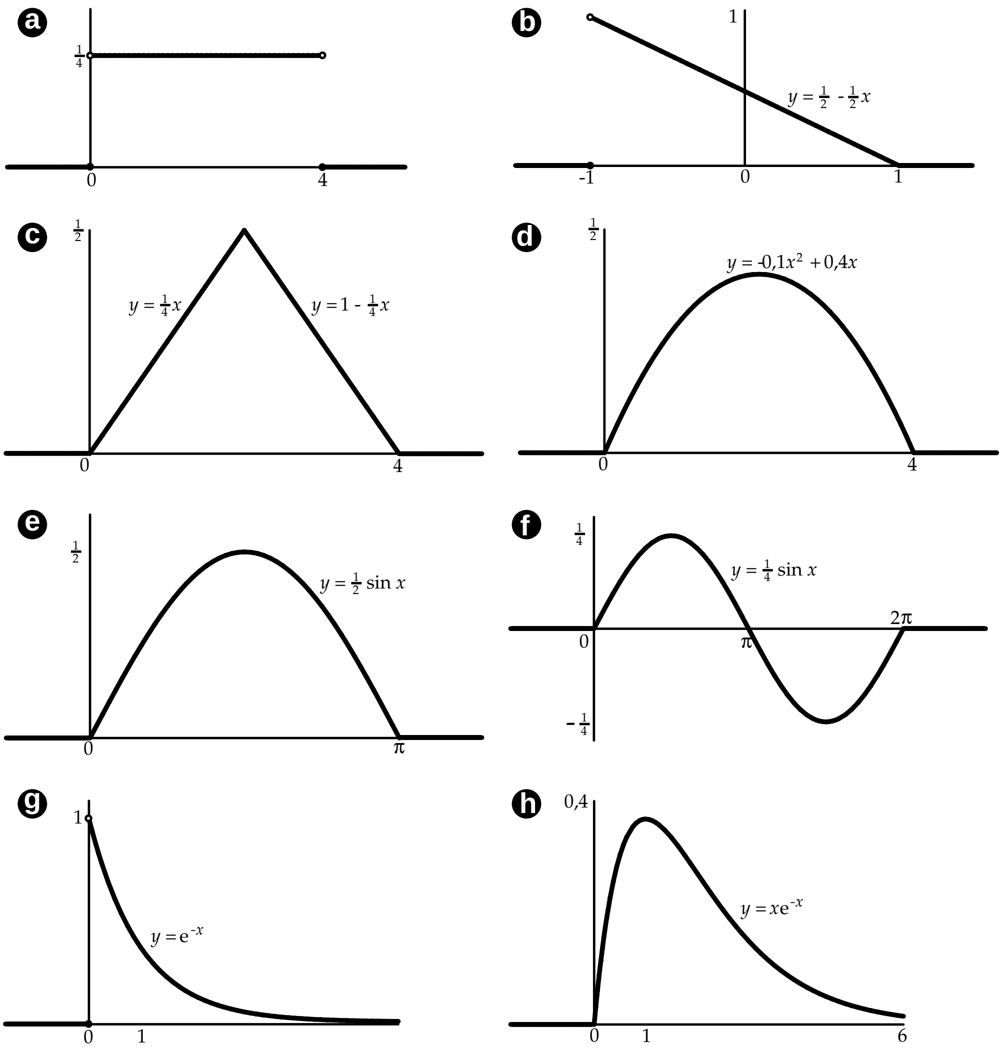
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1;$$

de oppervlakte van het (niet noodzakelijk begrensde) gebied tussen de grafiek van f en de x-as is dus 1 (vergelijk het kanshistogram in het discrete geval, zie voorbeeld 2 in hoofdstuk 5).

1 Hieronder zie je van acht functies f de grafiek. Onderzoek of die functies een kansdichtheid kunnen zijn, dat wil zeggen: controleer of aan de volgende twee voorwaarden wordt voldaan:

- f is niet-negatief: $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Aanwijzing bij h: een primitieve functie van $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ *is* $F(x) = -\mathrm{e}^{-x}(1 + x)$.



Voorbeeld 2 Gegeven is de functie

$$f(x) = \begin{cases} cx(2-x), & \text{voor } 0 < x < 2; \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

a. Voor welke waarde van c is f een kansdichtheid?

b. Bereken $\mathbf{P}(X > 1)$.

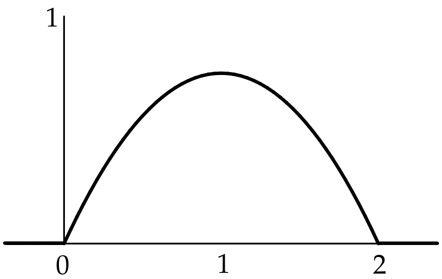
Oplossing

a. Er moet gelden:

$$\int_0^2 cx(2-x)\mathrm{d}x = 1, \quad \text{dus} \quad \int_0^2 (2cx - cx^2)\mathrm{d}x = [cx^2 - \tfrac{c}{3}x^3]_0^2 = 4c - \tfrac{8}{3}c = \tfrac{4}{3}c = 1,$$

waaruit volgt dat $c = \frac{3}{4}$.

b. $\mathbf{P}(X > 1) = \int_1^2 \frac{3}{4}x(2-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, een weinig verrassend antwoord, tenminste, als je de grafiek van f bekijkt:



---

2 Een dartspeler werpt een dart naar een cirkelvormig dartbord met straal 1, waarvan de roos een cirkelschijfje is met straal $\frac{1}{10}$. Hij treft met zekerheid het bord.

a. Bereken de kans dat de speler de roos treft, onder de aanname dat de kans dat een zeker deelgebied van het dartbord wordt getroffen evenredig is met de oppervlakte van dat deelgebied.

Veronderstel nu dat de dartspeler wat meer geoefend is, en dat de afstand X van het getroffen punt tot het middelpunt van het dartbord een continu verdeelde stochast is met kansdichtheid f.

Maak voor de volgende vier gevallen een schets van de grafiek van f, ga na dat er sprake is van een kansdichtheid, en bereken de kans dat de dartspeler de roos treft.

b. $f(x) = 1$, voor $0 < x < 1$;

c. $f(x) = 2 - 2x$, voor $0 < x < 1$;

d. $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$, voor $0 < x < 1$;

e. $f(x) = \frac{10}{\ln(11)\cdot(10x+1)}$, voor $0 < x < 1$.

Bij vraag b is de kansmassa van X 'met een constante dikte uitgesmeerd'. Toch zijn de antwoorden van vraag a en b niet hetzelfde.

f. Geef hiervoor een verklaring.

3 De stochast X is continu verdeeld met kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{voor } 0 < x < a; \\ 0, & \text{anders,} \end{cases}$$

voor zekere $a > 0$.

a. Bereken a.

b. Bereken $\mathbf{P}(X > 1)$ en $\mathbf{P}(X > 2)$.

c. Bepaal de verdelingsfunctie van X.

4 Een apparaat bevat een onderdeel waarvan de (stochastische) levensduur (in uren) continu is verdeeld met kansdichtheid f, gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} c/x^2, & \text{voor } x > 10; \\ 0, & \text{voor } x \leq 10, \end{cases}$$

voor zekere $c > 0$.

Bereken c. Waaruit blijkt dat het onderdeel ten minste tien uur meegaat?

Hoewel, anders dan in het discrete geval, de getalwaarde $f(x)$ zelf niet een kans is, kunnen we wel een kansinterpretatie aan $f(x)$ verbinden. Er geldt dat $f(x)\Delta x$ bij benadering gelijk is aan de kans dat de stochast X een waarde tussen x en $x + \Delta x$ aanneemt, voor Δx voldoende klein. Immers:

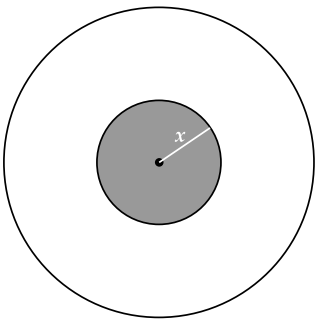
$$\mathbf{P}(x < X < x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t \approx \Delta x \cdot f(x).$$

Voor een continu verdeelde stochast X kunnen we meestal niet, zoals in het discrete geval, direct een kansdichtheid f_X bepalen. Dit komt doordat, zoals zojuist opgemerkt, $f_X(x)$ in het algemeen geen kans voorstelt. Voor de *verdelingsfunctie* geldt dit wel: $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$. Daarom speelt bij continu verdeelde stochasten de verdelingsfunctie een zeer belangrijke rol. In concrete gevallen wordt éérst de verdelingsfunctie bepaald. Met behulp daarvan kan dan de kansdichtheid worden afgeleid. Er geldt immers (hoofdstelling van de analyse):

$$F'(x) = f(x).$$

Voorbeeld 3 Een dartspeler werpt een dart naar een cirkelvormig dartbord met straal 1. Hij doet dit blindelings, maar treft wel met zekerheid het bord. De stochast X is de afstand van het getroffen punt tot het middelpunt van het dartbord. Bepaal een kansdichtheid van X.

Oplossing Zie onderstaande figuur.



Er geldt: $\mathbf{P}(X \leq x) = \dfrac{\text{oppervlakte gearceerde gebied}}{\text{oppervlakte dartbord}} = \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2$, dus de verdelingsfunctie F van X is:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{voor } x < 0, \\ x^2, & \text{voor } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{voor } x > 1. \end{cases}$$

Omdat voor de kansdichtheid f van X geldt dat $f(x) = F'(x)$, heeft f het volgende functievoorschrift:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{voor } 0 < x < 1; \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

Opmerking: de reden dat we schrijven $f(x) = 2x$ *voor* $0 < x < 1$*, en niet voor* $0 \leq x \leq 1$*, is gelegen in het feit dat* F niet differentieerbaar *is in de punten* $x = 0$ *en* $x = 1$*. In dergelijke punten doet het er niet toe welke waarde* $f(x)$ *heeft. Het is echter gebruikelijk om voor die punten* $f(x)$ *gelijk aan nul te stellen. In feite mag je voor eindig veel waarden* x *de waarde van* $f(x)$ *vrij kiezen, de integraal van* f *verandert daardoor niet. De functie* f *ligt dus nooit helemaal vast. We kiezen in de regel voor de meest voor de hand liggende (dat wil zeggen: continue) keuze van* f*, en spreken dan van* de *kansdichtheid van* X *in plaats van* een *kansdichtheid.*

---

5 Een punt A wordt willekeurig gekozen binnen het eenheidsvierkant. De stochast S is de som van de x- en de y-coördinaat van A.

a. Bereken $\mathbf{P}(S \leq \frac{1}{2})$.

b. Bereken $\mathbf{P}(S \leq 1\frac{1}{2})$.

c. Bepaal de verdelingsfunctie van S en schets de grafiek van deze verdelingsfunctie. *Aanwijzing: Maak bij het bepalen van* $F_S(s)$ *onderscheid tussen de gevallen* $0 \leq s \leq 1$ *en* $1 < s \leq 2$.

d. Bepaal de kansdichtheid van S en schets de grafiek van deze kansdichtheid.

6 Een punt A wordt willekeurig gekozen binnen het eenheidsvierkant. De stochast T is het product van de x- en de y-coördinaat van A.

a. Bereken $\mathbf{P}(T \leq \frac{1}{2})$.

b. Bereken $\mathbf{P}(T \leq 1\frac{1}{2})$.

c. Bepaal de verdelingsfunctie van T en schets de grafiek van deze verdelingsfunctie.

d. Bepaal de kansdichtheid van T en schets de grafiek van deze kansdichtheid.

7 Een punt A wordt willekeurig gekozen binnen het eenheidsvierkant. De stochast V is het niet-negatieve verschil van de x- en de y-coördinaat van A.

a. Bereken $\mathbf{P}(V \leq \frac{1}{2})$.

b. Bepaal de verdelingsfunctie van V en schets de grafiek van deze verdelingsfunctie.

c. Bepaal de kansdichtheid van V en schets de grafiek van deze kansdichtheid.

8 Een dunne rechte stok van lengte 1 wordt op een willekeurige plaats in tweeën gebroken. De stochast X is de lengte van het kortste stuk.

a. Wat is de waardenverzameling van X?

b. Bepaal de verdelingsfunctie van X.

c. Bepaal de kansdichtheid van X.

9 Van een bepaald type batterij is de (stochastische) levensduur X (in uren) continu verdeeld met verdelingsfunctie F, gegeven door

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{voor } x < 0, \\ \frac{1}{1600}x^2, & \text{voor } 0 \leq x \leq 40; \\ 1, & \text{voor } x > 40. \end{cases}$$

Bepaal de kansdichtheid van X en schets de grafiek van deze kansdichtheid.

Net als in het discrete geval kunnen we ook bij continu verdeelde stochasten voorwaardelijke kansdichtheden opstellen. De *voorwaardelijke verdelingsfunctie van X gegeven A* is

$$F_X(x|A) = \mathbf{P}(X \leq x|A) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x|A)\mathrm{d}x;$$

hierbij wordt $f_X(x|A)$ een *voorwaardelijke kansdichtheid van X gegeven A* genoemd.

Voorbeeld 4 Een dartspeler werpt een dart naar een cirkelvormig dartbord met straal 1. Hij doet dit blindelings, maar treft wel met zekerheid het bord. De stochast X is de afstand van het getroffen punt tot het middelpunt van het dartbord. Bepaal de kansdichtheid van X gegeven $X > \frac{1}{2}$.

Oplossing In voorbeeld 3 hebben we gezien dat de ónvoorwaardelijke verdelingsfunctie F van X wordt bepaald door $F(x) = x^2$ voor $0 \leq x \leq 1$. Onder de voorwaarde $X > \frac{1}{2}$ heeft X natuurlijk de waardenverzameling $\langle \frac{1}{2}, 1]$. Voor x in dit interval is

$$F_X(x|X > \tfrac{1}{2}) = \frac{\mathbf{P}(\frac{1}{2} < X \leq x)}{\mathbf{P}(X > \frac{1}{2})} = \frac{F(x) - F(\frac{1}{2})}{1 - F(\frac{1}{2})} = \tfrac{4}{3}x^2 - \tfrac{1}{3}.$$

Differentiatie hiervan geeft de voorwaardelijke kansdichtheid:

$$f(x|X > \tfrac{1}{2}) = \begin{cases} \frac{8}{3}x, & \text{voor } \frac{1}{2} < x < 1, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

---

10 Controleer dat $f(x|X > \frac{1}{2})$ uit het laatste voorbeeld inderdaad een kansdichtheid is door $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{8}{3}x\mathrm{d}x$ te berekenen.

11 Je kiest een getal X uit het interval $[2, 10]$ met kansdichtheid

$$f_X(x) = cx.$$

Hierbij is c een constante.

a. Bereken c.

b. Bereken $\mathbf{P}(X > 5)$, $\mathbf{P}(X < 7)$ en $\mathbf{P}(X^2 - 12X + 35 > 0)$.

c. Bepaal de kansdichtheid van X gegeven $X > 5$.

6.2 Verwachtingswaarde

De *verwachtingswaarde* van een continu verdeelde stochast X is gedefinieerd als

$$\mathbf{E}(X) = \int_{W_X} x \cdot f_X(x)\mathrm{d}x.$$

Analoog aan het discrete geval, zeggen we dat $\mathbf{E}(X)$ *niet bestaat* indien deze integraal divergeert.

Voorbeeld 5 Een dartspeler werpt blindelings een dart naar een cirkelvormig dartbord met straal 1. De stochast X is de afstand van het getroffen punt tot het middelpunt van het dartbord. Bereken $\mathbf{E}(X)$.

Oplossing In voorbeeld 10 hebben we gezien dat voor de kansdichtheid f van X geldt dat $f(x) = 2x$, voor $0 < x < 1$. Als verwachte afstand van het getroffen punt tot het middelpunt van de roos vinden we dan

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^1 2x^2\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}.$$

---

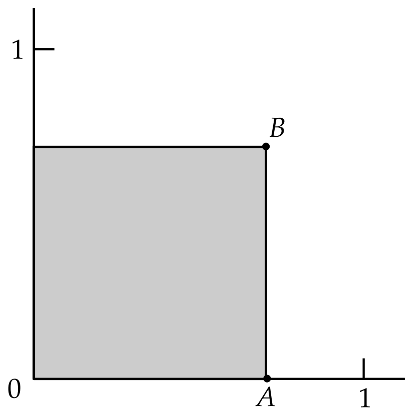
12 Zie de opgaven 5, 6 en 7. Bereken $\mathbf{E}(S)$, $\mathbf{E}(T)$ en $\mathbf{E}(V)$.

13 Je kiest blindelings een punt A uit het eenheidsinterval.

De stochast X is de lengte van het lijnstuk OA.

a. Bepaal de verdelingsfunctie en de kansdichtheid van X, en schets van beide functies de grafiek.

b. Bereken de verwachtingswaarde $\mathbf{E}(X)$ van X.



Punt B is het punt dat recht boven A ligt zó, dat $|OA| = |AB|$; zie nevenstaande figuur. De stochast V is de oppervlakte van het vierkant waarvan O, A en B hoekpunten zijn, dus $V = X^2$.

c. Bepaal de verdelingsfunctie en de kansdichtheid van V, en schets van beide functies de grafiek.

d. Bereken de verwachtingswaarde $\mathbf{E}(V)$ van V.

e. Is $\mathbf{E}(V)$ gelijk aan $(\mathbf{E}(X))^2$?

In opgave 13e heb je gezien dat de verwachtingswaarde van X^2 niet gelijk is aan het kwadraat van de verwachting van X. In het discrete geval hadden we dit al eerder gezien. Voor continu verdeelde stochasten gelden dezelfde regels voor verwachting, zie paragraaf 5.2. De substitutieregel in het continue geval is

Substitutieregel

$$\mathbf{E}(\varphi(X)) = \int_{W_X} \varphi(x) \cdot f_X(x)\mathrm{d}x.$$

---

14 Zie opgave 13. Bereken $\mathbf{E}(V)$ nogmaals, nu met behulp van de substitutieregel.

Net als in het discrete geval kunnen we ook bij continu verdeelde stochasten voorwaardelijke verwachtingen opstellen. De *voorwaardelijke verwachting van X gegeven A* is

$$\mathbf{E}(X|A) = \int_{W_X} x \cdot f_X(x|A)\mathrm{d}x.$$

Voorbeeld 6 Een dartspeler werpt blindelings een dart naar een cirkelvormig dartbord met straal 1. De stochast X is de afstand van het getroffen punt tot het middelpunt van het dartbord. Bereken de voorwaardelijke verwachting van X gegeven $X > \frac{1}{2}$.

Oplossing In voorbeeld 4 hebben we gezien dat X onder de voorwaarde $X > \frac{1}{2}$ de volgende kansdichtheid heeft:

$$f_X(x|X > \tfrac{1}{2}) = \tfrac{8}{3}x, \quad \tfrac{1}{2} < x < 1,$$

waaruit volgt:

$$\mathbf{E}(X|X > \tfrac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \tfrac{8}{3}x^2\mathrm{d}x = \tfrac{7}{9}.$$

Deze voorwaardelijke verwachting is slechts $\frac{1}{9}$ groter dan de in voorbeeld 5 gevonden ónvoorwaardelijke verwachting!

---

15 Zie opgave 11. Bereken $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(X^2 - 12X + 35)$ en $\mathbf{E}(X|X > 5)$.

6.3 Variantie en standaardafwijking

De definitie van variantie en standaardafwijking hebben we al gegeven in het discrete geval; voor een continu verdeelde stochast X komt het neer op

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}((X-\mu)^2) = \int_{W_X} (x-\mu)^2 \cdot f_X(x)\mathrm{d}x \quad \text{en} \quad \sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Voor de regels die gelden voor variantie verwijzen we naar het discrete geval, zie paragraaf 5.3.

Voorbeeld 7 Een dartspeler werpt blindelings een dart naar een cirkelvormig dartbord met straal 1. De stochast X is de afstand van het getroffen punt tot het middelpunt van het dartbord. Bereken $\sigma(X)$.

Oplossing In voorbeeld 3 hebben we gezien dat voor de kansdichtheid f van X geldt dat $f(x) = 2x$, voor $0 < x < 1$, en in voorbeeld 5 hebben we gezien dat $\mathbf{E}(X) = \frac{2}{3}$.

Verder geldt:

$$\mathbf{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 2x^3\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}.$$

Dus $\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$, waaruit volgt dat $\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{18}} \approx 0{,}236$.

---

16 Je kiest blindelings een punt A uit het eenheidsinterval. De stochast X is de lengte van het lijnstuk OA. Bereken $\mathrm{Var}(X)$ en $\sigma(X)$.

17 Zie de opgaven 5, 6, 7 en 12. Bereken de variantie en de standaardafwijking van S, T en V.

18 De stochast X is continu verdeeld met kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x-1), & \text{voor } 1 < x < 2; \\ \frac{1}{3}(4-x), & \text{voor } 2 < x < 4; \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

a. Schets de grafiek van f.

b. Verifieer dat f inderdaad een kansdichtheid is.

c. Bereken $\mathbf{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ en $\sigma(X)$.

19 De tijd T (in weken) die verstrijkt tussen de aankoop van een fles *tropical drink* en het moment waarop deze fles geheel geconsumeerd danwel om een andere reden is geledigd, is continu verdeeld met kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1, & \text{voor } 0 < x < 3; \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

a. Verifieer dat f inderdaad een kansdichtheid is.

b. Bepaal de verdelingsfunctie van T.

c. Bereken $\mathbf{E}(T)$, $\mathrm{Var}(T)$ en $\sigma(T)$.

20 De tijd T (in minuten) die nodig is om een bepaald apparaat in elkaar te zetten, is continu verdeeld met kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{25}x, & \text{voor } 5 < x < 10; \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

a. Hoe groot is de kans dat de benodigde tijd minder dan zeven minuten is?

b. Bereken $\mathbf{E}(T)$, $\mathrm{Var}(T)$ en $\sigma(T)$.

21 Een punt A wordt blindelings gekozen in het eenheidsinterval. Dit punt verdeelt het eenheidsinterval in twee stukken die vervolgens als de twee (aangrenzende) zijden van een rechthoek worden genomen. De stochast X is de afstand van 0 tot A en de stochast Y is de oppervlakte van de rechthoek.

a. Druk Y uit in X en bepaal de waardenverzameling van Y.

b. Bepaal de verdelingsfunctie en de kansdichtheid van Y.

c. Bereken $\mathbf{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ en $\sigma(X)$.

22 Een punt A wordt willekeurig gekozen binnen een vierkant met zijde 1. De stochast X is de afstand van A tot het vierkant.

a. Bepaal de waardenverzameling van X.

b. Bepaal de verdelingsfunctie en de kansdichtheid van X.

c. Bereken $\mathbf{P}(X \leq \frac{1}{3})$.

d. Bereken $\mathbf{E}(X)$.

23 Een ochtendkrant wordt dagelijks (m.u.v. zondag) bij iemand bezorgd op een zeker tijdstip tussen vijf en zeven uur. Veronderstel dat dit tijdstip kan worden gezien als een continu verdeelde stochast X met kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{14-2x}}, & \text{voor } 5 < x < 7; \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

a. Toon aan dat f inderdaad een kansdichtheid is.

b. Wanneer is de kans dat de krant wordt bezorgd, het grootst, vóór of ná zes uur? Beredeneer je antwoord met behulp van een schets van de grafiek van f.

c. Bepaal de verdelingsfunctie F.

d. Bepaal in minuten nawukeurig het verwachte tijdstip waarop de krant wordt bezorgd.

e. Toon aan dat de kans dat de krant op een zekere dag tussen kwart voor zes en kwart over zes wordt bezorgd, gelijk is aan $\frac{1}{4}(\sqrt{10} - \sqrt{6})$.

f. Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat gedurende twee weken (dus twaalf bezorgdagen) de krant ten minste zeven keer tussen kwart voor zes en kwart over zes wordt bezorgd.

7 Speciale discrete verdelingen

In dit hoofdstuk worden vier belangrijke discrete verdelingen behandeld: de homogene verdeling, de binomiale verdeling, de geometrische verdeling en de hypergeometrische verdeling. De achterliggende experimenten zijn meestal vrij simpel van aard en ten dele al bekend. Bij de besproken verdelingen zijn één of meer *parameters* in het spel; in feite beschouwen we dan in één keer een hele familie van verdelingen. De verwachting kan vaak op eenvoudige wijze in deze parameter(s) worden uitgedrukt.

Niet-besproken belangrijke discrete verdelingen zijn de negatief-binomiale verdeling en de Poissonverdeling. De negatief-binomiale verdeling wordt wel in een opgave aangestipt, en over de Poissonverdeling is een apart deel in de *Zebrareeks* verschenen, zie de literatuurlijst achterin.

7.1 De homogene verdeling

Definieer de stochast X door

$$X = \text{een blindelings gekozen getal uit een eindige verzameling } \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

We zeggen dat X een (discreet-)homogene verdeling op de punten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ heeft. De kansdichtheid van X wordt gegeven door

$$p(x_i) = \frac{1}{n}, \quad \text{voor } i = 1, \ldots, n.$$

De verwachtingswaarde van een homogeen verdeelde stochast X wordt gegeven door:

$$\mathbf{E}(X) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

dat wil zeggen: het *gemiddelde* van $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

---

1 Aad werpt met één dobbelsteen en Bram werpt met twee dobbelstenen. De stochast X is het ogental van Aads worp en de stochast Y is de som van de ogentallen van Brams worp.

a. Welk van de stochasten X en Y heeft een homogene verdeling?

b. Waarom is de andere stochast niet homogeen verdeeld?

2 Een stad telt n cafés. In een van deze cafés hebben Aad en Bram om 22.00 uur een afspraak. Zij zijn echter allebei vergeten in wélk van de n cafés de afspraak is.

a. Als Aad en Bram allebei om 22.00 uur willekeurig een café binnen gaan, wat is dan de kans dat zij elkaar treffen?

Helaas blijkt dat Aad en Bram elkaar om 22.00 uur niet treffen, waarop Aad besluit te blijven waar hij is, terwijl Bram besluit om de overige $n-1$ cafés langs te gaan in willekeurige volgorde, totdat hij Aad heeft gevonden.

b. Wat is het verwachte aantal cafés dat Bram na zijn eerste café nog aandoet?

7.2 De binomiale verdeling

Een kansexperiment met maar twee mogelijke uitkomsten heet een *Bernoulli-experiment*. De twee mogelijke uitkomsten worden vaak aangeduid met 'succes' en 'mislukking', waarbij de uitkomst 'succes' met een gegeven kans p optreedt en de uitkomst 'mislukking' met kans $1-p$.

Beschouw nu het samengestelde kansexperiment dat opgebouwd is uit n onafhankelijke uitvoeringen van zo'n Bernoulli-experiment. Definieer de stochast X door

$$X = \text{het aantal successen in } n \text{ uitvoeringen van het Bernoulli-experiment.}$$

De waardenverzameling van X is $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. De kansverdeling van X heet de *binomiale verdeling*. Deze kansverdeling is vastgelegd door het aantal uitvoeringen van het Bernoulli-experiment n en de kans p op succes. Hierbij heten n en p de *parameters* van de binomiale verdeling.

De kansdichtheid van X wordt gegeven door

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{voor } k = 0, 1, \ldots, n.$$

---

3 Bewijs met behulp van het binomium van Newton dat met bovenstaande formule inderdaad een kansdichtheid wordt vastgelegd, dus bewijs: $\sum_{k=0}^{n} p(k) = 1$.

4 Voor de verwachting van een binomiaal verdeelde stochast X met parameters n en p geldt:

$$\mathbf{E}(X) = np.$$

Bewijs dit op twee manieren:

a. door X te schrijven als som van de stochasten $Y_1, \ldots, Y_n$, waarbij de stochast Y_i gelijk is aan 1 indien het i-de Bernoulli-experiment een succes is en gelijk aan 0 indien het i-de Bernoulli-experiment een mislukking is;

b. met behulp van de definitie van verwachting; gebruik hierbij dat $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, voor $0 < k \leq n$.

5 Aad en Bram spelen tegen elkaar een wedstrijd van zeven partijen. De kans dat Aad een partij wint, is 0,6. Definieer de volgende stochasten:
X = het aantal partijen dat Aad wint;
Y = het aantal partijen dat Bram wint.

a. Bereken $\mathbf{P}(X = 5)$.

b. Bereken $\mathbf{P}(Y < 4)$.

c. Bereken $\mathbf{E}(X)$ en $\mathbf{E}(Y)$.

6 Carl en Daan spelen een spel waarbij 20 keer met een munt wordt gegooid. Telkens als 'kop' valt, krijgt Carl een euro van Daan, als 'munt' valt, krijgt Daan een euro van Carl.

a. Bereken de kans dat zowel Carl als Daan aan het einde van het spel niets verloren heeft.

b. Bereken de kans dat Carl na de voorlaatste worp één euro winst heeft.

7.3 De geometrische verdeling

Beschouw wederom een Bernoulli-experiment met kans p op 'succes' en kans $1 - p$ op 'mislukking'. Definieer de stochast X door

X = het aantal uitvoeringen van het Bernoulli-experiment dat nodig is voor het behalen van een succes.

De waardenverzameling van X is $\{1, 2, 3, \ldots\}$. De kansverdeling van X heet de *geometrische verdeling*. Deze kansverdeling is vastgelegd door de succeskans p van het Bernoulli-experiment. Daarom heet p de parameter van de geometrische verdeling.

De kansverdeling van X wordt gegeven door

$$p(k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p, \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \ldots$$

---

7 Bewijs met behulp van de somformule voor een meetkundige reeks dat met bovenstaande formule inderdaad een kansdichtheid wordt vastgelegd, dus bewijs: $\sum_{k=1}^{\infty} p(k) = 1$.

8 De stochast X is geometrisch verdeeld met parameter p. Bewijs met behulp van een van de reeksen uit appendix C:

$$\mathbf{E}(X) = 1/p.$$

9 De stochast X is geometrisch verdeeld met parameter p. Geef een uitdrukking voor de 'staartkans' $\mathbf{P}(X > k)$, dat wil zeggen: de kans op méér dan k experimenten voordat een succes optreedt.

10 Je werpt met een dobbelsteen, net zo lang totdat je zes ogen hebt gegooid. Met X noteren we het benodigde aantal worpen.

a. Welke verdeling heeft X? Wat is de parameter?

b. Bereken de kans dat hij tien keer moet gooien.

c. Bereken de kans dat hij méér dan tien keer moet gooien.

d. Bereken de verwachtingswaarde van het aantal worpen.

e. Waarom is het aantal worpen eindig met kans 1?

11 Aad en Bram spelen het volgende spelletje, waarbij Aad begint. Om de beurt trekken zij, met teruglegging, een bal uit een doos met drie witte en zeven rode ballen. Winnaar is degene die als eerste een witte bal trekt. Bereken de kans dat Aad wint.

12 Een stad telt n cafés. In een van deze cafés hebben Carl en Daan om 22.00 uur een afspraak. Zij zijn echter allebei vergeten in wélk van de n cafés de afspraak is. Om 22.00 uur zijn zij naar een verschillend café gegaan. Ze besluiten allebei de volgende 'kip-zonder-kop-strategie' te volgen: elke vijf minuten gaan zij willekeurig naar een van de n cafés, net zolang tot zij elkaar treffen.

a. Bereken de kans dat zij elkaar om 22.05 uur, dus tijdens het eerste cafébezoek na 22.00 uur, treffen.

b. Bereken de kans dat zij elkaar vóór 23.00 uur treffen.

c. Bereken het verwachte tijdstip waarop zij elkaar zullen treffen.

13 Iemand heeft een symmetrische 32-zijdige dobbelsteen, met ogentallen 1 tot en met 32. Voor € 1 mag je een getal kiezen, waarna de dobbelsteen net zo vaak wordt gerold totdat het door jou gekozen getal verschijnt. Met X noteren we het benodigde aantal worpen.

a. Bereken $\mathbf{E}(X)$.

Je krijgt je inzet dubbel terug indien het door jouw gekozen getal in 22 of minder worpen verschijnt, anders ben je je inzet kwijt.

b. Bereken de kans dat je je inzet dubbel terugkrijgt.

c. Bereken de verwachtingswaarde van je winst bij dit spelletje.

14 Er wordt met twee dobbelstenen geworpen, net zolang totdat een totaal ogental van 'acht' wordt gegooid.

a. Bereken de verwachting van het aantal worpen.

b. Bereken de kans dat in deze muntworpen reeks geen enkele keer een totaal ogental van 'zeven' wordt gegooid.

15 De stochast X is geometrisch verdeeld met parameter p. Bewijs:

$$\mathbf{P}(X > m + n | X > m) = (1 - p)^n.$$

Deze eigenschap heet de *geheugenvrijheid* van de geometrische verdeling.

16 Je kiest blindelings een getal uit de verzameling $\{1, \ldots, 25\}$. Als het gekozen getal een priemgetal is, stop je; in het andere geval kies je, onafhankelijke van de vorige keer, opnieuw. Zo ga je door totdat er een priemgetal is gekozen.

a. Waarom is het aantal pogingen eindig met kans 1?

b. Bereken het verwachte aantal pogingen.

c. Als je reeds tien pogingen (zonder succes) hebt gedaan, wat is dan de (voorwaardelijke) kans dat je na deze tien pogingen nog ten minste vijf keer moet kiezen?

17 Bij de Europese roulette is het speelveld verdeeld in 37 sectoren, die genummerd zijn van 0 tot en met 36. Van de nummers 1 tot en met 36 is de helft rood, de andere helft zwart. Het nummer 0 is groen. Per spelletje komt het balletje willekeurig op één van de 37 sectoren terecht.

a. Voor € 1 mag je inzetten op één van de kleuren rood en zwart. Je wint € 2 indien het balletje op een nummer van jouw kleur belandt, anders ben je je inzet kwijt. Bereken de verwachtingswaarde van je winst.

b. Bereken de verwachtingswaarde van het aantal spelletjes dat nodig is totdat het balletje op nummer 0 belandt.

c. Een gokker gaat met jou de weddenschap aan dat bij de eerste 36 spelletjes het balletje ten minste één keer op nummer 0 belandt. Bereken de kans dat je deze weddenschap wint (dat wil zeggen: dat bij de eerste 36 spelletjes het balletje geen enkele keer op nummer 0 belandt).

d. Een andere gokker gaat met jou de weddenschap aan dat bij de eerste k spelletjes het balletje ten minste één keer op nummer 0 belandt. Bereken voor welke waarden van k deze weddenschap voor jou gunstig is (dat wil zeggen: de kans dat je deze weddenschap wint is groter dan $\frac{1}{2}$).

18 Je gooit met een dobbelsteen.

a. Als je stopt zodra er een 'zes' verschijnt, wat is dan de kans dat je vijf keer moet gooien?

b. Als je stopt zodra er een 'zes' voor de tweede keer verschijnt, wat is dan de kans dat je tien keer moet gooien?

c. Als je stopt zodra er een 'zes' voor de derde keer verschijnt, wat is dan de kans dat je vijftien keer moet gooien?

Opmerking: De kansverdeling bij b en c heet de negatief-binomiale verdeling *met parameters* $r = 2$ *en* $p = \frac{1}{6}$ *respectievelijk* $r = 3$ *en* $p = \frac{1}{6}$*. De negatief-binomiale verdeling met parameters* $r = 1$ *en* p *is niets anders dan de geometrische verdeling met parameter* p*.*

7.4 De hypergeometrische verdeling

Als bij een kansexperiment bijvoorbeeld een trekking wodt gedaan uit een doos met ballen, is het van belang of dit met of zonder teruglegging gebeurt. Als na elke trekking de getrokken bal wordt teruggelegd, is het experiment steeds gelijk. Als we bij elk experiment slechts letten op een 'succes' (bijvoorbeeld: 'de getrokken bal is rood') of een 'mislukking' ('de getrokken bal is niet rood'), is er sprake van een binomiale verdeling.

Wordt de bal *niet* teruggelegd, of worden er meerdere ballen in één greep getrokken, dan is er sprake van een *hypergeometrische verdeling*.

Beschouw een doos met m rode en $r - m$ niet-rode ballen (dus in totaal r ballen). Definieer de stochast X door

$$X = \text{het aantal rode ballen bij het trekken van } n \text{ ballen zonder teruglegging.}$$

De waardenverzameling van X is $\{0, 1, \ldots, n\}$. De kansverdeling van X heet de *hypergeometrische verdeling*. Deze kansverdeling is vastgelegd door de parameters r (het totale aantal ballen in de doos), m (het aantal rode ballen in de doos) en n (het aantal trekkingen).

De kansdichtheid van X wordt gegeven door

$$p(k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{r-m}{n-k}}{\binom{r}{n}}, \quad \text{voor } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Merk op dat ingeval het aantal trekkingen n groter is dan het aantal rode ballen m, $p(k) = 0$ voor $k > m$. Dit volgt ook uit bovenstaande formule, als we afspreken dat $\binom{m}{k} = 0$ zodra $k > m$. Ook kan $p(k)$ gelijk aan nul zijn voor kleine waarden van k, namelijk voor $k < n - (r - m)$ als $n > r - m$; ga na.

Voor de verwachtigswaarde van een hypergeometrisch verdeelde stochast X geldt:

$$\mathbf{E}(X) = \frac{mn}{r}.$$

19 Iemand kiest op goed geluk vijf verschillende getallen uit de verzameling $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

a. Bereken het verwachte aantal priemgetallen dat op deze wijze wordt gekozen.

b. Wat is de kans dat er ten minste drie priemgetallen worden gekozen?

20 Een voetbalvandaal heeft in een plastic zak vijf beschimmelde sinaasappelen, twee rotte tomaten en één gebarsten ei meegenomen naar een wedstrijd. Tijdens deze wedstrijd graait hij blindelings twee projectielen uit de zak en gooit hiermee naar de scheidsrechter. De stochast X is het aantal sinaasappelen in deze greep.

a. Geef de kansdichtheid van X.

b. Teken het kanshistogram.

c. Bereken de verwachtingswaarde van X.

d. Bereken de kans dat de voetbalvandaal een rotte tomaat en het gebarsten ei uit de zak graait. Is deze kans hetzelfde als $\mathbf{P}(X = 0)$? Verklaar je antwoord.

Bij *steekproeven* gaat het meestal om trekkingen zonder teruglegging. Kansverdelingen zijn dan vaak hypergeometrisch. Hypergeometrische kansen zijn echter moeilijk uit te rekenen zodra de eerste parameter r erg groot is. Echter, bij het trekken van een kleine omvang uit een grote populatie maakt het voor kansen nauwelijks uit of de trekking met of zonder teruglegging is. Dit resultaat formuleren we in de volgende eigenschap:

Bij het nemen van een kleine steekproef uit een grote populatie mag je trekken zonder terugleggen opvatten als trekken met terugleggen. Een hypergeometrisch verdeelde stochast met parameters r, m en n kan dan dus worden opgevat als een binomiaal verdeelde stochast met parameters n en $p = m/r$.

---

21 Een vijver bevat 3000 karpers en 4500 andere vissen. Bulle vangt uit deze vijver negen vissen en neemt ze mee naar huis. We zijn geïnteresseerd in de kans dat Bulle precies drie karpers heeft gevangen.

a. Geef een *precieze uitdrukking* voor deze kans.

b. Geef een *goede benadering* van deze kans.

22 Op de veiling wordt een partij van ongeveer 1000 sinaasappelen aangeboden. In deze partij sinaasappelen zitten zure exemplaren van een mislukte oogst. Van de aangeboden sinaasappelen is 20% zuur. Een groenteman wil op de veiling deze sinaasappelen kopen. Hij proeft er tien. De stochast X is het aantal zure sinaasappelen dat de groenteman aantreft.

a. Leg uit waarom X *niet* binomiaal verdeeld is.

b. De kansverdeling van X is wel te benaderen met een binomiale verdeling. Leg uit waarom en geef de bijbehorende parameters.

c. Bereken de kans dat er minder dan twee van de tien sinaasappelen zuur zijn.

d. Bereken de kans dat er meer dan vier van de tien sinaasappelen zuur zijn.

8 Speciale continue verdelingen

In dit hoofdstuk introduceren we de belangrijkste continue verdelingen: de homogene verdeling, de exponentiële verdeling en de normale verdeling. Andere continue verdelingen zijn bijvoorbeeld de Cauchy-verdeling, de Gamma-verdeling, de Weibull-verdeling en de Bèta-verdeling, die we hier buiten beschouwing laten. Continue verdelingen spelen in de praktijk een rol bij onder meer levensduren, wachttijden, afstanden en meetfouten.

8.1 De homogene verdeling

Definieer de stochast X door

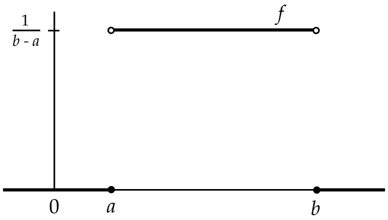
$$X = \text{een blindelings in het interval } [a, b] \text{ gekozen punt.}$$

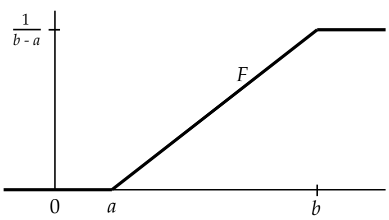
De stochast X kan elke waarde binnen het interval $[a, b]$ aannemen en is dus continu verdeeld. We zeggen dat X een (continu-)homogene verdeling op het interval $[a, b]$ heeft. De kansdichtheid wordt gegeven door de functie

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b.$$

De bijbehorende verdelingsfunctie is

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \leq x \leq b.$$





---

1 Bewijs de volgende twee beweringen.

a. De hierboven gegeven functie f is een kansdichtheid.

b. De hierboven gegeven functie F is de bijbehorende verdelingsfunctie.

2 De stochast X is homogeen verdeeld op $[a, b]$. Bewijs:

$$\mathbf{E}(X) = \tfrac{1}{2}(a+b) \quad \text{en} \quad \mathrm{Var}(X) = \tfrac{1}{12}(b-a)^2.$$

3 Vanaf 7.00 uur 's morgens stopt er elk kwartier een bus bij een bepaalde halte. Als de aankomsttijd van een passagier bij de halte gezien kan worden als een op goed geluk gekozen tijdstip tussen 7.00 en 7.30 uur, wat is dan de kans dat de passagier langer dan tien minuten op een bus moet wachten?

4 Een punt A wordt willekeurig gekozen in het interval $[-1, 1]$. De stochast X is de afstand van A tot het middelpunt 0 van het interval.

a. Bepaal de kansdichtheid en de verdelingsfunctie van X.

b. Bereken $\mathbf{P}(X > \frac{3}{10})$.

5 Een punt X wordt blindelings gekozen in een interval ter lengte t; daardoor wordt het interval in twee deelintervallen gedeeld.

a. Bepaal de kansdichtheid en de verdelingsfunctie van X.

b. Bereken de kans dat het grootste interval meer dan vier keer zo groot is als het kleinste interval.

6 De stochast Y is een blindelings in het interval $[0, 5]$ gekozen punt.

a. Wat is de kansdichtheid en wat is de verdelingsfunctie van Y?

Beschouw de volgende vergelijking in x:

$$4x^2 + 4Yx + Y + 2 = 0.$$

b. Bereken de kans dat deze vergelijking twee reële oplossingen heeft.

7 Bereken de kans dat de vergelijking $x^2 + Bx + C = 0$ twee reële oplossingen heeft, indien

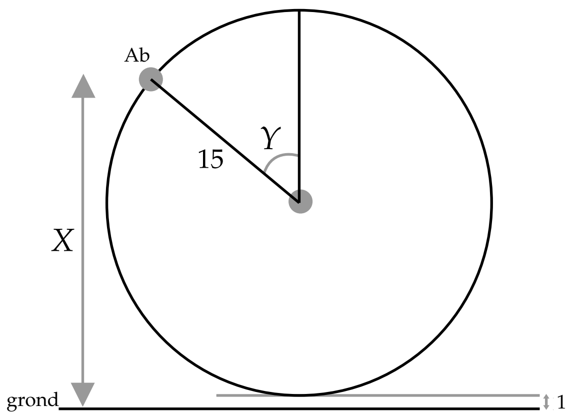
a. B en C blindelings gekozen punten zijn in het interval $[0, 1]$, onafhankelijk van elkaar;

b. B en C blindelings gekozen punten zijn in het interval $[-1, 1]$, onafhankelijk van elkaar;

c. B en C blindelings gekozen punten zijn in het interval $[-a, a]$, onafhankelijk van elkaar ($a > 0$).

8 Ab zit in een reuzenrad dat een diameter heeft van 30 meter. Het laagste punt van het reuzenrad bevindt zich 1 meter boven de grond. Doordat de stroom uitvalt, houdt het reuzenrad plotseling op met draaien.

De stochast X is de hoogte waarop Ab zich bevindt op het moment dat de stroom uitvalt. De stochast Y is de hoek (in radialen) tussen de bovenste helft van de verticale as van het rad, en het lijnsegment van het middelpunt van het rad naar het punt waar Ab zich bevindt. De stochast Y is homogeen verdeeld op $[0, \pi]$.



a. Wat is de kans dat Ab meer dan 16 meter boven de grond tot stilstand komt?

b. Bepaal de verdelingsfunctie en de kansdichtheid van Y.

c. Toon aan dat tussen X en Y het volgende verband bestaat:

$$X = 16 + 15 \cos Y.$$

d. Wat is de waardenverzameling van X?

e. Bepaal de verdelingsfunctie van X.

f. Bereken de kans dat Ab maximaal $23\frac{1}{2}$ meter boven de grond tot stilstand komt.

9 De stochast X is een blindelings in het interval $\langle 0, 1\rangle$ gekozen punt. Verder definiëren we de stochast $Y = X/(1 - X)$.

a. Bepaal de waardenverzameling van Y.

b. Bepaal de verdelingsfunctie en de kansdichtheid van Y, en schets beide grafieken.

c. Bereken $\mathbf{P}(2 < Y < 4)$.

d. Bereken $\mathbf{E}(Y)$.

Tot nu toe hebben we een stochast met een homogene verdeling beschouwd als een willekeurig gekozen punt in een *interval*. In plaats van een interval, kunnen we ook een willekeurig punt op een (tweedimensionaal) *oppervlak* kiezen. Hierover gaan de volgende opgaven. In feite zijn we dergelijke opgaven al eerder tegengekomen, namelijk in hoofdstuk 2, al werd daar geen gebruik gemaakt van stochasten.

---

10 Een punt A wordt willekeurig gekozen binnen een cirkel met straal 1. De stochast X is de afstand van A tot de cirkel.

a. Bepaal de waardenverzameling van X.

b. Bepaal de verdelingsfunctie F van X.

c. Bepaal de kansdichtheid f van X.

d. Bereken $\mathbf{P}(X \leq \frac{1}{4})$ en $\mathbf{P}(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2})$.

e. Bereken $\mathbf{E}(X)$.

De stochast Y is de afstand van A tot het middelpunt van de cirkel.

f. Bepaal de waardenverzameling van Y.

g. Bepaal de verdelingsfunctie G van Y.

h. Bepaal de kansdichtheid g van Y.

i. Bereken $\mathbf{P}(Y \leq \frac{1}{4})$.

j. Bereken $\mathbf{E}(Y)$.

11 Een punt A wordt willekeurig gekozen binnen een rechthoek van 3 bij 2. De stochast X is de afstand van A tot de rechthoek.

a. Bereken $\mathbf{P}(X \leq \frac{1}{2})$.

b. Bereken $\mathbf{E}(X)$.

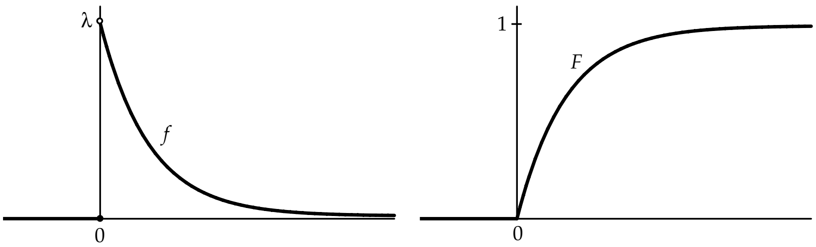
8.2 De exponentiële verdeling

We zeggen dat een stochast X *exponentieel* verdeeld is met parameter $\lambda > 0$ indien de kansdichtheid wordt gegeven door de functie

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

De bijbehorende verdelingsfunctie is

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$



De exponentiële verdeling wordt vaak gebruikt als kanstheoretisch model voor de tijd die verloopt tot zich een zekere zeldzame gebeurtenis, zoals een aardbeving in een bepaald gebied, voordoet. Verder blijken tussentijden van aankomsten bij bijvoorbeeld een loket, en het verval van radioactief materiaal, vaak goed te beschrijven zijn met de exponentiële verdeling.

---

12 Bewijs de volgende twee beweringen.

a. De hierboven gegeven functie f is een kansdichtheid.

b. De functie $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$ is de bijbehorende verdelingsfunctie.

Onder de 'staartkans' wordt verstaan: $\mathbf{P}(X > x)$.

c. Bepaal voor een exponentieel-verdeelde stochast X de staartkans.

13 De stochast X is exponentieel verdeeld met parameter λ.

a. Bewijs dat $-x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}$ een primitieve functie is van $x\mathrm{e}^{-x}$.

b. Bewijs dat $-(x^2 + 2x + 2)\mathrm{e}^{-x}$ een primitieve functie is van $x^2\mathrm{e}^{-x}$.

c. Bereken de verwachting en de variantie van X in het geval $\lambda = 1$.

d. Bewijs:

$$\mathbf{E}(X) = 1/\lambda \quad \text{en} \quad \mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2.$$

14 De tijd die nodig is om een bepaalde machine te repareren, is een exponentieel verdeelde stochast met verwachting 2 uur. Bereken de kans dat de reparatie langer dan 2 uur duurt.

15 De stochast X is exponentieel verdeeld met parameter λ. Bewijs dat $\mathbf{P}(X > s + t | X > s) = \mathbf{P}(X > t)$.

De eigenschap in opgave 15 staat bekend als de *geheugenvrijheid* van de exponentiële verdeling. Als X een levensduur voorstelt, dan betekent deze eigenschap dat de kans om nog t jaar langer te leven gegeven dat men reeds s jaar heeft geleefd, net zo groot is als de kans om überhaupt t jaar te leven. Voor biologische organismen is dit natuurlijk onredelijk. Maar de eerder gegeven voorbeelden van de exponentiële verdeling voldoen wel aan de geheugenvrijheid.

---

16 In een kast staan enkele vazen. De tijd die verstrijkt tot een vaas stukvalt is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van tien jaar. In de kast bevindt zich onder ander andere een vijftig jaar oude vaas en een spiksplinternieuwe vaas.

a. Bereken voor de vijftig jaar oude vaas de kans dat deze binnen twee jaar stukvalt.

b. Bereken voor de nieuwe vaas de kans dat deze binnen twee jaar stukvalt.

17 De stochast X is exponentieel verdeeld met parameter 2.

a. Bepaal de kansdichtheid f_X van X.

b. Bereken $\mathbf{E}(X)$.

De stochast Y is gedefinieerd als $Y = \mathrm{e}^X$.

c. Wat is de waardenverzameling W_Y van Y?

d. Bepaal de verdelingsfunctie F_Y van Y.

e. Bepaal de kansdichtheid f_Y van Y.

f. Bereken $\mathbf{E}(Y)$ via $\int_{W_Y} y \cdot f_Y(y)\mathrm{d}y$.

g. Bereken $\mathbf{E}(Y)$ met de substitutieregel, dat wil zeggen: via $\int_{W_X} \mathrm{e}^x \cdot f_X(x)\mathrm{d}x$.

18 De stochast X is homogeen verdeeld op $\langle 0, 1\rangle$ en de stochast Y wordt gedefinieerd door

$$Y = -\ln X.$$

a. Bepaal de waardenverzameling W_X van X.

Noteer de verdelingsfunctie van X en Y met F respectievelijk G.

b. Bewijs dat voor elke y uit het interval van vraag a geldt: $G(y) = 1 - F(\mathrm{e}^{-y})$.

c. Laat zien dat Y exponentieel verdeeld is door de kansdichtheid g van Y te bepalen. Wat is de parameter van deze exponentiële verdeling?

19 De stochast X is exponentieel verdeeld met $\lambda = 1$. Bepaal de voorwaardelijke kansdichtheid van X gegeven $1 < X < 10$.

8.3 De normale verdeling

De *normale verdeling* komt reeds aan bod in de hoofdstukken kansrekening in de bekende wiskundemethoden. In een toekomstige versie zal deze belangrijke verdeling ook in deze module aan bod komen. Op dit moment bevat deze paragraaf enkel nog maar het *bewijs* dat de kansdichtheid van de normale verdeling inderdaad een kansdichtheid is, dat wil zeggen: de oppervlakte onder de normaalkromme is gelijk aan 1. We zullen dit alleen doen voor de *standaard*-normale verdeling, dat is de verdeling met $\mu = 0$ en $\sigma = 1$. We zeggen dat een stochast Z *standaard-normaal* verdeeld is indien de kansdichtheid wordt gegeven door de functie

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

De verdelingsfunctie van Z wordt met Φ genoteerd:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Voor Φ is echter geen gesloten uitdrukking te geven (van de functie φ bestaat namelijk geen primitieve). Echter, met de grafische rekenmachine kan de oppervlakte van het gebied onder de (standaard-)normaalkromme tussen de verticale lijnen $x = a$ en $x = b$ (voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$) eenvoudig worden berekend; dit is uitgebreid aan bod gekomen in *Moderne Wiskunde*.

Beschouw nu een stochast X met kansdichtheid

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}, \qquad x \in \mathbb{R}. \qquad (\star)$$

We zeggen in zo'n geval dat X een *normale verdeling* heeft met parameters $\mu \in \mathbb{R}$ en $\sigma^2 > 0$. De parameters van de normale verdeling zijn (dus) de *verwachtingswaarde* en de *variantie*.

Dat de bij $(\star)$ vermelde functie inderdaad een kansdichtheid is, heeft te maken met het feit dat de zojuist beschreven stochast X kan worden geschreven als $\sigma Z + \mu$ (met Z standaard-normaal verdeeld); we gaan hier nu echter niet verder op in.

Tot slot tonen we aan dat de functie φ inderdaad een kansdichtheid is. We treden hier niet in detail; we zullen enkele stellingen zonder bewijs vermelden, die nodig zijn bij het bewijs dat φ een kansdichtheid is.

Eerst moeten we iets weten van *dubbelintegralen*. Analoog aan het 1-dimensionale geval (functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) kan men voor vele functies $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de integraal van f over $\mathbb{R}^2$ definiëren ($\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Als $f(x, y)$ een *niet-negatieve* functie is, geldt de volgende stelling (die we niet zullen bewijzen):

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}y.$$

In woorden: de 'dubbelintegraal' mag worden geschreven als een 'herhaalde integraal' waarbij de integratievolgorde er niet toe doet. Met een 'herhaalde integraal' $\int_a^b (\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$ is het volgende bedoeld:

men integreert eerst $f(x,y)$, bij vastgehouden $x \in [a,b]$, naar y over $[c,d]$; er resulteert een functie $\psi(x)$, die over $[a,b]$ wordt geïntegreerd: $\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.

Ook moeten we weten wat *poolcoördinaten* zijn. Meestal leggen we de plaats van een punt t.o.v. de oorsprong vast door een x- en een y-coördinaat. Maar de plaats van een punt is ook vast te leggen door een getal en een hoek. De poolcoördinaten van een punt P krijg je als volgt:

1. Draai de x-as om de oorsprong over een hoek θ zo, dat het beeld door P gaat. De getallenlijn die je krijgt, heet de r-as.

2. Lees af welk getal r bij het punt P op de r-as hoort.

Er geldt:

$$x = r\cos\theta \quad \text{en} \quad y = r\sin\theta.$$

Elk punt kan op oneindig veel verschillende manieren in poolcoördinaten worden geschreven. We kiezen ervoor om een punt zo te schrijven dat geldt: $r \geq 0$ en $\theta \in [0, 2\pi\rangle$.

Soms is het handig om bij een dubbelintegraal over te gaan op poolcoördinaten. De volgende eigenschap (die we niet zullen bewijzen) geldt:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{[0,\infty\rangle \times [0,2\pi\rangle} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Deze eigenschap blijkt handig te zijn om de (niet-negatieve!) functie $f(x,y) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ te integreren:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{[0,\infty\rangle \times [0,2\pi\rangle} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^\infty r\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r^2}\mathrm{d}r \Big)\mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

(Bedenk dat een primitieve van $r\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r^2}$ gewoon bestaat!)

Omdat we anderzijds voor de integraal van f ook kunnen schrijven:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}y \Big)\mathrm{d}x = \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \Big)^2,$$

zien we dat

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi},$$

en dat dus

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = 1,$$

waarmee is aangetoond dat de functie φ een kansdichtheid is.

9 Buffons naaldexperiment en varianten

Het naaldexperiment van Buffon

Variant A: gebroken naalden

Variant B: een schaakbordpatroon

Variant C: een balexperiment

Appendix A: Combinatoriek

Veel combinatorische problemen kunnen geherformuleerd worden in termen van het doen van *trekkingen uit een doos met al dan niet genummerde ballen*. Als je wilt weten hoeveel uitkomsten er zijn bij drie worpen met een dobbelsteen, kun je doen alsof je drie keer trekt uit een doos met zes genummerde ballen. Als je geïnteresseerd bent in het aantal manieren waarop twintig mensen op verschillende dagen jarig kunnen zijn, kun je doen alsof je twintig maal trekt uit een doos met 365 genummerde ballen. Met deze voorbeelden is het duidelijk dat we nog wel moeten aangeven of een getrokken bal vóór de volgende trekking in de doos wordt teruggelegd of dat dit niet het geval is; we spreken van *trekkingen met* en *trekkingen zonder teruglegging*. Verder moeten we afspreken of we al dan niet letten op de volgorde waarin de ballen worden getrokken; we onderscheiden *trekkingen met* en *trekkingen zonder* (in achtneming van de) *volgorde*. Aldus zijn er vier soorten trekkingen; in elk van de gevallen geven we hieronder de telregels, zonder bewijs. Daarbij geven we het aantal trekkingen aan met n, en stellen we het aantal ballen in de doos gelijk aan r ($r \geq n$ bij trekking zonder teruglegging).

Trekking met teruglegging en met volgorde

Het aantal manieren om r ballen te trekken uit een doos met n ballen, waarbij na elke trekking de getrokken bal wordt teruggelegd en waarbij de volgorde van belang is, is gelijk aan

$$\text{het aantal } \textit{herhalingsvariaties} \text{ van } r \text{ uit } n = n^r.$$

Voorbeeld 1 Aad maakt een driekeuzetoets die uit tien vragen bestaat. Op hoeveel manieren kan hij het antwoordformulier invullen?

Oplossing Voor elk van de tien vragen zijn er drie alternatieven (A, B en C). We gebruiken het model met teruglegging, want nadat vraag 1 met (bijvoorbeeld) alternatief A wordt beantwoord, kan vraag 2 opnieuw met alternatief A worden beantwoord. Verder is de volgorde van belang, want (bijvoorbeeld) de rijtjes AAAACCCCBB en BBACACACAC zijn, ondanks het even vaak voorkomen van de alternatieven A, B en C, verschillend. Het aantal manieren om het antwoordformulier in te vullen, is dus gelijk aan het aantal herhalingsvariaties van tien uit drie: $3^{10} = 59.049$.

Trekking zonder teruglegging en met volgorde

Het aantal manieren om r ballen te trekken uit een doos met n ballen, waarbij na elke trekking de getrokken bal terzijde wordt gelegd en waarbij de volgorde van belang is, is gelijk aan

$$\text{het aantal } \textit{variaties} \text{ van } r \text{ uit } n = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) = \binom{n}{r} r!.$$

Het aantal variaties van r uit n wordt soms genoteerd als nPr; de letter P staat hier voor *permutatie*, een woord dat ook wel voor *variatie* wordt gebruikt, al betekent een *permutatie* strikt genomen een rangschikking van álle n elementen, dus een variatie van n uit n:

$$\text{het aantal } \textit{permutaties} \text{ van } n = n!.$$

Voorbeeld 2 Een club bestaat uit twintig leden. Op hoeveel manieren kan een bestuur van drie personen worden aangewezen als eerst de voorzitter, dan de secretaris en ten slotte de penningmeester wordt gekozen?

Oplossing We gebruiken het model zonder teruglegging, omdat een lid niet twee functies kan hebben. Verder is de volgorde van belang, omdat het om drie verschillende functies gaat. Het aantal manieren om het bestuur te vormen, is dus gelijk aan het aantal variaties van drie uit tien: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Voorbeeld 3 Op hoeveel manieren kunnen vijf jongens in een rij gaan staan?

Oplossing Het gaat hier om het aantal permutaties van vijf: $5! = 120$.

Trekking zonder teruglegging en zonder volgorde

Het aantal manieren om r ballen te trekken uit een doos met n ballen, waarbij na elke trekking de getrokken bal terzijde wordt gelegd en waarbij de volgorde niet van belang is, is gelijk aan

$$\text{het aantal } \textit{combinaties} \text{ van } r \text{ uit } n = \binom{n}{r}.$$

Dit model is gelijk aan het trekken van r ballen uit een doos met n ballen in één greep.

Het aantal combinaties van r uit n wordt soms genoteerd als nCr.

Voorbeeld 4 Onder de 25 leerlingen van een klas worden drie abonnementen op het tijdschrift *Pythagoras* verloot. Op hoeveel manieren kunnen deze abonnementen onder de leerlingen worden verdeeld?

Oplossing We gebruiken hier het model zonder teruglegging en zonder volgorde, dus het gaat om het aantal combinaties van drie uit vijfentwintig: $\binom{25}{3} = 2300$.

Trekking met teruglegging en zonder volgorde

Het aantal manieren om r ballen te trekken uit een doos met n ballen, waarbij na elke trekking de getrokken bal wordt teruggelegd en waarbij de volgorde niet van belang is, is gelijk aan

$$\binom{n+r-1}{r}.$$

Voorbeeld 5 Bij een ijssalon kun je een coupe bestaande uit drie bolletjes nemen. Je kunt kiezen uit tien smaken; je mag een smaak ook vaker kiezen.

Oplossing We gebruiken hier het model met teruglegging (een smaak mag je immers vaker kiezen) en zonder volgorde (de ijsjes 'citroen-citroen-vanille' en 'vanille-citroen-citroen' zijn immers hetzelfde). Het aantal mogelijke ijsjes met drie bolletjes is dus $\binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3} = 220$.

Appendix B: Analyse

In de onderstaande tabel staan van veel voorkomende functies de afgeleiden, de primitieven (met integratieconstante 0) en de inverse functies.

$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$	$f^{-1}(x)$
x^a	ax^{a-1}	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$ $(a \neq -1)$	$x^{1/a}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$	x^2
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x	e^x	$\ln x$
g^x $(g > 0, g \neq 1)$	$g^x \cdot \ln g$	$\frac{g^x}{\ln g}$	${}^g\!\log x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x \ln x - x$	e^x
${}^g\!\log x$ $(g > 0, g \neq 1)$	$\frac{1}{x \ln g}$	$\frac{x \ln x - x}{\ln g}$	g^x
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$	$\arcsin x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\arccos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\arctan x$

Hoofdstelling van de analyse:

$$F'(x) = f(x)$$

Hoofdstelling van de integraalrekening:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Oneigenlijke integralen:

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Appendix C: Reeksen

Het binomium van Newton:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n,$$

in het bijzonder:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k = (1+r)^n.$$

Voor de rekenkundige rij $a, a+v, a+2v, a+3v, \ldots$ geldt

$$\sum_{k=0}^{n} a + kv = \tfrac{1}{2}(n+1)(2a+nv),$$

in woorden: $\frac{1}{2}\times$ aantal termen $\times$ (eerste term + laatste term).

Voor de meetkundige rij $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ $(r \neq 1)$ geldt

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a \cdot \frac{1-r^{n+1}}{1-r};$$

de reeks is convergent als $|r| < 1$, in welk geval

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r} \qquad \text{en} \qquad \sum_{k=m}^{\infty} ar^k = \frac{ar^m}{1-r}.$$

Algemener geldt dat

$$\sum_{k=m}^{n} ar^k = a \cdot r^m \cdot \frac{1-r^{n-m+1}}{1-r}$$

(merk op dat de exponent $n-m+1$ juist het aantal te sommeren termen is).

Tot slot geven we nog de volgende reeksen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2} \qquad \text{voor } |r| < 1.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.$$

Appendix D: Verzamelingenleer

Voor een *getallenverzameling* bestaan verschillende notaties:
- door de elementen van de verzameling *op te sommen* tussen accolades;
  zo is $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de verzameling van alle mogelijke uitkomsten van een worp met een dobbelsteen.
- door een opsomming tussen accolades te *suggereren*;
  zo is $\{1, 2, 3, \dots\}$ de verzameling van alle positieve gehele getallen.
- door een *voorwaarde* te vermelden waaraan de elementen van de verzameling moeten voldoen;
  zo is $\{k \mid k > 0$ en een veelvoud van $3\}$ de verzameling van alle positieve drievouden;
  bij deze notatie wordt achter de verticale streep de voorwaarde vermeld.
- door middel van een *interval*; zie hieronder. Welke notatie voor een zekere verzameling wordt gehanteerd, hangt af van de aard van die verzameling. Vaak zijn er meerdere notaties voor één en dezelfde verzameling mogelijk; zo kan de hierboven genoemde verzameling $\{k \mid k > 0$ en een veelvoud van $3\}$ eveneens als volgt worden genoteerd: $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$.

Dat het object a een element is van de verzameling V, wordt genoteerd als $a \in V$. De ontkenning hiervan, a is geen element van V, wordt genoteerd als $a \notin V$. Verder zeggen we dat V een *deelverzameling* is van een verzameling W indien elk element van V ook een element van W is, notatie: $V \subset W$, of $W \supset V$.

Sommige verzamelingen komen zo vaak voor, dat er speciale notaties voor zijn:
$\mathbb{N} = \{\, 0, 1, 2, 3, \dots\}$: de verzameling der *natuurlijke* getallen;
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: de verzameling der *gehele* getallen;
$\mathbb{Q} = \{\frac{t}{n} \mid t, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$: de verzameling der *rationale* getallen, ofwel: de verzameling der *breuken*;
$\mathbb{R} = \langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$: de verzameling der *reële* getallen.

De verzameling $\mathbb{Z}$ wordt hierboven genoteerd door een opsomming te suggereren, maar kan ook als volgt worden genoteerd: $\mathbb{Z} = \{m - n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.
Zoals hierboven opgemerkt, wordt de verzameling van alle reële getallen aangeduid met $\mathbb{R}$. Onder een *interval* verstaan we een verzameling van reële getallen die correspondeert met een aaneengesloten deel van $\mathbb{R}$. We onderscheiden de volgende soorten intervallen (waarbij steeds $a < b$):
- $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (begrensd open interval);
- $\langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (begrensd halfopen interval);
- $[a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (begrensd halfopen interval);
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (begrensd gesloten interval);
- $\langle a, \rightarrow \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ (onbegrensd open interval);
- $[a, \rightarrow \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ (onbegrensd halfgesloten interval);
- $\langle \leftarrow, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ (onbegrensd open interval);
- $\langle \leftarrow, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ (onbegrensd halfgesloten interval).

Een *eindige* verzameling is een verzameling met slechts eindig veel elementen. Een *oneindige* verzameling is een verzameling met oneindig veel elementen; hierbij onderscheiden we twee gevallen: de *aftelbare* verzamelingen en de *overaftelbare* verzamelingen.

Een (oneindige) verzameling V heet *aftelbaar* indien je de elementen door middel van de natuurlijke getallen kunt *aftellen*; je kunt ze *op een rij zetten*: $V = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

De verzameling $\mathbb{Z}$ der gehele getallen kan als volgt worden afgeteld:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}.$$

Ook de verzameling $\mathbb{Q}$ der rationale getallen kunnen we een aftelling geven:

$$\mathbb{Q} = \{0, 1, -1, 2, -2, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 3, -3, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, 4, -4, \ldots\}$$

(hoe gaat het verder?). We concluderen: $\mathbb{Q}$ is aftelbaar.

De verzameling $\mathbb{R}$ der reële getallen is echt omvangrijker dan $\mathbb{Q}$, zo is $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; dit kun je *uit het ongerijmde* bewijzen. De verzameling $\mathbb{R}$ kunnen we *geen* aftelling geven; de wiskundige Georg Cantor (1845-1918) bewees dit; zijn bewijs (eveneens uit het ongerijmde) staat bekend als *Cantors diagonaalargument*. We zeggen dat $\mathbb{R}$ *overaftelbaar* is; overigens is élk interval overaftelbaar.

In de kansrekening spelen de begrippen eindig, aftelbaar en overaftelbaar een rol bij het vaststellen of een stochast *discreet* of *continu* verdeeld is. Indien de waardenverzameling van een stochast X *eindig* of *aftelbaar* is, is X *discreet* verdeeld. Verder kun je ruwweg zeggen dat X *continu* is verdeeld indien de waardenverzameling *overaftelbaar* is.

Appendix E: Meetkunde

Definities. Het *eenheidsinterval* is het interval $[0, 1]$, het *eenheidsvierkant* is het vierkant in het vlak met hoekpunten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ en $(0, 1)$, de *eenheidscirkel* is de cirkel in het vlak met middelpunt $(0, 0)$ en straal 1.

Oppervlakte en omtrek cirkel. Een cirkel met straal r heeft oppervlakte πr^2 en omtrek $2\pi r$.

Oppervlakte en inhoud bol. Een bol met straal r heeft oppervlakte $4\pi r^2$ en inhoud $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Stelling van Pythagoras. In een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden a en b en hypotenusa c geldt: $a^2 + b^2 = c^2$.

Stelling van Thales. Voor een driehoek ABC geldt:
$\triangle ABC$ is rechthoekig in C $\Leftrightarrow$ C ligt op de cirkel met middellijn AB.

Driehoeksongelijkheid. Voor een driehoek met zijden a, b en c geldt: $a + b > c$, $a + c > b$ en $b + c > a$.