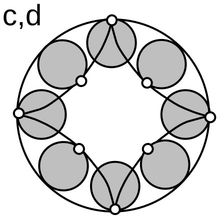
Antwoorden SpiroSporen

Paragraaf 2 Tanden, toppen, toeren

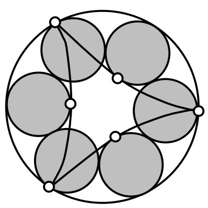
1 1200 : (3,14… · 0,7) = 546.

2 2 keer.

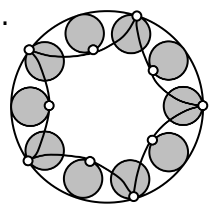
3 a. 4 keer.
b,c,d



4 a.



b.



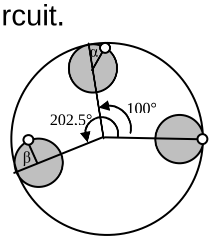
c. Een sterachtige kromme, draaisymmetrisch van orde *n*.

5 Een lijnstuk door het middelpunt van het circuit.

6 a. $B = \frac{1}{2}\pi r$ $B = \frac{37}{360} 2\pi r$;
b. $B = \frac{\Phi}{360} 2\pi r$

7 a. De middelpuntshoek van de cirkel met straal 4 is anderhalf keer zo groot als de middelpuntshoek van de cirkel met straal 6. Immers er geldt: $\frac{\Phi_1}{360} 2\pi \cdot 4 = \frac{\Phi_2}{360} 2\pi \cdot 6$. Dus: $\Phi_1 = \frac{3}{2}\Phi_2$, waarbij Φ_1 en Φ_2 de betreffende middelpuntshoeken zijn.
b. De straal van cirkel met de kleinere middelpuntshoek is $\frac{111}{37}$ keer zo groot als de straal van de andere cirkel.

8 a. De middelpuntshoek van het wiel is 4 keer zo groot als de middelpuntshoek van het circuit.
b.



α = 4 · 100° – 360°= 40°
β = 4 · 202,5° – 720°= 90°

9 a. 8
b. 3
c. 45

10 Elke spiro wordt gesloten. Kies een vast tandje van het circuit. Op een gegeven moment is het wiel bij dat tandje en raakt dat met een van zijn tandjes. Een ronde later raakt het wiel misschien met een ander tandje het vaste tandje. Omdat het wiel maar eindig veel tandjes heeft, zal er herhaling optreden. Dat wil zeggen dat het wiel het vaste tandje weer raakt met hetzelfde tandje, als waarmee het al eerder raakte. Ook de pen is dan terug in een eerdere positie.

11 a. $3A$
b. $8a$
c. $t \cdot A = T \cdot a$

12. De spiro heeft 16 toppen en sluit na 5 rondjes.

14 Deel beide leden van … · A = … · a door de grootste gemeenschappelijke deler g van a en A. Dan krijg je: … · $\frac{A}{g}$ = …· $\frac{a}{g}$.
Op de stippeltjes in het linkerlid moet $\frac{a}{g}$ worden ingevuld en op de stippeltjes in het rechterlid $\frac{A}{g}$.

15 a. We hebben $a \cdot \frac{A}{g} = A \cdot \frac{a}{g}$. Beide leden zijn veelvoud van a en van A, en wel zo klein mogelijk veelvoud. Noem dat veelvoud k.
Dan is $T = \frac{A}{g} = \frac{k}{a}$ en $t = \frac{a}{g} = \frac{k}{A}$.
b. We hebben gezien, dat t en T de kleinste gehele getallen zijn, die je op de stippeltjes kunt invullen in ...$\cdot A =$... $\cdot a$.
Laten we aannemen dat t en T een gemene deler k hebben, die groter dan 1 is. In dat geval zijn er gehele getallen x en y met $kx = t$ en $ky = T$. Dan geldt dus: $kx \cdot A = t \cdot A = T \cdot a = ky \cdot a$. Delen door k levert: $x \cdot A = y \cdot a$. Dus x en y zijn ook geschikt om op de stippeltjes in te vullen. Maar: $x < t$ en $y < T$. Dat kan dus niet. Blijkbaar hebben t en T geen gemene deler k, die groter dan 1 is.

16 a. $\frac{A}{a} = \frac{T}{t}$.
b. $\frac{R}{r} = \frac{T}{t}$.

17 a. 8 toppen en 3 toeren. Het circuit heeft dus $\frac{8}{3} \cdot 36 = 96$ tanden.
b. 24 toppen en 13 toeren. Het middelste wiel heeft dus $\frac{13}{24} \cdot 96 = 52$ tanden.

18 a. Noem de stralen van wiel I, II en III, respectievelijk: G, M, K.
Dan geldt: $\frac{G}{M} = \frac{11}{6}$ en $\frac{G}{K} = \frac{11}{4}$.
b. Delen we de twee verhoudingen uit onderdeel a. door elkaar, dan krijgen we $\frac{M}{K} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.
c. De spiro heeft 3 toppen en sluit na 2 toeren.

19 a. Dat is het midden van de figuur.

b. De straal van de cirkel is 25 mm.

c. De straal van deze cirkel is gelijk aan $R - r$.

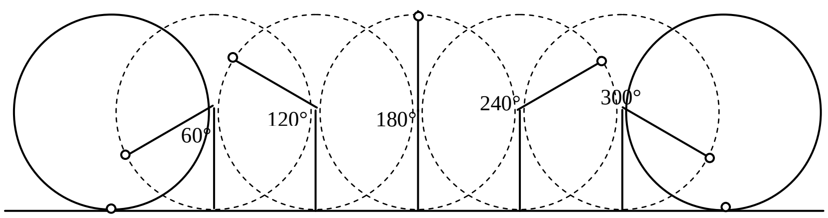
d. Er geldt: $\frac{R}{r} = \frac{120}{80} = \frac{3}{2}$. Dus: $25 = R - r = \frac{3}{2}r - r = \frac{1}{2}r$. Dus: $r = 50 \text{ mm en } R = 75 \text{ mm}$.

e. Je vindt *p* door de afstand van een top tot de cirkel, waarover het middelpunt van het draaiwiel beweegt, op te meten. In het plaatje geldt: *p* = 14 mm.

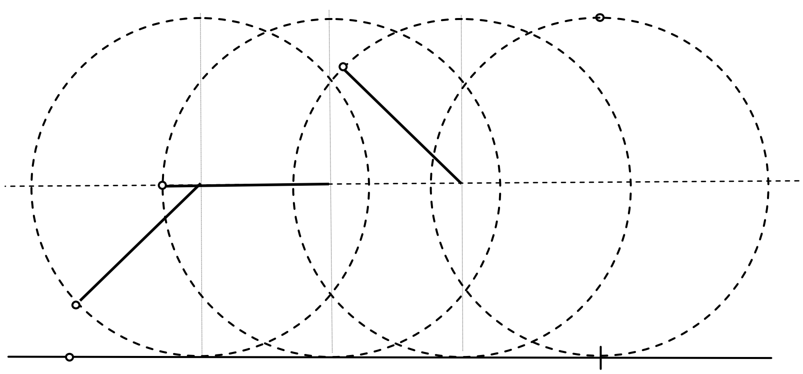
Paragraaf 3 – De mooie Helena

20 a. De diameter van het wiel is 28 mm, de omtrek dus $\pi \cdot 28 \approx 88$ mm. De afgelegde afstand over de weg is inderdaad 88 mm.

b.

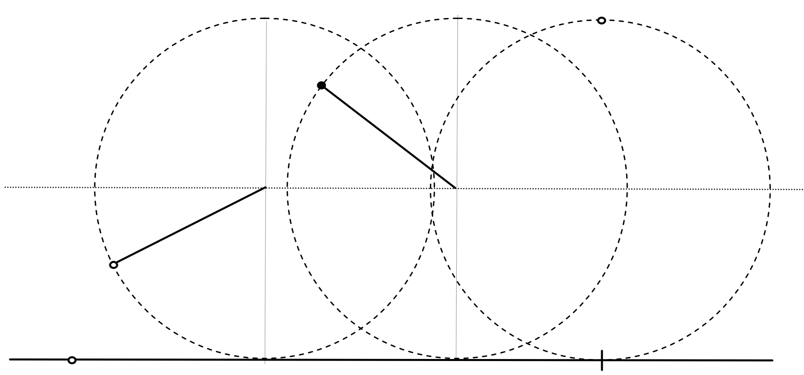


21 a.



Teken de wielen op de drie tussenposities. De draaihoeken van het wiel zijn achtereenvolgens 45°, 90° en 135°.

b.



Bepaal de plaats van het wiel op het moment dat het ventiel in het zwarte punt is. Bepaal de draaihoek (hier ongeveer 128°). Bepaal de plaats van het draaiwiel halverwege het tijdsinterval. Teken de halve draaihoek (hier ongeveer 64°).

22 a. Wanneer een wiel een tijd over de straat rolt, zal een punt op de rand van het wiel in die tijd, ten opzichte van de as van het wiel, over een bepaalde hoek zijn gedraaid. De bij deze hoek behorende cirkelboog is even lang als de weg, die de cirkel op de straat heeft afgelegd. In de tijd dat het ventiel zich van *W* naar *H* verplaatste, is het wiel over de afstand *VW* naar rechts gegaan. Boog *WH* is dus even lang als lijnstuk *VW*.

b. $VW + V'W' = boog(HW) + boog\left(HW'\right) = boog(HW) + boog(CW) = boog(HC) = halve\ cirkelomtrek$.

c. Als je de twee donkere rechthoeken naast elkaar legt, krijg je een nieuw rechthoek, die net zo breed is als de halve cirkelomtrek en hoogte $\frac{1}{8}$ diameter heeft. Dus geldt:
oppervlakte van de twee donkere rechthoeken samen = $\frac{1}{8}\text{diameter} \cdot \frac{1}{2}\text{omtrek} = \frac{1}{8}(2r) \cdot \frac{1}{2}(2\pi r) = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\text{opp. cirkel.}$
Precies hetzelfde kan gezegd worden van de andere paren rechthoeken met gelijke grijs-tint.
Omdat er vier grijstinten zijn, is de totale oppervlakte van alle rechthoeken samen gelijk aan de oppervlakte van de cirkel.

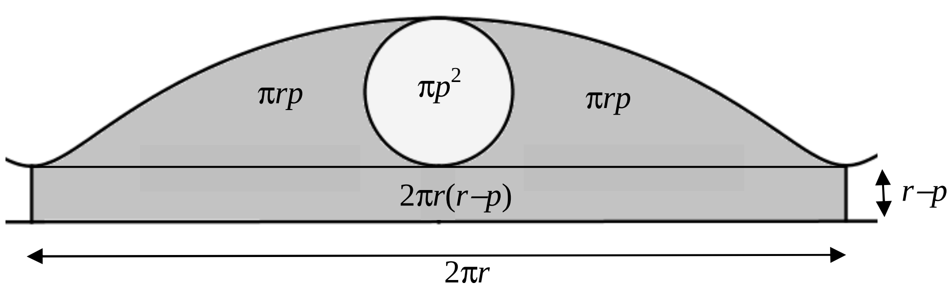
23 De afstand tussen de toppen is 101 mm. Dus is de straal van het wiel $\frac{101}{2\pi} \approx 16{,}1$ mm.
De hoogteverschil tussen het hoogste en een laagste punt is 21 mm. De as van het wiel beweegt halverwege daartussen. De penafstand is dus 10,5 mm.

24 a. Ga vanuit *V* horizontaal naar het punt *W* op de kleine cirkel (de straal daarvan is de pen-afstand). Trek de halve lijn vanuit *M* door *W*. Die snijdt de grote cirkel in *U*.

b. Net als in vraag 23a is *VW* de afstand die het wiel over de weg aflegt en is boog *UT* de afstand waarover het wiel is gedraaid.

c. $VW + V'W' = \text{boog}(TU) + \text{boog}\left(TU'\right) = \text{boog}(TU) + \text{boog}(CU) = \text{boog}(TC) =$ halve wielomtrek

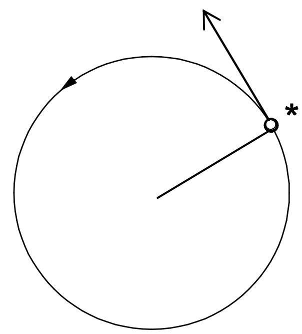
d. Teken weer rechthoeken zoals in opgave 23c. Twee rechthoeken samen hebben breedte πr en alle rechthoeken samen hebben hoogte *p*. In de figuur zijn de oppervlaktes van de verschillende stukken geschreven:



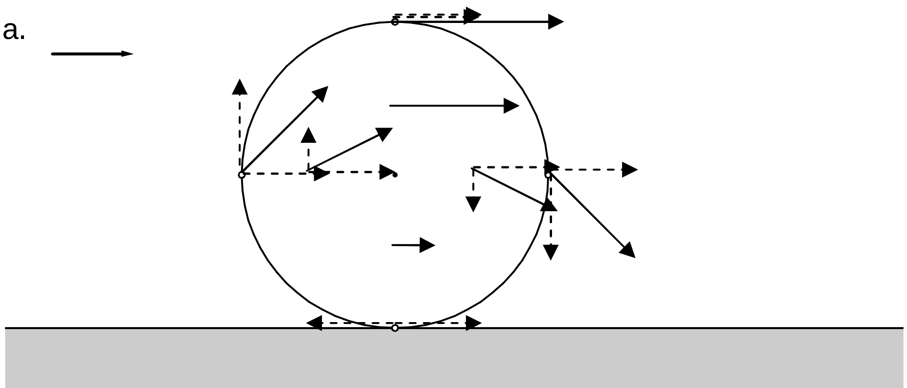
De totale oppervlakte is $2\pi rp + \pi p^2 + 2\pi r\,(r-p) = 2\pi r^2 + \pi p^2$.

Paragraaf 4 - Waar draait het om?

25 Teken de straal vanuit het middelpunt naar plek *. De kogel zal bewegen volgens de raaklijn, dus loodrecht op die straal.



26 a.

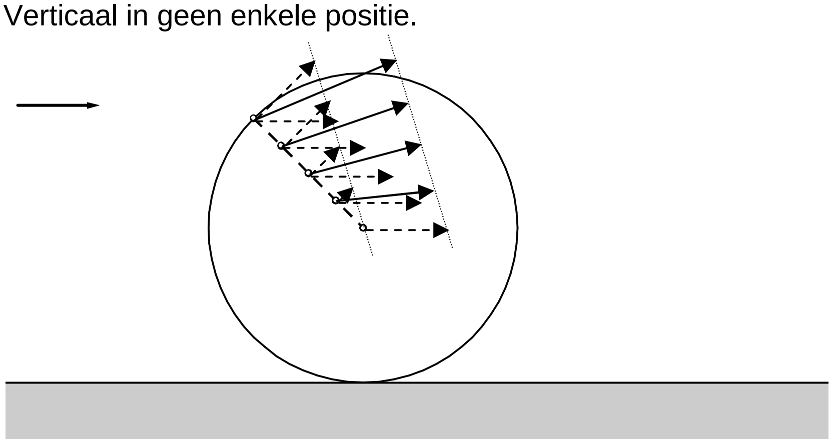


b. 2 m/s , √2 m/s , 0 m/s , √2 m/s

27 a. Zie de figuur van opgave 27.

b. Horizontaal in de posities op de verticale lijn door de as van het wiel. Verticaal in geen enkele positie.

28 a.



De horizontale componenten zijn alle gelijk aan de fietssnelheid, de componenten loodrecht op de straal zijn evenredig met de afstand tot de as.

b. De eindpunten van de componenten loodrecht op de straal krijg je door puntvermenigvuldiging ten opzichte van de as van het wiel. Die liggen dus op een rechte lijn. Je vindt de snelheidsvectoren door deze componenten over de fietssnelheidsvector te verschuiven. Die rechte lijn wordt dan ook over de fietssnelheidsvector verschoven.

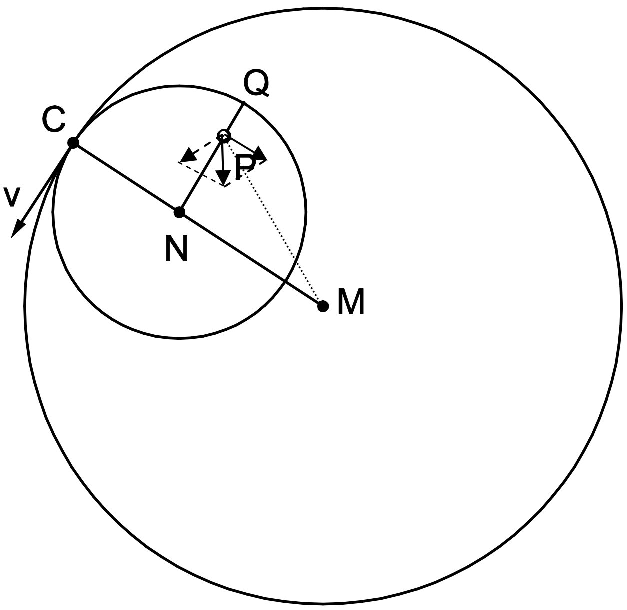
29 a. Neem het wiel in zijn laagste punt en de pen links van *N*. Als de eerste draaiing linksom is, gaat het wiel naar rechts. De pen gaat dan naar boven. Dat is inderdaad rechtsom.

b. De afgelegde booglengte op het circuit is $R\phi_1$, de afgelegde booglengte op het wiel is $r\ \phi_2$. Die zijn gelijk, omdat het wiel zonder slippen beweegt.

30 a. De halve lijn vanuit M door P snijdt het circuit in D. De snelheid in het punt D is v. De snelheidsvector in P van de eerste draaiing vind je door die in D te vermenigvuldigen met het quotiënt van de afstanden tot M. Dus die heeft grootte: MP / $R \cdot v$. In het punt P is de grootte $\frac{6}{8} \cdot 2 = 1{,}5$ cm.

b. De snelheid is evenredig met de afstand tot N. De grootte is dus $p/r \cdot v$. In het punt P is de grootte $1/1{,}5 \cdot v \approx 1{,}3$ cm.

c.

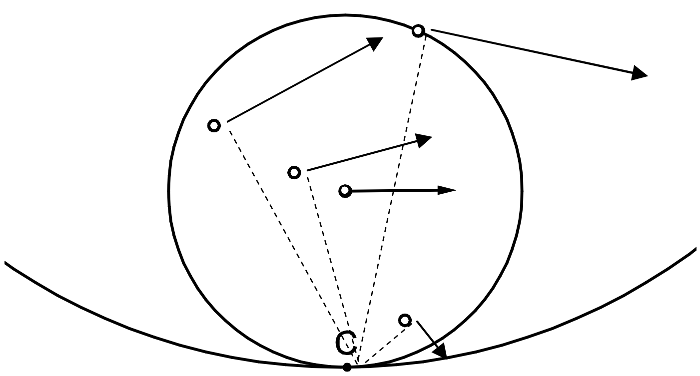


31 a. Beide hebben een rechte hoek en omdat de schuine zijdes loodrecht op elkaar staan, zijn de andere hoeken van de twee grijze driehoeken ook gelijk. De driehoeken zijn dus gelijkvormig volgens “hh” (Zie appendix, blz. 63, gelijkvormigheid).

b. Uit de gelijkvormigheid volgt dat de schuine zijden zich verhouden als de (in het plaatje) lange rechthoekszijden. De schuine zijden zijn “snelheid van P” en “PC”, de lange rechthoekszijden zijn: “projectie van de snelheid van P op de lijn PQ” en “SC”. De projectie van de snelheid van P op de lijn PQ is gelijk aan de snelheid van S.

c. Beide leden zijn gelijk aan de verhouding snelheid van S : afstand CS.

32 a.

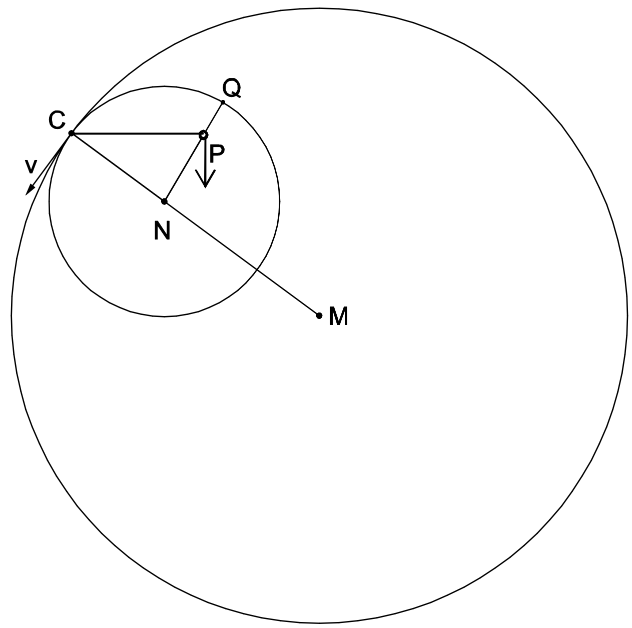


De afstand van het middelpunt tot C is 24 mm en de afstanden tot C van de andere punten zijn 47, 37, 27 en 10 mm. De snelheidsvector van het middelpunt is 15 mm lang. De snelheden staan loodrecht op de verbindingslijnstukken met C en hebben lengte $47/24 \cdot 15 \approx 29$ mm, 23 mm, 17 mm en 6 mm.

33 a. Een volgende top zit 5 toppen verder, van de in totaal 29 toppen.
Het contactpunt loopt in tegengestelde richting en loopt dan dus 29–5 = 24 toppen verder. Het contactpunt legt dan dus 24/29 · 100% ≈ 83% van het circuit af.

b. De spiro sluit als de pen 29 keer de stap naar een volgende top heeft gemaakt. Het contactpunt legt dan 29 · 24/29 = 24 keer het circuit af: t = 24.
Als de pen de andere kant op zou zijn gelopen, zou – als de pen naar een volgende top gaat – het contactpunt 5/29 van het circuit hebben afgelegd. Dan vinden we het aantal toeren t = 5.

34 De snelheid van N is 2,5/4 m/s.
CP = 17,5 mm, CN = 15 mm.
Dus is de snelheid van P
17,5/15 · 2,4/4 ≈ 0,73 m/s.
Omdat de snelheidsvector loodrecht op CP staat, kan hij nu getekend worden.



35 a. De snelheidsvector van P staat loodrecht op PC. CC' is een diameter van het wiel. Uit de stelling van Thales (appendix) volgt dat ∠CPC' = 90°. Dus is de snelheidsvector naar C' gericht.
Merk op dat – als P aan de andere kant van CC' ligt – de snelheidsvector juist van C' af gericht is.

b. Zeg dat $\overrightarrow{NN'}$ de sneheidsvector van N is. $|\overrightarrow{NN'}|$ is gelijk aan de straal van het wiel. Dus CNN' is een gelijkbenige rechthoekige driehoek. Omdat de grootte van de snelheid evenredig is met de afstand tot C, is ook CPP' een gelijkbenige rechthoekige driehoek. Bijgevolg is ∠PCP' = 90°.

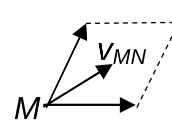
36 a. De snelheidsvector is gericht op de top van het wiel, of juist daarvan af. Dus naar of van het hoogste punt van het wiel (recht tegenover het contactpunt C met de weg).

b. Door een gelijkbenige rechthoekige driehoek CPP' te tekenen, met rechthoek in P.

37 a. Met snelheid v_A naar links.

b. Met snelheid v_A naar rechts.

c. Ten opzichte van as A staat mier N stil en beweegt mier M zich met snelheidsvector ter grootte v_A, loodrecht op AM.
d. De twee componenten van de snelheidsvector in M zijn even groot. Dus is de figuur hiernaast een ruit. De projectie v_{MN} is daarom de helft van de diagonaal v_M.



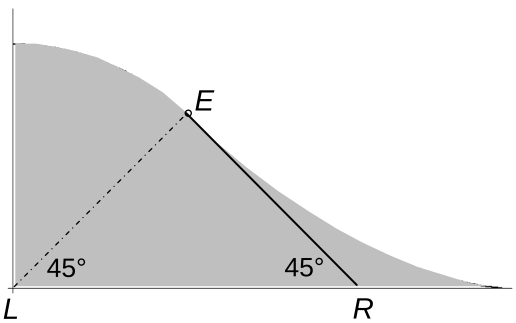
e. Mier M beweegt ten opzichte van de grond op elk moment twee keer zo snel als hij ten opzichte van N beweegt. Ten opzichte van N legt mier M afstand $2r$ af. In dezelfde tijd legt hij dus $2 \cdot 2r = 4r$ ten opzichte van de grond af.
f. $2 \cdot 4r = 8r$

Paragraaf 5 – Glijdende staaf

38 De staaf is de straal van het circuit; dat heeft dus straal 1. Om een astroïde te maken, moet de straal van het wiel ¼ zijn van de straal van het circuit.

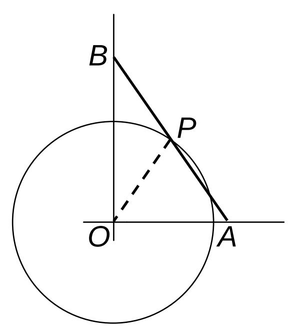
39 a. $\angle AC'C = \angle AMC' + \angle MAC' = \varphi + \varphi = 2\varphi$
b. $\angle PNC = \angle PC'N + \angle C'PN = 2\varphi + 2\varphi = 4\varphi$
c. De hoek waarover het wiel om zijn as is gedraaid is 4 keer zo groot als de hoek waarover het middelpunt in het circuit is gedraaid. Maar de straal van het wiel is 4 keer zo klein als de straal van het circuit. Dus zijn de bogen op de draaihoeken $\angle PNC$ en $\angle AMC'$ gelijk.

40 a.

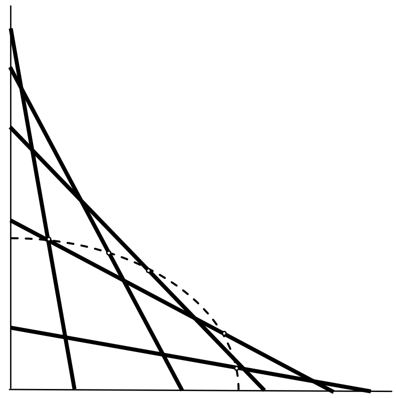


b. Zie vraag a.
De hoek is 45°. Dan is $\angle LER = 90°$ en raakt de rechter deurhelft de astroïde en ook de cirkel.
c. Noem het eindpunt van het gestippelde lijnstuk F.
$\angle CAD = \angle DCA$ (gelijkbenige driehoek; appendix)
$\angle DFA = 90° - \angle ACD$ en $\angle FAD = 90° - \angle DAC = 90° - \angle ACD$
Dus $\angle DFA = \angle FAD$, dus $|FD| = |AD|$ (gelijkbenige driehoek) = 50 cm
d. Het rechterdeel van de kromme krijg je door een staaf van lengte 100 cm met de uiteinden over de voorkant en de linkerzijkant van de douchecabine te laten lopen. Dat is dus een stuk van een astroïde.
Het linkerdeel is het achtste deel van een cirkel met middelpunt L en straal LV.

41 P is het midden van staaf AB. Vanwege Thales (appendix) ligt O op de cirkel met diameter AB. De straal van die cirkel is $|OP| = ½\,|AB|$.
$|OP|$ heeft dus een vaste lengte; P doorloopt dus een cirkel, met middelpunt O.



42



43 a. $|NP| = 1{,}5y$, want driehoek *BNP* is gelijkvormig met driehoek *PLA* (hh, appendix) en $|BP| = 1{,}5\ |PA|$.

b. De driehoeken *OP'L* en *PBN* zijn congruent (ZHZ, appendix). Dus $|OP'| = |BP|$.

44 Rek het spoor verticaal uit met factor b/a.
Gebruik dezelfde namen als in opgave 43.
$|NP| = b/a \cdot |LP|$, want driehoek *BNP* is gelijkvormig met driehoek *PLA* (hh, appendix) en $|BP| = b/a \cdot |PA|$.
De driehoeken *OP 'L* en *PBN* zijn congruent. Dus $|OP'| = |BP| = b$.

45 De spiro met na één ronde sluiten; dus $t = 1$. De spiro heeft twee toppen, dus $T = 2$.
Hieruit volgt dat $R/r = T/t = 2$.

46 a. *OACB* is een rechthoeken. Daarvan zijn de diagonalen *OC* en *AB* even lang.

b. Dat komt omdat de straal van *m* gelijk is aan $|OC|$.

c. $\angle AMC = \angle MOA + \angle OAM$ (buitenhoek, appendix) en $\angle MOA = \angle OAM$.
boog $AC = |MC| \cdot \angle AMC$ en boog $CQ = |OC| \cdot \angle QOC$.
De ene straal is half zo groot als de andere, de ene hoek is dubbel zo groot als de andere.
De bogen zijn dus gelijk.