Antwoorden bij "Inleiding in de Statistiek"

Hoofdstuk 1

1.1 model: $X \sim bin(n, p), p \in [0, 1]$, schatting: X/n

1.2 (i) X_i bloeddrukverandering i^e persoon in treatment groep, Y_j bloeddrukverandering j^e persoon in controlegroep, model: $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ o.o., $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

(ii) schatting: $\overline{x}_n - \overline{y}_m$

1.3 (i) model: $X \sim$ Hypergeometrisch(N, r, n) met $N \geq \max(r, n)$

(ii) schatting: $\frac{rn}{X}$

(iii) model: $X \sim bin(n, \frac{r}{N})$ met $N \geq \max(r, n)$, schatting: $\frac{rn}{X}$

1.4 (i) model: $X \sim$ Negatief binomiaal$(3, p)$ met $p \in (0, 1]$

(ii) schatting: $\frac{3}{50}$

1.5 (i) X_{ij} is aantal klanten in week i op dagdeel j met j 11 mogelijkheden. Model: $X_j \sim$ Poisson(θ_{ij}) o.o. met $\theta_{ij} > 0$

(ii) schatting: $\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_{ij}$ met j corresponderend met maandagmiddag

1.8 te groot

1.9 niet goed, schatting is te klein

Hoofdstuk 2

2.3 (i) ja

(ii) als $Y \sim F_{a,b}$ dan $b = \sqrt{\text{var}(Y)}$ en $a = \text{E}Y - \sqrt{\text{var}(Y)}$

2.4 (i) $F(x) = \frac{x+3}{5} 1_{-3<x<2} + 1_{x \geq 2}$

(ii) $F^{-1}(\alpha) = -3 + 5\alpha$

2.5 (i) $F(x) = \frac{x^2}{\theta^2} 1_{0<x<\theta} + 1_{x \geq \theta}$

(ii) $F^{-1}(\alpha) = \theta\sqrt{\alpha}$

2.6 $y = 2 + 4x$

2.7 $y = 2 + 2x/3$

2.10 0

2.12 $1/\sqrt{2}$

Hoofdstuk 3

3.2 $c = \frac{n+2}{n+1}$

3.3 (i) $c = 1$

(ii) $c^2 \frac{p(1-p)}{n} + p^2(c-1)^2$

(iii) $c = \frac{pn}{1-p+pn}$, niet bruikbaar

(iv) $c \to 1$

3.4 (i) nee

(ii) vele mogelijkheden, bijv. $\overline{X}^2 - \overline{X}/n$

3.5 (ii) $(\sum_{i=1}^m X_i + \sum_{j=1}^n Y_j)/(m+n)$

3.6 (i) $p_M = \frac{2}{3}p$ en $p_V = \frac{4}{3}p$, $\text{MSE}(p, (X+Y)/100) = \frac{p}{100} - \frac{p^2}{90}$

(ii) $\text{MSE}(p, Z/100) = \frac{p}{100} - \frac{p^2}{100}$

(iii) $(X+Y)/100$ is beter.

3.8 $\overline{X}$

3.9 (i) $\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^a}$

(ii) $\frac{\sum_{i=1}^n x_i^a}{n}$

3.10 (i) $\frac{\theta}{\theta+1}$

(ii) $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(X_i)}$, en $\widehat{\frac{\theta}{\theta+1}} = \frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}+1}$

3.11 $1/\overline{Y}$

3.12 (i) $X_{(1)}$

(ii) nee

(iii) $\text{MSE}(\theta; X_{(1)}) = \frac{\theta^2}{(n-1)(n-2)}$

3.14 $\left(\overline{X}, \overline{Y}, \frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^m (X_i - \overline{X})^2 + \sum_{j=1}^n (Y_j - \overline{Y})^2\right]\right)$

3.16 $X_{(1)}$

3.17 (i) hypergeom(N,r,n)

(ii) $\lfloor \frac{rn}{x} \rfloor$ (afronden naar integer naar beneden)

3.18 (i) $\text{bin}(n, F(x))$

(ii) ja

(iii) $\frac{F(x)(1-F(x))}{n}$

3.20 (i) $\overline{X}^2$

(ii) $\overline{X}^2$

(iii) $\frac{n}{n+1}\overline{X}^2$

3.21 $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \overline{X}$ in beide gevallen

3.22 (i) $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \overline{X}$

(i) zuiver is bijvoorbeeld $\frac{n}{n-1}\overline{X}^2 - \frac{\overline{X}}{n-1}$

3.23 $\hat{p} = \frac{1}{\overline{X}}$

3.24 $\frac{\overline{X}+1}{\overline{X}}$

3.25 (i) $\frac{3}{2}\overline{X}$

(iii) $\left(\frac{3}{2}\overline{X}\right)^2$

(iv) zuiver is bijvoorbeeld $\frac{18n}{8n+1}\overline{X}^2$

3.26 (i) $2\overline{X} - 1$

(ii) $X_{(n)}$

3.27 (i) $(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) = (X_{(1)}, X_{(n)})$

(ii) $(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) = (\bar{X} - \sqrt{\frac{3}{2}\overline{X}^2 - 3\overline{X^2}}, \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{2}\overline{X}^2 - 3\overline{X^2}})$

3.28 (i) $\max(|X_{(1)}|, X_{(n)})$

(ii) $\sqrt{3\overline{X^2}}$

3.31 (i) θ

(ii) de steekproefmediaan: $\mathrm{med}(X_1, \ldots, X_n)$

(iii) $\overline{X}$

3.33 (i) $\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$

(ii) $\frac{-n}{\sum_{i=1}^n log X_i}$

(iii) op basis van $\Gamma(n+1, 1 - \sum_{i=1}^n \log X_i)$ a posteriori dichtheid: $\frac{n+1}{1-\sum_{i=1}^n \log X_i}$

3.34 (ii) op basis van $\Gamma(n+r, \lambda + \sum_{i=1}^n |X_i|)$ a posteriori dichtheid: $\frac{n+r}{\lambda+\sum_{i=1}^n |X_i|}$

3.35 Bèta$(\alpha + r, \beta + x - r)$

3.36 $\frac{n-1}{n-2}\frac{X_{(n)}^{-(n-2)}-M^{-(n-2)}}{X_{(n)}^{-(n-1)}-M^{-(n-1)}}$

3.37 (i) op basis van $\Gamma(X+1,\lambda+1)$ a posteriori dichtheid: $\frac{X+1}{\lambda+1}$

(ii) op basis van $\Gamma(X+\alpha,\lambda+1)$ a posteriori dichtheid: $\frac{X+\alpha}{\lambda+1}$

3.38 op basis van $\Gamma(\alpha+n,\lambda+\sum_{i=1}^n X_i^2)$ a posteriori dichtheid: $\frac{\alpha+n}{\lambda+\sum_{i=1}^n X_i^2}$

3.39 op basis van een normale a posteriori dichtheid: $\frac{\tau^2\sum_{i=1}^n X_i}{n\tau^2+1}$

3.40 (i) Bèta$(\alpha+\sum_{i=1}^n X_i, n+\beta-\sum_{i=1}^n X_i)$

(ii) $\frac{\alpha+\sum_{i=1}^n X_i}{\alpha+\beta+n}$ en $\frac{(\alpha+\sum_{i=1}^n X_i)(n+\beta-\sum_{i=1}^n X_i)}{(\alpha+\beta+n)(\alpha+\beta+n+1)}$

Hoofdstuk 4

Nummering eerste druk

4.1 $X_1,\dots,X_n \sim N(\mu,\sigma^2)$, $H_0:\mu=125$ versus $H_1:\mu\neq 125$. (Een andere mogelijke hypothese is: $H_0:\mu\geq 125$ versus $H_1:\mu<125$.)

4.3 (i) $X\sim bin(n_j,p_j)$ met n_j de grootte van de steekproef onder jongens, p_j de fractie jongens die wiskunde kiest, $Y\sim bin(n_m,p_m)$ met n_m de grootte van de steekproef onder meisjes, p_m de fractie meisjes die wiskunde kiest. H_0 : $p_j\leq p_m$ versus $H_1:p_j>p_m$.

4.4 $Y\sim N(\alpha+\beta x_1+\gamma x_2,\sigma^2)$. $H_0:\beta=0$ versus $H_1:\beta\neq 0$.

4.6 (i) $H_0:\mu\leq 200$ versus $H_1:\mu>200$ (a): H_0 niet verwerpen, (b): H_0 verwerpen

(ii) $H_0:\mu\leq 220$ versus $H_1:\mu>220$ (a): H_0 niet verwerpen, (b): H_0 verwerpen

4.7 $X_1,\dots,X_{100}\sim N(\mu,1)$, $H_0:\mu\geq 50$ versus $H_1:\mu<50$. H_0 wordt verworpen.

4.8 (i) $K=\{x:\sqrt{n}\frac{\overline{X}-0}{\sigma}\geq 1.64\}=\{x:\overline{X}\geq 0.66\}$

(ii) nee, H_0 niet verwerpen

(iii) $\pi(0.5;K)=0.34$

(iv) 0.058

4.9 (i) H_0 verwerpen

(ii) 0.0008

4.11 (i) $X\sim bin(25,p)$, $p\in[0,1]$, $H_0:p\geq 0.6$ versus $H_1:p<0.6$, $T=X$, $K=\{17,\dots,25\}$

(ii) 0.055

(iii) 0.27

(iv) 0.12

(iv) nee, H_0 niet verwerpen bij beide waarden van α_0.

4.12 (i) $T = X$, $K = \{20, \ldots, 25\}$

(ii) $\pi(0.6; K) = 0.034$, $\pi(0.7; K) = 0.19$, $\pi(0.8; K) = 0.60$, $\pi(0.9; K) = 0.98$ met normale benadering

(iii) 0.034 met normale benadering

4.13 (i) $e = 59$, $K = \{59, 60, \ldots, 100\}$

(ii) gelijk

4.14 (i) $X \sim bin(n, p)$ met $n = 250$

(ii) $H_0 : p \geq 0.035$ vs $H_1 : p < 0.035$

(iii) $K = \{0, 1, 2, 3\}$

(iii) 0.13

(iii) meer waarnemingen

4.15 $n \geq 213$

4.16 $n \geq 35$

4.17 $n \geq 263$

4.19 $\alpha \geq 0.215$

4.20 (i) $X \sim bin(n, p)$ met $n = 1000$, $H_0 : p \leq 0.9$ vs $H_1 : p > 0.9$

4.21 (i) $T = \sum_{i=1}^{n} W_i \sim bin(n, p)$, tweezijdige binomiale toets

(ii) $T = \sqrt{n}\frac{\overline{Z}-0}{S_Z}$, tweezijdige t-toets met $K_T = (-\infty, -\xi_{\alpha_0/2}] \cup [\xi_{\alpha_0/2}, \infty)$

(iv) dat kan zonder fouten, omdat de tweede toets een hoger onderscheidend vermogen heeft dan de eerste, als de normaliteitsaanname correct is.

4.22 $T = X_{(1)}$ met $K_T = (-\infty, -\frac{\log 0.9}{n}]$

4.27 $\mathrm{MSE}(\sigma^2; T_c) = \sigma^4(\frac{2c^2}{n-1} + (c-1)^2)$, minimaal voor $c = \frac{n-1}{n+1}$.

4.28 $X \sim \chi^2_k$ en $Y \sim \chi^2_l$ dan $X + Y \sim \chi^2_{k+l}$

4.29 $T = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$, $K_T = [F_{m-1,n-1;1-\alpha_0}, \infty)$

4.30 (i) $T = \frac{S_X^2}{2S_Y^2}$, $K_T = [0, F_{24,15;0.01}] = [0, 0.346]$. H_0 niet verwerpen

(ii) 0.0728

4.34 $T = \sqrt{5}\frac{\overline{X}-800}{S_X}$, $K_T = (-\infty, t_{4,0.05}] = (-\infty, -2.13]$, H_0 niet verwerpen.

4.35 (i) $X_1, \ldots X_{20} \sim N(\mu, \sigma^2)$ i.i.d. $H_0 : \mu = 3585$ versus $H_1 : \mu \neq 3585$. De toets: $T = \sqrt{20}\frac{\overline{X}-3585}{S_X}$, $K_T = (-\infty, t_{19,0.025}] \cup [t_{19,0.975}, \infty) = (-\infty, -2.09] \cup [2.09, \infty)$, H_0 niet verwerpen.

(ii) $p \approx 2 \times (1 - 0.6368) = 0.73 > 0.05$ op basis van de normale tabel. Conclusie: niet verwerpen

4.36 $T = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_{X,Y}\sqrt{\frac{1}{20}+\frac{1}{32}}}$, $K_T = (-\infty, t_{50,0.025}] \cup [t_{50,0.975}, \infty) = (-\infty, -2.01] \cup [2.01, \infty)$, H_0 verwerpen, B is beter.

4.37 $T = \sqrt{10}\frac{\overline{Z}-0}{S_Z}$, $K_T = (-\infty, t_{9,0.05}] = (-\infty, -1.83]$, H_0 niet verwerpen.

4.38 methode (2)

4.39 (i) $T = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_{X,Y}\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}}$, $K_T = (-\infty, t_{10,0.05}] \cup [t_{10,0.95}, \infty) = (-\infty, -1.81] \cup [1.81, \infty)$, H_0 niet verwerpen

(ii) $T = \sqrt{6}\frac{\overline{Z}-0}{S_Z}$, $K_T = (-\infty, t_{5,0.05}] \cup [t_{5,0.95}, \infty) = (-\infty, -2.02] \cup [2.02, \infty)$, H_0 verwerpen, B gaat langer mee.

4.40 (i) $T = \sqrt{12}\frac{\overline{X}-150}{S_X}$, $K_T = (-\infty, t_{11,0.05}] = (-\infty, -1.80]$, H_0 verwerpen

(ii) tweesteekproeven t-toets met $T = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_{X,Y}\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}}}$, $K_T = (-\infty, t_{20,0.05}] = (-\infty, -1.72]$, H_0 niet verwerpen

4.41 (i) $H_0 : \mu \leq 10$ versus $H_1 : \mu > 10$. De toets: $T = \sqrt{10}\frac{\overline{X}-10}{\sigma}$, $K_T = [\xi_{0.95}, \infty) = [1.64, \infty)$, H_0 niet verwerpen.

(ii) $n \geq 39$

4.42 Gepaarde t-toets, $T = \sqrt{20}\frac{\overline{Z}-0}{S_Z}$, $K_T = (-\infty, t_{19,0.005}] \cup [t_{19,0.995}, \infty) = (-\infty, -2.86] \cup [2.86, \infty)$, H_0 verwerpen, p-waarde tussen $2 \times 0.005 = 0.01$ en $2 \times 0.001 = 0.002$.

4.45 1/3

4.47 (i) $\lambda_n = 1$ als $X_{(1)} \leq 0$ en $\lambda_n = \exp(nX_{(1)})$ als $X_{(1)} > 0$

(ii) $2\log\lambda = 2n\max(X_{(1)}, 0)$. Als $\theta < 0$: limietverdeling is gedegenereerd in 0. Als $\theta = 0$: limiet verdeling is exp(1/2). Als $\theta > 0$: verdelingsfunctie convergeert naar 0 voor eindige x.

4.48 (i) $\lambda_n = 1$ als $\theta_0 \geq X_{(n)}$ en $\lambda_n = \infty$ als $\theta_0 < X_{(n)}$.

(ii) $\lambda_n = \theta_0^n / X_{(n)}^n$ als $\theta_0 \geq X_{(n)}$ en $\lambda_n = \infty$ als $\theta_0 < X_{(n)}$.

4.49 (i) $\lambda_n = \left(\frac{\overline{X}}{\theta_0}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i} \exp(-n\overline{X} + n\theta_0)$

(ii) χ^2_1

4.50 (i) $\lambda_n = \left(\frac{n}{\theta_0 \sum_{i=1}^n X_i^2}\right)^n \exp(-(\frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i^2} - \theta_0)\sum_{i=1}^n X_i^2)$

(ii) $K = \{(X_1, \dots, X_n) : 2\log\lambda_n \geq \chi^2_{1,1-\alpha_0}\}$

Hoofdstuk 5

5.1 [17.42, 19.80]

5.2 [17.32, 19.90]

5.3 (i) $\mu - \nu = \overline{X} - \overline{Y} \pm \sigma\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\xi_{1-\alpha/2}$

(ii) $\mu - \nu = \overline{X} - \overline{Y} \pm S_X\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}t_{m+n-2,1-\alpha/2}$

5.4 pivot $T = \frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$, interval $[\frac{(n-1)S_X^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S_X^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}]$

5.5 [0.27,0.46]

5.6 pivot $T = \frac{S_Y^2/\tau^2}{S_X^2/\sigma^2} \sim F_{n-1,m-1}$, interval $[\frac{S_X^2}{S_Y^2}F_{n-1,m-1;\alpha/2}, \frac{S_X^2}{S_Y^2}F_{n-1,m-1;1-\alpha/2}]$

5.7 (i) pivot $T = \sum_{i=1}^n \lambda X_i \sim \text{Gamma}(n,1)$, interval$\left[\frac{\Gamma_{n,1;\alpha/2}}{\sum_{i=1}^n X_i}, \frac{\Gamma_{n,1;1-\alpha/2}}{\sum_{i=1}^n X_i}\right]$

(ii) $\lambda = \frac{1}{\overline{X}} \pm \frac{1}{\sqrt{n}\overline{X}}\xi_{1-\alpha/2}$

5.8 (i) exact interval op basis van toets: $[0.40, 1.44]$

(ii) benaderend interval: $\overline{X} \pm \sqrt{\frac{\overline{X}}{10}}\xi_{1-\alpha/2} = [0.33, 1.27]$

5.9 (ii) $[\frac{1}{2\sum_{i=1}^n X_i^2}\chi^2_{2n,\alpha/2}, \frac{1}{2\sum_{i=1}^n X_i^2}\chi^2_{2n,1-\alpha/2}]$

5.11 (i) $\frac{1}{p^2(1-p)}$

(ii) $\frac{\overline{X}^3}{\overline{X}-1}$

(iii) $p = \frac{1}{\overline{X}} \pm \sqrt{\frac{\overline{X}-1}{n\overline{X}^3}}\xi_{1-\alpha/2}$

(iv) $[0.30, 0.50]$

5.12 (i) $\frac{1}{p(1-p)}$

(ii) $\frac{1}{\overline{X}(1-\overline{X})}$

(iii) $p = \overline{X} \pm \sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}\xi_{1-\alpha/2}$

(iv) $[0.23, 0.41]$

5.13 (i) $\frac{2}{\overline{X}}$

(ii) $i_\theta = \frac{2}{\theta^2}$, $i_{\hat{\theta}} = \frac{\overline{X}^2}{2}$

(iii) $\widehat{i_\theta} = \frac{\overline{X}^2}{2}$

(iv) $\theta = \frac{2}{\overline{X}} \pm \sqrt{\frac{2}{n\overline{X}^2}}\xi_{1-\alpha/2}$

5.14 (i) $\hat{\lambda} = \frac{\overline{X}}{2}$

(ii) $\lambda = \frac{\overline{X}}{2} \pm \frac{\overline{X}}{2\sqrt{2n}}\xi_{1-\alpha/2}$

5.15 (i) exact interval op basis van toets: $[0.51, 0.87]$

(ii) benaderend interval: $\overline{X} \pm \sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}\xi_{1-\alpha/2} = [0.54, 0.9]$

5.16 (i) $\hat{\theta} = \frac{2}{\overline{X}}$ en $\lambda_n = \left(\frac{2}{\theta_0\overline{X}}\right)^{2n} \exp(-2n + \theta_o \sum_{i=1}^n X_i)$

(ii) $\{\theta : -2n\log 2 + 2n\log(\theta\overline{X}) + 2n - \theta\sum_{i=1}^n X_i \geq -\frac{1}{2}\chi^2_{1,1-\alpha}\}$

5.17 (i) $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \sqrt{X_i}} = \frac{1}{\overline{\sqrt{X}}}$

(ii) $\lambda_n = \left(\theta_0\overline{\sqrt{X}}\right)^{-n} \exp(-n + \theta_0 \sum_{i=1}^n \sqrt{X_i})$

(iii) $\{\theta : n\log\left(\theta\overline{\sqrt{X}}\right) + n - \theta\sum_{i=1}^n \sqrt{X_i} \geq -\frac{1}{2}\chi^2_{1,1-\alpha}\}$

5.18 $\hat{\theta} = \frac{1}{2}\overline{X} + \frac{1}{2n}\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 + 4n\sum_{i=1}^n X_i^2}$, $\lambda_n = \frac{\frac{1}{\hat{\theta}^n}\exp(-\frac{1}{2\hat{\theta}^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\hat{\theta})^2)}{\frac{1}{\theta_0^n}\exp(-\frac{1}{2\theta_0^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\theta_0)^2)}$, met bti:

$\{\theta : -n\log\theta - \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\theta)^2 + n\log\hat{\theta} + \frac{1}{2\hat{\theta}^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\hat{\theta})^2 \geq -\frac{1}{2}\chi^2_{1,1-\alpha}\}$

5.19 (i) pivot $\sum_{i=1}^n \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{50}$, bti: $\left[\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{50,0.975}}, \frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{50,0.025}}\right] = [3.36, 7.42]$

(ii) pivot $\sum_{i=1}^n \frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{49}$, bti: $\left[\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{49,0.975}}, \frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{49,0.025}}\right] = [3.35, 7.45]$

5.20 (i) bijna-pivot $\frac{\frac{X}{200}-\frac{Y}{725}-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{200}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{725}}} \sim N(0,1)$, bti: $\hat{p}_1-\hat{p}_2\pm\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{200}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{725}}\xi_{0.975}$

(ii) gerealiseerd interval: [-0.011,0.142], H_0 niet verwerpen, want $0 \in [-0.011, 0.142]$

Hoofdstuk 6

6.1 $V = \sum_{i=1}^n X_i$

6.2 $V = \sum_{i=1}^n X_i$

6.3 $V = \sum_{i=1}^n \log X_i$

6.5 $V = (\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)$

6.6 $V = (\sum_{i=1}^n X_i, X_{(1)})$

6.11 ja

6.13 $\overline{X}$

6.14 $\frac{X(X-1)}{n(n-1)}$

6.15 $V = (\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)$ is voldoende en volledig, UMVZ voor σ^2 is $\overline{X}^2 - \frac{S_X^2}{n}$

6.16 $\overline{X}^2 - \frac{1}{n}\overline{X}$

6.17 (i) $X_{(1)}$

(ii) $\frac{n-1}{n}X_{(1)}$

6.18 $\frac{n+2}{n}X_{(n)}^2$

6.19 (i) $V = (X_{(1)}, \sum_{i=1}^n X_i)$

(ii) $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{n}$

6.20 (i) ja

(ii) $V(X_1, \ldots, X_n) = (\sum_{i=1}^n \log X_i, \sum_{i=1}^n \log(1 - X_i))$

(iii) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log X_i$

6.21 $\overline{X} - \overline{Y}$

6.24 (i) $V = (X_{(1)}, \sum_{i=1}^n X_i)$

6.25 (ii) nee

(iii) $\alpha = \frac{m\tau^2}{n\sigma^2 + m\tau^2}$

(iv) UMVZ voor μ is dan $\frac{\sum_{i=1}^m X_i + \sum_{j=1}^n Y_j}{m+n}$

6.26 $\mathrm{Var}_\theta(T_n) \geq \frac{\theta}{n}$ is scherp.

6.27 (i) x_1^2

(ii) $\sum_{i=1}^n x_i^2$

(iii) $\mathrm{Var}_\theta(T_n) \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

(iv) ja

6.29 (i) $\mathrm{Var}_\theta(T_n) \geq \frac{1}{n\lambda^2}$

6.30 (i) $\mathrm{Var}_\lambda(T_n) \geq \frac{1}{nk\lambda^2}$

6.32 (i) $T = \sum_{i=1}^n e^{X_i} - n$ met $K_T = [0, \Gamma_{n,1;\alpha_0}]$

(ii) $T = \sum_{i=1}^n e^{X_i} - n$ met $K_T = [0, \Gamma_{n,1;\alpha_0}]$

6.33 (i) $\psi(x) = 1_{x_{(1)} \leq 2} + \frac{4^n}{4^n - 1}\left(0.05 - \frac{1}{4^n}\right) 1_{x_{(1)} > 2}$ als n zo groot is dat $0.05 > \frac{1}{4^n}$

(ii) $\psi(x) = 1_{\frac{1}{2} < x_{(1)} \leq 1} + 0.05 \times 1_{x_{(1)} > 1}$

6.34 (i) $\psi(x) = 1_{x_{(1)} > 2} + 0.05 \times 1_{x_{(1)} \leq 2}$

(ii) $\psi(x) = 1_{x_{(1)} > 2} + 0.05 \times 1_{x_{(1)} \leq 2}$

Hoofdstuk 7

7.1 (studieduur is responsvariabele Y)

(i) $Y = \alpha + \beta x + e$, $\hat{\alpha} = 109$, $\hat{\beta} = -5.6$.

(ii) 0.14

7.3 $\hat{\alpha} + \hat{\beta} x$

7.6

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i Y_i}{z_i} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i Y_j}{z_i z_j Z}}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{z_i} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i x_j}{z_i z_j Z}}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{z_i} - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{z_i}}{Z},$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2}{z_i}$$

met $Z = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i}$.

7.7 voldoende is de vector $(\sum_{i=1}^n Y_i, \sum_{i=1}^n Y_i^2, \sum_{i=1}^n Y_i x_i)$

7.8 (i) $Y_i = \beta x_i + e_i$ met $x_i = \sqrt{l_i}$ en $\beta = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$.

(ii) $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

(iii) $\mathrm{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

(iv) groot

7.10 Additief: $Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijkl}$
eventueel aangevuld met interacties

7.11 (i) $\mathrm{P}(Y = 1 | (X_1, X_2, X_3) = (x_1, x_2, x_3)) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3)}}$ met X_1 de bloeddruk, $X_2 = \begin{cases} 0 \ man \\ 1 \ vrouw \end{cases}$, $X_3 = \begin{cases} 0 \text{ genotype } (A_1, A_2) \text{ of } (A_2, A_2) \\ 1 \text{ genotype } (A_1, A_1) \end{cases}$.

(ii) zoals in (i), maar met X_3 gelijk aan het aantal A_2 allelen

7.13 $\lambda(t) = \lambda_0(t)e^{\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\beta_3 x_3+\beta_4 x_4}$ met X_1 de leeftijd, X_2 het gewicht, $X_3 = \begin{cases} 0 \; man \\ 1 \; vrouw \end{cases}$, $X_4 = \begin{cases} 0 \; mechanisch \\ 1 \; biologisch \end{cases}$.

Appendix A

A.1 $\mathrm{E}X^2 = \theta + \theta^2$

A.2 Voor X Poisson(θ)-verdeeld geldt $\mathrm{E}\big(X(X-1)(X-2)\big) = \theta^3$, wat gelijk is aan 1 als $\theta = 1$.

A.3 $\sqrt{e}$

A.4 Als $X, Y \sim exp(\theta)$ dan heeft $Z = \max(X, Y)$ dichtheid $2\theta e^{-\theta z}(1-e^{-\theta z})$ voor $z > 0$ en $\mathrm{E}Z = \frac{2}{\theta} - \frac{1}{2\theta}$. Als $\theta = 1$ dan $\mathrm{E}Z = \frac{3}{2}$.

A.6 (i) $\mathrm{P}(X + Y \leq 2) = \Phi\big(\frac{1}{\sqrt{3}}\big) = 0.718$

(ii) $\xi = 1 + \sqrt{3}\Phi^{-1}(0.95) = 3.849$.

A.7 Als $Z = X^2 + Y^2$ dan $P(Z \leq z) = 1 - e^{-z/2}$.

A.8 (iii) e^{x^2-y} voor $y > x^2$

(iv) $\mathrm{E}(Y|X = x) = x^2 + 1$

(v) $\mathrm{E}Y = \frac{3}{2}$

A.10 $\mathrm{E}Y = \frac{n}{n+1}$, $\mathrm{var}\, Y = \frac{n}{n+2} + \big(\frac{n}{n+1}\big)^2$

A.11 $\mathrm{E}\overline{X}_n = \mu$, $\mathrm{var}\, \overline{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}$, $\mathrm{E}(\overline{X}_n)^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$, $\mathrm{cov}(X_i - \overline{X}_n, \overline{X}_n) = 0$

A.13 $\mathrm{P}(X \leq 30) \approx 0.898$ (incl. continuïteitscorrectie)

A.14 $\mathrm{P}(\overline{X}_n \geq 4.5) \approx 0.868$ (excl. continuïteitscorrectie)