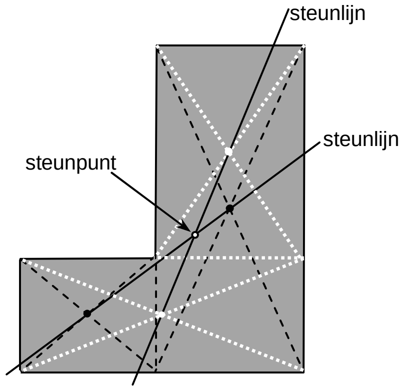
Antwoorden *De juiste ondersteuning*

1 a. De straal van de cirkel waarover het zwaartepunt beweegt is 5. De maximale hoogte van het zwaartepunt is dus 5. Het moet dus 1 dm omhoog.

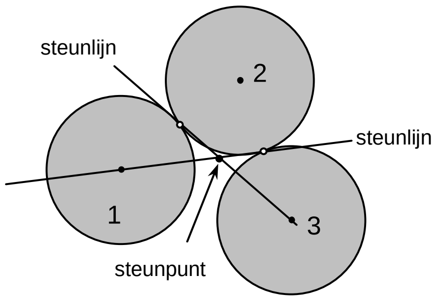
b. Het zwaartepunt van het tweede blok beweegt over een cirkel met straal $\sqrt{17}$, het moet dus $\sqrt{17}-1$ omhoog.
$2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot (\sqrt{17}-1) > 6 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 1$, dus bij het tweede blok moet meer arbeid verricht worden.

2 Ellips, parallellogram, regelmatige driehoek

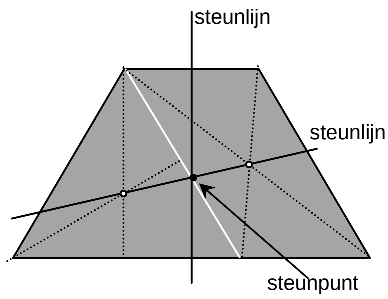
3 Een steunlijn gaat door de witte punten, de andere door de zwarte. Het evenwichtssteunpunt is het snijpunt van deze twee steunlijnen.



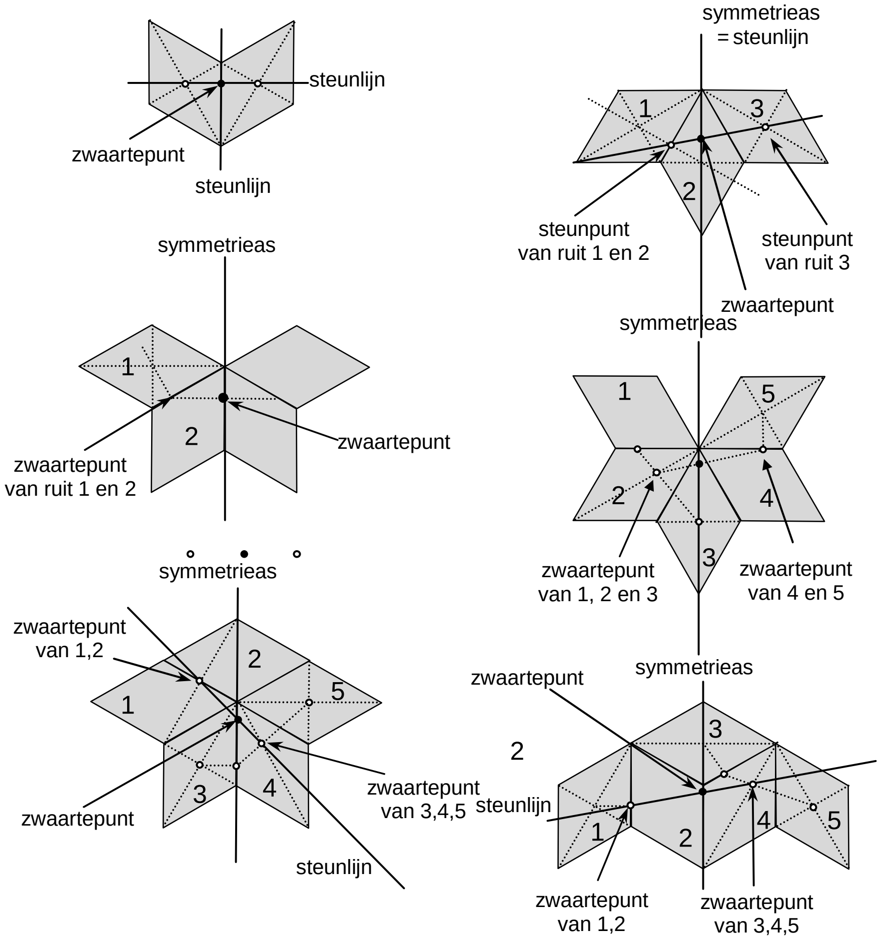
4 Het ene witte punt is steunpunt van de cirkels 1 en 2, het andere witte punt van de cirkels 2 en 3.



5 Een steunlijn is de symmetrieas van het trapezium, een andere steunlijn vind je door het trapezium te verdelen in een parallellogram en een regelmatige driehoek en de symmetriepunten van deze twee te verbinden.

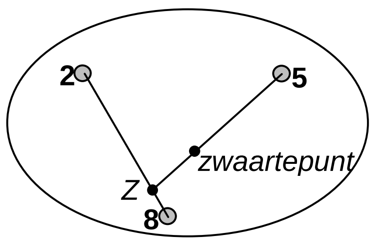


6



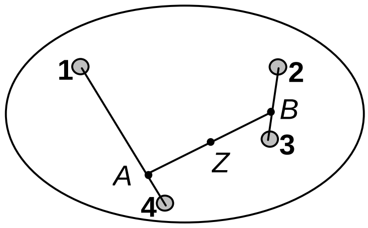
7 Het zwaartepunt ligt op afstand 7 van links (en dus afstand 3 van rechts).

8 a.

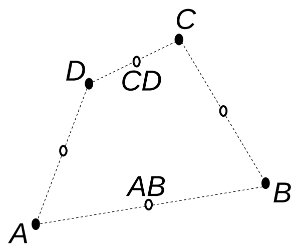


b. *Z* ligt op het verbindingslijnstuk van de massa's met grootte 2 en 8 en verdeelt dat in de verhouding 8:2. Het zwaartepunt ligt op het verbindingslijnstuk van *Z* en de massa met grootte 5 en verdeelt dat in de verhouding 1:2.

9 *A* is het zwaartepunt van de massa's 1 en 4 (verdeelt hun verbindingslijnstuk in de verhouding 4:1).
B is het zwaartepunt van de massa's 2 en 3 (verdeelt hun verbindingslijnstuk in de verhouding 3:2).
Z (het midden van *AB*) is het gevraagde zwaartepunt.

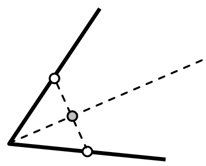


10 a. In de tekening is *AB* het midden van lijnstuk *AB* enz.
AB is het zwaartepunt van de massa's in *A* en *B* en *CD* is het zwaartepunt van de gewichten in *C* en *D*. Dus ligt het zwaartepunt van de vier massa's op de verbindingslijn van *AB* met *CD*, dus op een mediaan.
Met eenzelfde redenering volgt dat het zwaartepunt ook op de andere mediaan ligt.

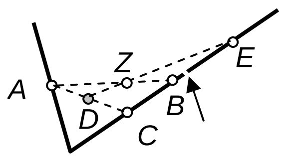


b. In *M* ligt het zwaartepunt van de massa’s in *A* en *B*. Het zwaartepunt van de drie massa’s ligt dus op *MC*.
2 keer zo ver van *C* als van *M*.

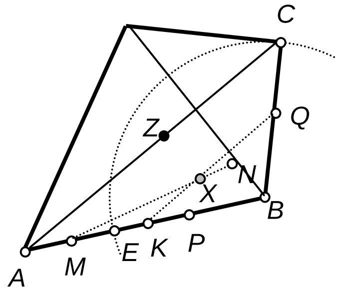
11 a. De witte punten zijn middens van de stukken van de geknikte stang. Het zwaartepunt (grijs) ligt midden tussen de witte punten.



b. *A* is het midden van het ene stuk en *B* van het andere. Lijn *AB* is steunlijn.
C is het midden van het afgekorte stuk en *D* het midden van lijnstuk *AC*.
E is het midden van het afgeknipte stuk. Dan is *DE* steunlijn.
Dus *Z* is het zwaartepunt.

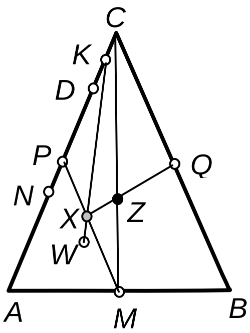


12 Een steunlijn van de vlieger is de symmetrieas *AC*.
We bepalen vervolgens het zwaartepunt *X* van de geknikte stang *ABC*. *K* is het midden van *AB* en *Q* van *BC*. Een steunlijn van knik *ABC* is *KQ*.
E ligt op *AB* zó, dat *BE* = *BC*.
Het midden van *BE* is *P* en *N* het midden van *PQ*.



Het midden van *AE* is *M*. Een andere steunlijn van knik *ABC* is *MN*, dus het snijpunt *X* van *MN* en *KQ* is het zwaartepunt van de geknikte stang *ABC*.
Het zwaartepunt *Z* is de loodrechte projectie van *X* op lijn *AC*.

13 a. *D* ligt op zijde *AC* zó, dat *AD* = *AB*.
N is het midden van *AD*, *M* van *AB* en *W* van *MN*. *K* is het midden van *CD*.
Dan is *KW* steunlijn.
P is het midden van zijde *AC*.
Dan is *PM* steunlijn.
Het snijpunt *X* van de lijnen *PM* en *KW* is het zwaartepunt van de geknikte stang *CAB*.



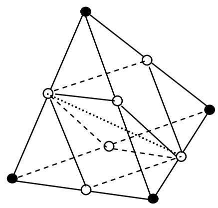
b. Het zwaartepunt van de stangendriehoek is het snijpunt van de lijnen *CM* en *XQ* (*Q* is het midden van zijde *BC*).

14 * Bij de minste storing, stort het zaakje in.
* Hij is een rustige, stabiele persoon.
* De inkomsten en uitgaven moeten even groot zijn.
* De ploegen waren tegen elkaar opgewassen.
* De belangrijkste politici zitten in Den Haag.
* Het grootste, belangrijkste deel van zijn werk …
* We moeten meer gaan denken in termen van ethiek dan van politiek.

15 b. *AB* is het zwaartepunt van de gewichten in *A* en *B* en *CD* is het zwaartepunt van de gewichten in *C* en *D*. Dus ligt het zwaarte-punt van de vier gewichten op de verbindingslijn van *AB* en *CD*.

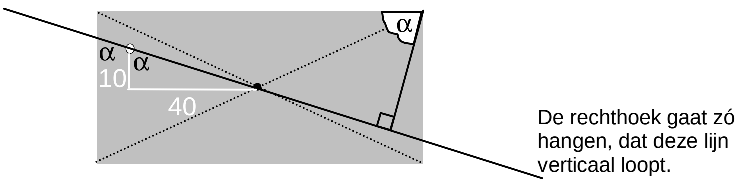
Met eenzelfde redenering volgt dat het zwaartepunt ook op de andere verbindingslijnen liggen. Dus gaan de drie verbindingslijnen alle door het zwaartepunt van *A*, *B*, *C* en *D.*

Het kan ook meetkundig.
Je kunt telkens vier middens in een vlak plaatsen. Je krijgt zo drie vlakken. De snijlijn van telkens twee van die vlakken is de verbindingslijn twee middens.
De drie vlakken snijden elkaar in één punt. Dat is ook het gemeenschappelijk punt van de drie snijlijnen.

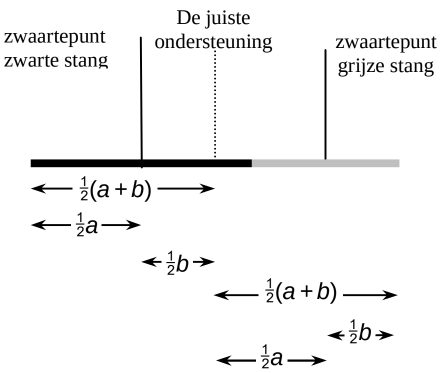


16 Ga op een wip liggen. Zoek de plek zodat er evenwicht is. Dan ligt jouw zwaartepunt boven het draaipunt van de wip.

17 De hellingshoek is α, zie plaatje. Er geldt: $\tan\alpha = 4$, dus $\alpha \approx 76°$.



18 a.

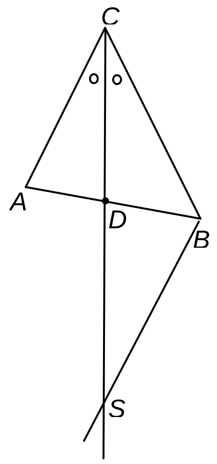


b. Uit a volgt: $x = \frac{1}{2}b$ en $y = \frac{1}{2}a$, dus $x\,a = y\,b$ $(= \frac{1}{2}ab)$.

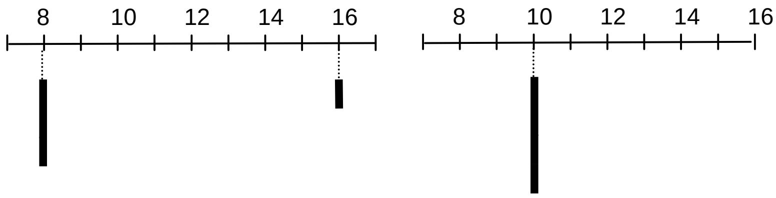
19 a. *C* is een snijpunt van de cirkel met middelpunt *A* en straal 5 en de cirkel met middelpunt *B* en straal 6.

b. $\angle ACD = \angle CSB$ (Z-hoeken)
$\angle ACD = \angle SCB$ (gegeven)
Dus $\angle CSB = \angle SCB$.

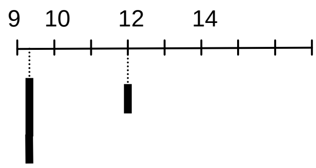
c. $AC : BC = AC : BS$ (want $BC = BS$)
$AC : BS = AD : BD$ (de driehoeken ADC en BDS zijn gelijkvormig.
Dus $AC : BC = AD : BD$.



20 a.



b. In eerste instantie krijg je een gewicht van 3 in $9\frac{1}{3}$ en een gewicht van 1 in 12. Deze twee neem je samen in $9\frac{1}{3} + \frac{1}{4}(12 - 9\frac{1}{3}) = 10$.



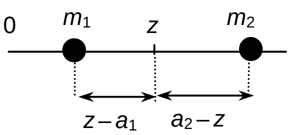
21 a. Volgt direct uit de hefboomwet.

b. Zie plaatje. Uit de hefboomwet volgt:

$m_1(z - a_1) = m_2(a_2 - z) \Leftrightarrow$

$m_1 z + m_2 z = m_1 a_1 + m_2 a_2 \Leftrightarrow$

$(m_1 + m_2)z = m_1 a_1 + m_2 a_2$



Beide leden delen door $m_1 + m_2$ geeft het gewenste resultaat.

c. Bij een andere keuze van 0, veranderen z en a_1 met dezelfde waarde, dus $z - a_1$ verandert niet, zo ook $z - a_2$.

22 a. Als je m_1 en m_2 samenneemt, krijg je een massa $m = m_1 + m_2$ in

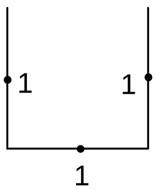
$$b = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2}.$$

Neem je vervolgens de massa’s m en m_3 samen, kom je in
$z = \dfrac{mb + m_3 a_3}{m + m_3} = \dfrac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3}{m_1 + m_2 + m_3}$.

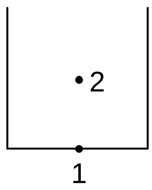
b. De formule uit het vorige onderdeel is symmetrisch.

23 $\dfrac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 10}{2 + 3 + 4} = 8$

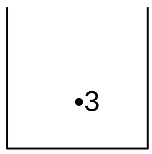
24 a.



figuur 1



figuur 2

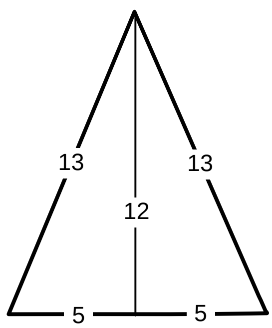


figuur 3

Het zwaartepunt van elke 'zijde' ligt in het midden (figuur 1).
We nemen hun massa’s 1.
In figuur 2 zijn de massa's van de opstaande zijden samengenomen.
In figuur 3 zijn de massa's van grootte 1 en 2 samengenomen.
Het zwaartepunt ligt op hoogte 2.

b. $\dfrac{5}{6}$, $1\dfrac{1}{4}$, $1\dfrac{1}{2}$, $1\dfrac{3}{10}$

25 a. Neem aan: de stangen hebben massa 13, 13 en 10. De hoogte van de driehoek is 12. De stangen van 13 kun je samennemen tot een massa van 26 op hoogte 6. Nu moet je nog een massa van 10 op hoogte 0 samennemen met een massa van 26 op hoogte 6. Het zwaartepunt ligt op hoogte $\frac{10}{36} \cdot 6 = 1\frac{2}{3}$.



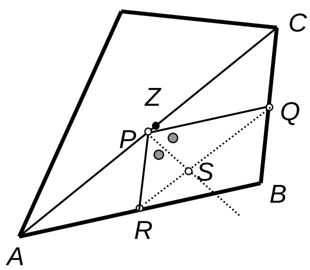
b. De zwaartelijn uit de top is steunlijn, de andere niet, want dan zou het zwaartepunt op hoogte $\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ liggen.

26 a. Dat $RS : SQ = BC : AC$ volgt uit de hefboomwet.
Dat $BC : AC = RP : QP$ volgt uit $BC = 2 \cdot RP$ en $AC = 2 \cdot QP$ (middenparallel).

b. Volgens de stelling op blz 24 verdeelt de bissectrice van hoek RPQ de zijde RQ in de gevraagde verhouding.

De bissectrice van hoek *RPQ* is dus steunlijn van de stangendriehoek. Evenzo zijn de bissectrices van de hoeken *RQP* en *PRQ* steunlijnen. Het snijpunt van deze bissectrices is het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek *PQR*.

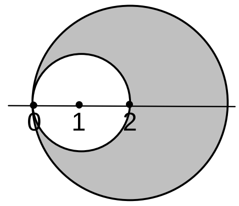
27 We bepalen het zwaartepunt van de knik *ABC*. *P* is het midden van *AC*, *Q* van *BC* en *R* van *AB*.
Het snijpunt *S* van de bissectrice van hoek *QPR* en lijn *QR* is het zwaartepunt van de knik *ABC*.
Het zwaartepunt *Z* van de vlieger is de loodrechte projectie van *S* op lijn *AC*.

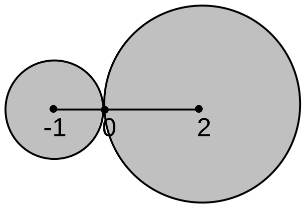


28 a. De massa van de grote cirkel is 4 (namelijk 2^2 keer zo groot als die van de kleine cirkel).
Volgens vraag 22 geldt:
$4 \cdot 2 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot x$

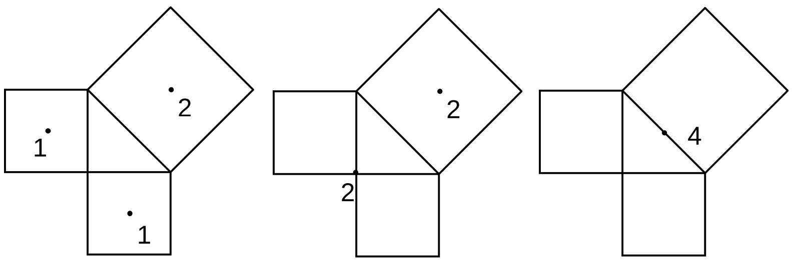
b. Uit a volgt: $x = 2\frac{1}{3}$. Dus het zwaartepunt ligt $2\frac{1}{3}$ van het raakpunt af.

c. De hele figuur heeft massa 5. Noem de plaats van het zwaartepunt *x*.
$5 \cdot x = 1 \cdot -1 + 4 \cdot 2$, dus $x = 1\frac{2}{5}$.
Dus ligt het zwaartepunt $1\frac{2}{5}$ van het raakpunt af.



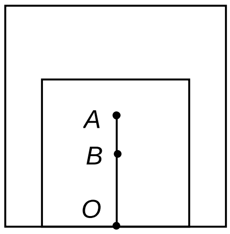


29

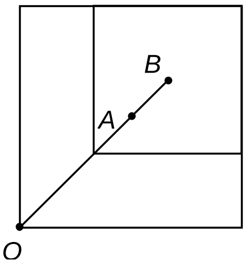


Zie de 'strip': het zwaartepunt ligt op het midden van de schuine zijde.

30 A is de plaats van het zwaartepunt van het grote vierkant en B de plaats van zwaartepunt van het kleine.
Noem de plaats van het zwaartepunt Z en z de afstand van Z tot O.
Dan: $3 \cdot 36 = z \cdot 20 + 2 \cdot 16$,dus $z = 3\frac{4}{5}$.

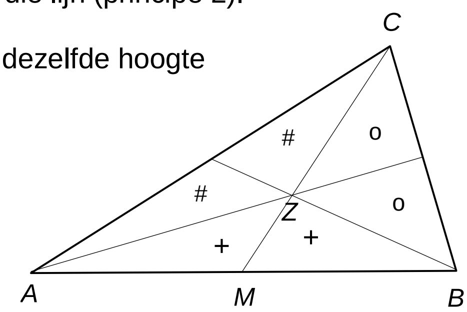


A is de plaats van het zwaartepunt van het grote vierkant en B de plaats van zwaartepunt van het kleine.
Noem de plaats van het zwaartepunt Z en z de afstand van Z tot O.
Dan: $3\sqrt{2} \cdot 36 = z \cdot 20 + 4\sqrt{2} \cdot 16$, dus $z = 2\frac{2}{5}\sqrt{2}$.



31 a. De driehoeken ADE, AGH enzovoort ontstaan uit driehoek ABC door puntvermenigvuldiging uit A.
b. Het zwaartepunt (= symmetriepunt) van een parallellogram ligt op de middenparallellen (medianen) van dat parallellogram.
Lijn AD is middenparallel van al die parallellogrammen.
c. Als de zwaartepunten van twee parallellogrammen op één lijn liggen, ligt het zwaartepunt van de samengenomen parallellogrammen ook op die lijn (principe 2).

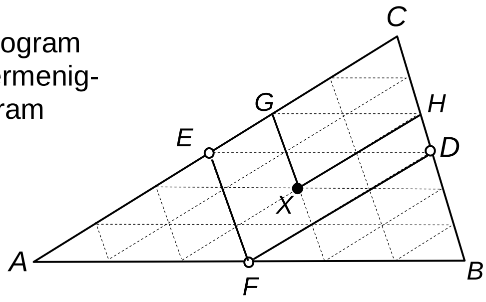
32 a. De stukken met + hebben dezelfde hoogte en gelijke bases.



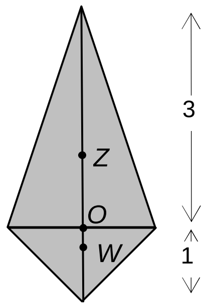
b. De driehoeken ACM (+,#,#) en BCM (+,o,0) hebben dezelfde oppervlakte, want ze zijn even hoog en hebben gelijke bases.
c. Uit b volgt: de stukken met # en # zijn samen even groot als de stukken met o en o, dus zijn de stukken met # en o even groot.

33 a. Volgt uit 32c.
b. Bekijk het plaatje bij de vorige opgave. Oppervlakte driehoek $BZC = 2 \cdot$ Oppervlakte driehoek MZB. De hoogtelijn uit B is voor de driehoeken BZC en MZB hetzelfde, dus $CZ = 2 \cdot ZM$.

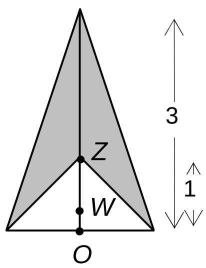
34 Zie plaatje. Als je parallellogram *XHCG* met $1\frac{1}{2}$ vanuit *C* vermenigvuldigt, krijg je parallellogram *FDCE.*



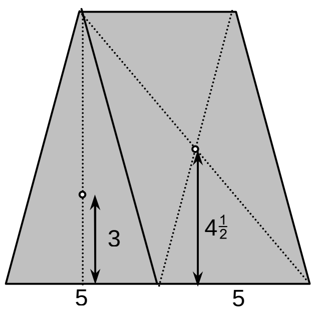
35 Het zwaartepunt van de grote driehoek is *Z* en van de kleine *W*. Het snijpunten van de diagonalen van de vlieger is *O*. Dan ligt *Z* 1 boven *O* en *W* ligt $\frac{1}{3}$ onder *O*.
De hoogte van het zwaartepunt boven *O* noemen we *x*, dan:
$x \cdot 4 = 1 \cdot 3 + -\frac{1}{3} \cdot 1$, dus $x = \frac{2}{3}$.



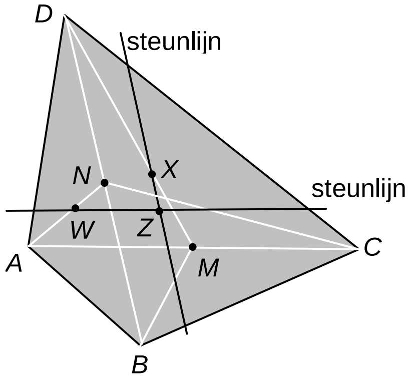
De hoogte van het zwaartepunt van de pijlpuntvlieger boven *O* noemen we *y*, dan:
$3 \cdot 1 = y \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1$, dus $y = 1\frac{1}{3}$.



36 Verdeel het trapezium in een parallellogram en een gelijkbenige driehoek, zie plaatje. Neem aan dat de driehoek massa 1 heeft, dan heeft het parallellogram massa 2.
Je moet dus een massa 1 op hoogte 3 samennemen met een massa 2 op hoogte $4\frac{1}{2}$. Het zwaartepunt ligt dan op hoogte: $\frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2} = 4$.



37 M is het midden van AC en X ligt op lijnstuk DM zó, dat $DX = 2 \cdot XM$. Dan is X het zwaartepunt van driehoek ACD. Het zwaartepunt van driehoek ABC ligt op BM en verdeelt lijnstuk BM in de verhouding 2:1, dus ligt op de lijn door X evenwijdig aan DB. De lijn door X evenwijdig aan DB is dus een steunlijn van de vierhoek.



N is het midden van DB en W het zwaartepunt van driehoek ABD. De lijn door W evenwijdig aan lijn AC is ook steunlijn van de vierhoek.
Het snijpunt Z van de twee steunlijnen is dus het zwaartepunt van de vierhoek.

38 a. Het snijpunt van AD met BC noemen we T. Dan is de lijn TM steunlijn van de driehoeken TDC en TAB, dus ook van $ABCD$. Lijn TM snijdt lijnstuk DC doormidden (gelijkvormigheid).

b. Zeg de hoogte (afstand van de twee evenwijdige zijden) van het trapezium is h, dan zijn de massa's van de twee driehoeken evenredig met $\frac{1}{2}ha$ en $\frac{1}{2}hb$, dus met a en b.

c. Op hoogte $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{3}$

d. Je moet een massa evenredig met a op hoogte $\frac{1}{3}$ samennemen met massa evenredig met b op hoogte $\frac{2}{3}$.

$\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{a+2b}{3a+3b}$, dus Z verdeelt lijnstuk MN in de verhouding

$$\frac{a+2b}{3a+3b} : \left(1 - \frac{a+2b}{3a+3b}\right) = \frac{a+2b}{3a+3b} : \frac{3a+3b-a-2b}{3a+3b} = \frac{a+2b}{3a+3b} : \frac{2a+b}{3a+3b}$$

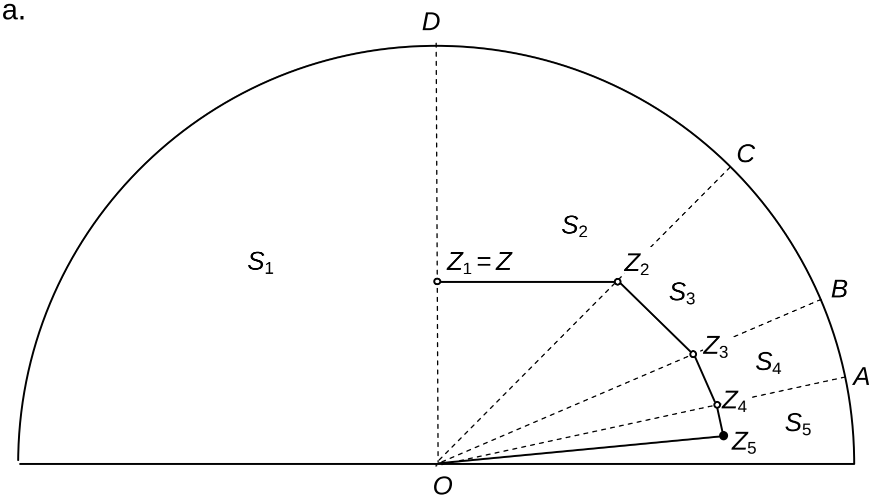
dus als $(a+2b):(2a+b)$.

e. Hier is $a = 10$ en $b = 5$, de verhouding van de stukken is: $20:25 = 4:5$, dus het zwaartepunt ligt op hoogte $\frac{4}{9} \cdot 9 = 4$.

39 De projectie van P op AB noemen we Q. Het zwaartepunt moet op lijnstuk PQ liggen. We nemen aan: $DP = 1$ en $BQ = a$. Het is geen beperking aan te nemen dat $PQ = 1$.
Het zwaartepunt van rechthoek $AQPD$ noemen we Z_1 en dat van driehoek PQB noemen we Z_2. Dan ligt Z_1 op afstand $\frac{1}{2}$ van AD en Z_2 op afstand $1 + \frac{1}{3}a$.

De massa's in Z_1 en Z_2 verhouden zich als $1:\frac{1}{2}a$. Het zwaartepunt van het trapezium moet 1 van AD afliggen. Dus
$1\cdot(1+\frac{1}{2}a)=\frac{1}{2}\cdot 1+(1+\frac{1}{3}a)\cdot\frac{1}{2}a \Leftrightarrow 1=\frac{1}{3}a^2 \Leftrightarrow a=\sqrt{3}$.
Dus: $DP:PC=1:\sqrt{3}$.

40 a.



Z_4 is het zwaartepunt van de sectoren S_4 en S_5 samen,
Z_3 het zwaartepunt van de sectoren S_3, S_4 en S_5 samen,
Z_2 het zwaartepunt van de sectoren S_2, S_3, S_4 en S_5 samen,
Z het zwaartepunt van de sectoren S_1, S_2, S_3, S_4 en S_5 samen.
Z_4 is de projectie van Z_5 op OA, Z_3 is de projectie van Z_4 op OB, Z_2 is de projectie van Z_3 op OC, Z is de projectie van Z_2 op OD.

b. In driehoek OZ_4Z_5 geldt: hoek OZ_4Z_5 is recht, $\angle Z_4OZ_5 = \frac{1}{16}\cdot 90°$ en $OZ_5 = 1$.

c. $(((\sin\frac{1}{16}\cdot 90°\cdot\cos\frac{1}{16}\cdot 90°)\cdot\cos\frac{1}{8}\cdot 90°)\cdot\cos\frac{1}{4}\cdot 90°)\cdot\cos\frac{1}{2}\cdot 90° =$
$((\frac{1}{2}\sin\frac{1}{8}\cdot 90°\cdot\cos\frac{1}{8}\cdot 90°)\cdot\cos\frac{1}{4}\cdot 90°)\cdot\cos\frac{1}{2}\cdot 90° =$
$((\frac{1}{2})^2\sin\frac{1}{4}\cdot 90°\cdot\cos\frac{1}{4}\cdot 90°)\cdot\cos\frac{1}{2}\cdot 90° =$
$(\frac{1}{2})^3\sin\frac{1}{2}\cdot 90°\cdot\cos\frac{1}{2}\cdot 90° =$
$(\frac{1}{2})^4\cdot\sin 90° = (\frac{1}{2})^4$.

d. $OZ_1 = \cos\frac{1}{2}\cdot 90°\cdot OZ_2$, $OZ_2 = \cos\frac{1}{4}\cdot 90°\cdot OZ_3$,
$OZ_3 = \cos\frac{1}{8}\cdot 90°\cdot OZ_4$ en $OZ_4 = \cos\frac{1}{16}\cdot 90°\cdot OZ_5$.
Klopt dus, want $OZ_5 = 1$.

e. Uit d volgt: $OZ\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\pi\approx(\frac{1}{2})^4$, dus $OZ\cdot\frac{1}{2}\pi\approx 1$, dus: $OZ\approx\dfrac{2}{\pi}$.

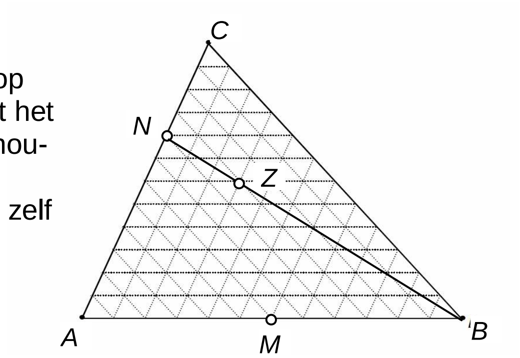
f. Het zwaartepunt van driehoek *OAB* ligt $\frac{2}{3} \cdot OM$ van *O,* dus

$OZ \approx \frac{2}{3} r \cdot \dfrac{2}{\pi} = \dfrac{4}{3\pi} r$.

41 Het middelpunt van de halve cirkels is *M*.
De schijf met straal 5 heeft massa $12\frac{1}{2}\pi$ en die met straal 6 massa 18π en de boog heeft dus massa $5\frac{1}{2}\pi$.
A is het zwaartepunt van de schijf met straal 5, *B* van de schijf met straal 6 en *Z* van de boog.
Dan $AM = \frac{20}{3\pi}$, $BM = \frac{24}{3\pi}$. Noem $ZM = z$, dan:

$\frac{24}{3\pi} \cdot 18\pi = z \cdot 5\frac{1}{2}\pi + \frac{20}{3\pi} \cdot 12\frac{1}{2}\pi$, dus $z = \frac{364}{33\pi}$.

42 • De massa's in *A* en *B* samennemen in *M*. Het zwaartepunt is het midden van *CM* en dat is het aangegeven punt *Z*.
• De massa's in *A* en *C* samennemen in *N*.
Het zwaartepunt ligt dan op lijnstuk *NB* zó, dat dit punt het lijnstuk verdeelt in de verhouding 1:3.
(De derde manier moet je zelf doen.)



43 a. $\vec{z} = \vec{a} + \frac{3}{5}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$

b. $\vec{z} = \vec{a} + \frac{b}{a+b}(\vec{b} - \vec{a}) = (1 - \frac{b}{a+b})\vec{a} + \frac{b}{a+b}\vec{b} = \frac{a}{a+b}\vec{a} + \frac{b}{a+b}\vec{b}$

44 Noem de afstand (in km) van het zwaartepunt tot de aarde *z*,

dan: $z = \dfrac{384400 \cdot 7{,}343 \cdot 10^{22}}{7{,}343 \cdot 10^{22} + 5{,}975 \cdot 10^{24}} \approx 4666$

Dit is kleiner dan de straal van de aarde (6400 km). Dus ligt het zwaartepunt onder het aardoppervlak.

45 a. De massa's in *P* en *C* zijn beide 3, dus *Z* is het midden van *P* en *C*.

$\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

b. Het zwaartepunt van de massa's in *B* en *C* noemen we *Q*.
Dan $\vec{q} = \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$

$\vec{z} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{q} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{5}{6}(\frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}) = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$, hetzelfde.

46 a. $\vec{z} = \frac{c}{a+b+c} \cdot \vec{c} + \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \vec{p} = \frac{c}{a+b+c} \cdot \vec{c} + \frac{a+b}{a+b+c} \cdot (\frac{a}{a+b}\vec{a} + \frac{b}{a+b}\vec{b})$, dus

$\vec{z} = \frac{a}{a+b+c} \cdot \vec{a} + \frac{b}{a+b+c}\vec{b} + \frac{c}{a+b+c} \cdot \vec{c}$.

b. De uitdrukking is symmetrisch in *a*, *b* en *c*.

47 Plaats in *A*, *B* en *C* massa's van grootte 3, 4 en 2. Dan is *Q* het zwaartepunt van de massa's in *A* en *C* en *P* het zwaartepunt van de massa's in *B* en *C*. Dus de lijnen *BQ* en *AP* zijn steunlijnen van het massasysteem in *A*, *B* en *C* en *Z* is het zwaartepunt van dat systeem. Dus het snijpunt *S* van lijn *CZ* met lijn *AB* is het zwaartepunt van de massa's in *A* en *B*.
Dus *AS* : *SB* = 4 : 3.

48 Denk je massa's *a*, *b* en *c* in de hoekpunten linksonder, rechtsonder en boven. Dan:

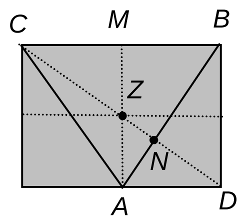
$\frac{c_1}{c_2} = \frac{b}{a}$, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c}{b}$ en $\frac{b_1}{b_2} = \frac{a}{c}$, dus $\frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{a_1}{a_2} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1$,

dus $a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = a_2 \cdot b_2 \cdot c_2$.

49 Het massasysteem heeft als zwaartepunt het meetkundig zwaartepunt van driehoek *ABC.* Verdeel de massa's in *A*, *B* en *C* in twee delen, één met massa $\frac{p}{p+q}$ en één met massa $\frac{q}{p+q}$. De massa $\frac{q}{p+q}$ in *A* kun je samennemen met de massa $\frac{p}{p+q}$ in *B* tot een massa 1 in het zwaartepunt van die twee, dat is het punt *D*. Zo ga je door.
Zo zie je dat het zwaartepunt van de massa's 1 in *A*, *B* en *C* samenvalt met de massa's 1 in *D*, *E* en *F.*

50 a. 6 (de diagonaalvlakken van de kubus)

b. De grijze rechthoek hiernaast is een diagonaalvlak van 1 bij √2.
DC is een lichaamsdiagonaal van de kubus. Die staat loodrecht op een grensvlak van het viervlak. De hoogte van het viervlak is *CN*.
Het zwaartepunt van het viervlak is *Z* (op hoogte $\frac{1}{2}$ in de rechthoek).
De driehoeken *AND* en *BNC* zijn gelijkvormig, dus



$\frac{CN}{DN} = \frac{BC}{AD} = 2$, dus $CN = \frac{2}{3}CD$ en
$ZN = (\frac{2}{3} - \frac{1}{2})CD = \frac{1}{6}CD$.
Dus $ZN = \frac{1}{4}CN$. Dus het zwaartepunt ligt op $\frac{1}{4}$ van de hoogte van het viervlak.

51 Noem de top *T* en de andere hoekpunten *A*, *B* en *C*. Neem gelijke massa's in deze vier punten. Dan geldt voor het zwaartepunt *Z*: $\vec{z} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{t}$. Hieraan zie je dat je om in het zwaartepunt te komen $\frac{1}{4}$ deel van de hoogte moet nemen.

52 a. $\vec{z} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c} + \frac{1}{6}\vec{d} + \frac{1}{6}\vec{e} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c} + \frac{1}{6}(\vec{a} + \vec{c}) + \frac{1}{6}(\vec{b} + \vec{c}) =$
$\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

b. $\vec{z} = \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{2}{17} \cdot (\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) + \frac{3}{17} \cdot \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{3}{17}(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}) + \frac{3}{17}(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}) +$
$\frac{1}{17} \cdot (\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}) + \frac{1}{17}(\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}) + \frac{2}{17}(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}) =$
$\frac{6}{17}\vec{a} + \frac{6}{17} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

c. $\vec{z} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

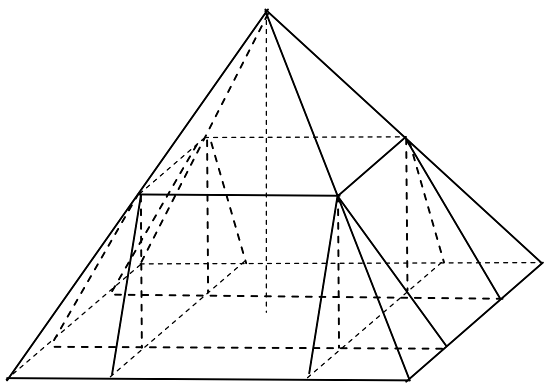
53 a. Noem de top *T* en de andere hoekpunten *A*, *B*, *C* en D.
$\vec{z} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c} + \frac{1}{5}\vec{d} + \frac{1}{5}\vec{t}$, dus op $\frac{1}{5}$ van de hoogte.
Het kan ook zonder vectoren.
De vier massa's in het grondvlak kunnen samengenomen worden tot een massa die vier keer zo groot is in het middelpunt van het grondvlak. Als je deze samenneemt met de massa in de top, krijg je het zwaartepunt op $\frac{1}{5}$ van de hoogte.

b. Het zwaartepunt van de vier opstaande ribben samen ligt op halve hoogte. Het zwaartepunt van de vier ribben in het grondvlak samen, ligt in het middelpunt van het grondvlak en heeft dezelfde massa. Het zwaartepunt van het totaal ligt dus op $\frac{1}{4}$ van de hoogte.

c. Neem aan dat het grondvlak massa 1 heeft. De massa van een opstaand grensvlak is dan $\frac{1}{4}\sqrt{3}$. De vier opstaande grensvlakken kun je samennemen tot massa $\sqrt{3}$ op hoogte $\frac{1}{3}$.
Het zwaartepunt van de piramide ligt dus op hoogte
$\frac{0 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

54 a. 8

b.



c. De vier piramides op de hoeken samen,: die zijn samen even groot als de oorspronkelijk piramide; dus massa 1.
Voor de balk en de vier driezijdige prisma's blijft dus massa 8 – 1– 1 = 6 over. De vier prisma's zijn samen evn groot als de balk, dus elk heeft massa 3.

d. Het zwaartepunt van de uitgebreide piramide ligt 2x van de top,
het zwaartepunt van de vier kleine piramides op de hoeken ligt $1+x$ onder de top,
het zwaartepunt van de balk ligt $1+\frac{1}{2}$ onder de top,
het zwaartepunt van de vier prisma's ligt $1+\frac{2}{3}$ onder de top.

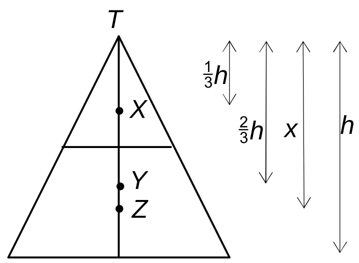
e. Vermenigvuldig massa en afstand onder de top van de uitgebreide piramide en van de delen afzonderlijk:
$8 \cdot 2x = 1 \cdot (1+x) + 3 \cdot 1\frac{2}{3} + 3 \cdot 1\frac{1}{2} + 1 \cdot x$

f. 16x = 2x + 10$\frac{1}{2}$, dus $x=\frac{3}{4}$.

55 a. Van beide $(\frac{3}{10})^2 \cdot 200 = 9$, want je krijgt de doorsnede op hoogte 7 door het grondvlak vanuit de top met $\frac{3}{10}$ te vermenigvuldigen.

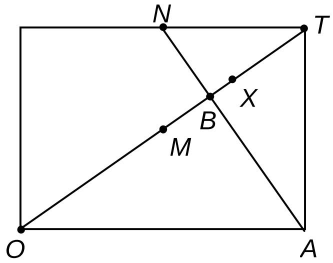
b. Verdeel de piramide in plakjes evenwijdig met het grondvlak, heel dun. Deze plakjes zijn gelijkvormig met het grondvlak. Je krijgt ze door het grondvlak vanuit *T* te vermenigvuldigen. De zwaartepunten van deze plakjes liggen dus op lijn *TZ*, dus ook het zwaartepunt van al deze plakjes samen.

56 Zet het topje weer op de afgeknotte kegel. Hiernaast zie je een doorsnede door de as. *X* is het zwaartepunt van het topje, *Y* van de hele kegel en *Z* van de afgeknotte kegel. De hoogte van de hele kegel is *h*.



Verder zie plaatje.
De massa van het topje nemen we 1. Dan is de massa van de hele kegel 8 en van de afgeknotte kegel 7.
$8 \cdot \frac{2}{3}h = 1 \cdot \frac{1}{3}h + 7 \cdot x$, dus $x = \frac{5}{7}h$, dus het zwaartepunt van de afgeknotte kegel ligt op $\frac{4}{7}$ van de hoogte.

57 De massa van het afgezaagde stuk nemen we 1, dan is de massa van de rest 5, want het afgezaagde stuk is éénzesde deel van de hele kubus (het afgezaagde stuk is een piramide met een half zo groot grondvlak als de kubus).



Hiernaast is de situatie in het verticale diagonaalvlak van de kubus door *OT* getekend.
N is het midden van het bovenvlak van de kubus, *M* het midden (dus het zwaartepunt) van de kubus, *X* het zwaartepunt van het afgezaagde stuk.
Het zwaartepunt *Z* van de rest ligt op *OT* , zeg op afstand *z* van *O*. *NA* maakt deel uit van het zaagvlak en *B* is de loodrechte projectie van *T* op het zaagvlak.
De lengte van de lichaamsdiagonaal noemen we *a*, dan $BT = \frac{1}{3}a$ (de driehoeken *NBT* en *ABO* zijn gelijkvormig).
Volgens de stelling is dan $BX = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}a = \frac{1}{12}a$ en $OX = (\frac{2}{3} + \frac{1}{12})a = \frac{3}{4}a$.
$6 \cdot \frac{1}{2}a = 5z + 1 \cdot \frac{3}{4}a$, dus $z = \frac{9}{20}a$.
De gevraagde verhouding is dus $9:11$.