Antwoorden en uitwerkingen

Opgave 1.1
HIV is een virus en wordt overgedragen via seksueel contact of via bloedbloedcontact (zoals bloedtransfusie of het gebruik van dezelfde injectienaald). Influenza is een virusziekte die wordt overgedragen via minuscule water/speekseldruppeltjes (niezen). Tuberculose wordt door een bacterie veroorzaakt en overgedragen via druppeltjes (hoesten), maar alleen door mensen met *open* tbc. Legionella (een bacterie) wordt niet direct van mens op mens overgedragen, maar vermenigvuldigt zichin waterleidingen en infecteert dan mensen via verneveling (waterdruppeltjes). De ziekte van Pfeiffer (het Epstein-Barrvirus) wordt via speeksel overgedragen, bijvoorbeeld door zoenen.

Opgave 2.1
Bijvoorbeeld autokaarten (autowegen, pompstations, ...), fietskaarten (fietspaden, nummers van ANWB-wegwijzers, ...), kaarten met grondgebruik (stedelijk gebied, bos, landbouw, ...), kaarten voor toeristen (attracties, hotels, ...), kadastrale kaarten (om eigendom van grond aan te geven).

Opgave 3.1
De fotograaf is door niemand in het diagram geïnfecteerd, en was dus de eerste. De kadertjes geven groepjes aan die elkaar onderling geïnfecteerd hebben maar waarbij niet duidelijk is wie nou wie heeft geïnfecteerd. Bijvoorbeeld: de Vriend kan één of meer personen van de Jeugdclub hebben geïnfecteerd, die het onderling weer hebben doorgegeven.

Opgave 3.2
De Vriend hoort tot de 2^e generatie, de Lifter tot de 3^e, maar misschien tot de 4^e als de Kleinkinderen niet beide door de Oude man in de Kroeg zijn geïnfecteerd (daar kan dus een generatie extra tussen zitten).

Opgave 3.3

$$\begin{aligned}&((2)+(3+3)+(4+0+0+0+4+0)+(0+2+0+1+0+0+0+1)\\&\quad+(0+1+3+2)+(6+0+0+0+1+3)\\&\quad+(0+4+0+0+0+5+4+0+0+0)+(0+0+0+3+4+0+0+0+4)\\&\quad+(3+0+0+0+0+0+0+2+0)+(7+0))/56=72/53=1{,}3\end{aligned}$$

Eenvoudiger is: 56 zwarte en 17 grijze boerderijen, dus gemiddelde is $(56 + 17 - 1)156 = 1{,}3$.
Waarschijnlijk is het dus wel verder toegenomen.

Opgave 4.1
Het aantal geïnfecteerde mensen dat er is in de vorige generatie, het aantal vatbare mensen, hoe dicht de mensen op elkaar leven, hoe de ziekte wordt overgedragen, hoeveel mensen er thuis blijven als ze ziek worden (en dus geen mensen kunnen besmetten), etc.

Opgave 4.2.
$Y_1 = 17$.
$Y_2 = 17Y_1 = 289$.
$Y_3 = 17Y_2 = 4913$.

Opgave 4.3
In opgave 3.3 hebben we deze berekend als 1,3.

Opgave 4.4
Met ons model doen we precieze voorspellingen van iets dat niet precies te voorspellen is omdat er toeval in meespeelt. Zo is R het gemiddelde aantal nieuwe infecties per geïnfecteerde, maar dit is voor iedereen anders en gemiddelden van gehele getallen kunnen ook gebroken getallen zijn (zie opgave 3.3 en 4.3). Als het model dan voorspelt dat $Y_6 = 25{,}8$, dan betekent dat dat het aantal geïnfecteerden in de 6^e generatie "naar verwachting"25,8 zal zijn. Deze verwachting is een soort gemiddelde, alsof je een epidemie meermalen kan laten plaatsvinden en bij elke keer weer kijkt hoeveel geïnfecteerden er in generatie 6 zitten.

Opgave 4.5
We moeten ook weten met hoeveel geïnfecteerden de epidemie begonnen is, dus we moeten Y_0 weten.

Opgave 4.6

$Y_1 = 1{,}8 \times 5 = 9$.
$Y_2 = 16{,}2$;
$Y_3 = 29{,}2$;
$Y_4 = 52{,}5$;
$Y_5 = 94{,}5$.
Voor elke generatie wordt opnieuw met 1,8 vermenigvuldigd. Voor de 5^e generatie moet dat 5 keer, dus dan kunnen we ook uitrekenen: $Y_5 = Y_0 \times 1{,}8^5 = 5 \times 1{,}8^5$. (zie hoofdstuk 5)

Opgave 5.1

$Y_{20} = 5 \times 1{,}8^{20} = 637412$. De vraag is of dit een goede voorspelling is, want dan moeten alle mensen in de 19^e generatie meer dan 600.000 vatbare mensen zijn tegengekomen, die niet al in voorgaande generaties geïnfecteerd zijn geweest. De aanname dat het aantal vatbaren constant blijft wordt steeds ongeloofwaardiger.

Opgave 5.2

a. Na 4 toetjes 1 persoon. Na 5 toetjes 1,25 personen.
b. $Y_k = 0{,}25 + Y_{k-1}$
c. $$\begin{aligned} Y_k &= 0{,}25 + Y_{k-1} \\ &= 0{,}25 + (0{,}25 + Y_{k-2}) \\ &= 0{,}25 + (0{,}25 + (0{,}25 + Y_{k-3}) \\ &= 3 \times 0{,}25 + Y_{k-3} \\ &= 4 \times 0{,}25 + Y_{k-4} \\ &= k \times 0{,}25 + Y_{k-k} \\ &= 0{,}25k + Y_0. \end{aligned}$$
Dus
$$Y_k = 0{,}25k + Y_0$$

Opgave 5.3

a. $V_k = 2M_{k-1}$ en $M_k = V_{k-1}$
b. $V_k = 2M_{k-1} = 2V_{k-2} = 4M_{k-3} = 4V_{k-4}\ldots$, dus
$V_k = 2^{\frac{k}{2}} V_0$ als k een even getal is
$V_k = 2^{\frac{k+1}{2}} M_0$ als k een oneven getal is
$M_k = V_{k-1} = 2M_{k-2} = 2V_{k-3} = 4M_{k-4} = 4V_{k-5} = \ldots$, dus
$M_k = 2^{\frac{k}{2}} M_0$ als k een even getal is.
$M_k = 2^{\frac{k-1}{2}} V_0$ als k een oneven getal is.

Opgave 6.1
Formule (5) geeft $Y_k - Y_{k-1} = RY_{k-1} - Y_{k-1} = (R-1)Y_{k-1}$. Met $k = 1$, $R = 2{,}5$ en $Y_0 = 10$ geeft dat $Y_1 - Y_0 = (2{,}5 - 1) \cdot 10 = 15$.
Dat is dus een toename met 15 exemplaren.

Opgave 6.2
Formule (5) geeft $Y_k - Y_{k-1} = RY_{k-1} - Y_{k-1} = (R-1)Y_{k-1}$. Met $k = 1$, $R = 0{,}6$ en $Y_0 = 20$ geeft dat $Y_1 - Y_0 = (0{,}6 - 1) \cdot 20 = -8$.
Dat is dus een afname met 8 exemplaren.

Opgave 6.3
$Y_k - Y_{k-1} = (R-1)Y_{k-1}$. Omdat $Y_k - Y_{k-1} = 0$ is $Y_k = Y_{k-1}$. Dus $(R-1)Y_{k-1} = 0$. Omdat $Y_{k-1} \neq 0$ is $R = 1$. Als ieder exemplaar vervangen wordt door precies één exemplaar, dan neemt de het aantal geïnfecteerden niet toe en niet af.

Opgave 7.1
Tijdens de latente periode kan de ziekte nog niet verspreid worden, en deze is dus niet van belang in het bepalen van het reproductiegetal.

Opgave 7.2
Afname vindt plaats door infectie, maar een andere mogelijkheid zou vaccinatie kunnen zijn, of sterfte (dit klinkt gek, maar bij dierziektes zoals vogelpest is voor bestrijding wel eens gekozen voor het afmaken van vatbare dieren). Toename vindt plaats door geboorte en doordat mensen immuniteit verliezen.

Opgave 7.3
De β is het gemiddeld aantal contacten dat een geïnfecteerd persoon per tijdseenheid (vaak per dag) maakt waarbij deze de infectie overdraagt. [Dit leidt alleen tot overdracht van infectie als de andere persoon vatbaar is.] Kort gezegd: het aantal besmettelijke contacten per tijdseenheid.

Opgave 7.4

a. De contactfrequentie c wordt uitgedrukt per jaar, dus de drie β's ook: $\beta_1 = cp_1$, $\beta_2 = cp_2$ en $\beta_3 = 0$. Dat laatste omdat er in de derde periode geen seksueel contact meer is.
b. Bedenk dat hier de eerste periode in weken en de tweede in jaren is uitgedrukt. De totale R_0 is de som van de bijdragen van de twee eerste periodes (in de derde zijn geen contacten), en dus is $R_0 = \beta_1 T_1/52 + \beta_2 T_2 = cp_1 T_1/52 + cp_2 T_2$.

c. Vul in de bovenstaande formule in: $R_0 = 5 \times 0{,}5 \times 2/52 + 5 \times 0{,}04 \times 10 = 5/52 + 2 = 2{,}1$.
Hiervan vindt een tiende besmetting plaats in de eerste twee weken, en twee in de 10 jaar erna. In de derde periode vinden geen besmettingen meer plaats.

d. Lijkt weinig, maar het gaat om het aantal contacten met verschillende mensen, en dan is het opeens veel meer!

e. Om te zorgen dat $R < 1$, mag er behalve de 0,1 besmetting tijdens de eerste twee weken nog maximaal 0,9 besmettingen in de periode daarna plaatsvinden. Omdat $\beta_2 = 0{,}2$ besmettingen per jaar, moet de patiënt dus na 4,5 jaar weten dat hij/zij besmet is, want $0{,}2 \times 4{,}5 = 0{,}9$.

Opgave 7.5

Voor alle drie de vragen moet T_{max} worden berekend, de maximale duur van de infectieuze periode tot aan isolatie, die maakt dat er nog maar één infectie plaatsvindt. Deze wordt berekend door het oplossen van de vergelijking $\beta T_{max} = 1$. Opgeteld bij de latente periode geeft $L + T_{max}$ de tijd die nodig is voor een effectieve bestrijding met isolatie.

a. (i) $T_{max} = 1/0{,}45 = 2{,}2$.
(ii) $L = 0{,}5$, dus isolatie moet binnen 2,7 dagen na besmetting.
(iii) 2,7 dagen is minder dan de 4 dagen die haalbaar is. Conclusie: niet effectief.

b. $T_{max} = 1/0{,}14 = 7$. Isolatie moet dus binnen 12 dagen, en dat is meer dan de 8 dagen die haalbaar is. Conclusie: wel effectief.

c. $T_{max} = 1/0{,}23 = 4{,}3$. Opgeteld bij de 3 dagen latent periode moet isoleren dus sneller dan haalbaar is (9 dagen). Bij MKZ is isoleren niet echt isoleren, maar doden van alle dieren op een besmette boerderij. Ook hiermee stop je verdere spreiding.

Opgave 8.1

De reproductieratio is gelijk aan R_0 vermenigvuldigd met de kans dat een contact met een vatbaar persoon wordt gemaakt. Die kans is $1 - v$, dus $R = \beta(1 - v)T$.

Opgave 8.2

De vaccinatiefractie v moet worden opgelost uit $R = 1$, dus uit $\beta(1 - v)T = 1$. Dit resulteert in $v = 1 - 1/(\beta T) = 1 - 1/R_0$.

Opgave 8.3

Dat komt doordat de mensen die niet gevaccineerd worden bij elkaar in de buurt wonen. Op die manier is de fractie niet-gevaccineerden lokaal veel hoger dan het gemiddelde over Nederland en dat maakt verspreiding van het virus gemakkelijker.

Opgave 9.1

Omdat 11,8% van de contacten met een ongevaccineerde is, en van de infectiekans door een gevaccineerde geïnfecteerde nog een achtste overblijft, kan een gevaccineerd persoon $17 \cdot 0{,}118 \cdot (1/8) = 0{,}25$ anderen besmetten.

Opgave 9.2

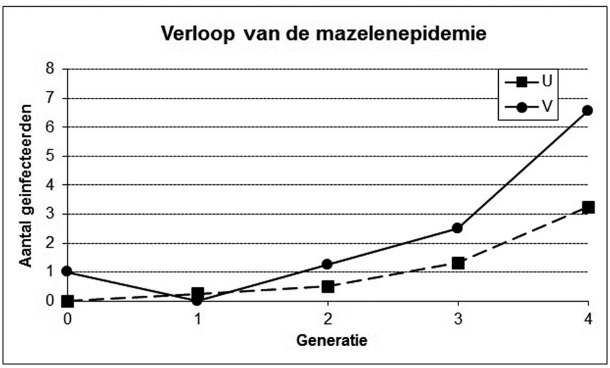
a. $U_0 = 0$, $V_0 = 1$.

b. $U_1 = 2U_0 + 0{,}25V_0 = 0{,}25$ en $V_1 = 5U_0 = 0$.
$U_2 = 2U_1 + 0{,}25V_1 = 0{,}5$ en $V_2 = 5U_1 = 1{,}25$
$U_3 = 2U_2 + 0{,}25V_2 = 1{,}31$ en $V_3 = 5U_2 = 2{,}5$
$U_4 = 2U_3 + 0{,}25V_3 = 3{,}25$ en $V_4 = 5U_3 = 6{,}55$

c. Zie figuur hieronder.

d. $(U_1 + V_1)/(U_0 + V_0) = 0{,}25$
$((U_2 + V_2)/(U_1 + V_1) = 7$
$(U_3 + V_3)/(U_2 + V_2) = 2{,}18$
$(U_4 + V_4)/(U_3 + V_3) = 2{,}57$
De verhouding tussen opeenvolgende generaties is niet constant, maar de laatste twee liggen al vrij dicht bij elkaar. Met enige fantasie lijkt de verhouding naar ongeveer 2,4 of 2,5 te gaan.

e. $U_1/V_1 = 0/0{,}25 = 0$
$U_2/V_2 = 1{,}25/0{,}5 = 2{,}5$
$U_3/V_3 = 2{,}5/1{,}31 = 1{,}91$
$U_4/V_4 = 6{,}55/3{,}25 = 2{,}02$
De verhouding tussen ongevaccineerde en gevaccineerde geïnfecteerden is niet constant, maar de verschillen worden steeds kleiner. De verhouding lijkt naar ongeveer 2 : 1 te gaan.



Opgave 10.1
Er zijn voor het indelen in groepen verscheidene redenen. Een belangrijke reden is dat groepen kunnen verschillen in hoe vatbaar en besmettelijk ze zijn, bijvoorbeeld mensen die gevaccineerd zljn, en mensen die dat niet zijn. Een andere goede reden kan zijn als groepen verschillen in hoeveel contacten ze hebben waarmee ze de infectie kunnen oplopen of verspreiden. Voor een ziekte als influenza die door de lucht wordt overgedragen, worden vaak schoolgaande kinderen als aparte groep opgenomen omdat die onderling veel contacten hebben. Kleine kinderen hebben juist contact met volwassenen, en werkende volwassenen hebben onderling meer contact dan niet-werkende volwassenen.

Opgave 10.2
$a_{12} = 0{,}25$ en $a_{22} = 0$.

Opgave 10.3

a. $$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \text{ en } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. $$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \text{ en } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als het bovenste element van $\mathbf{Y}$ gelijk is aan U dan moet in de eerste rij van $\mathbf{A}$ de getallen van U_{k-}... staan, en dan staat in de eerste kolom telkens de waarde voor U_{k-1}. Kortom: de vector $\mathbf{Y}$ is de sleutel tot wat de elementen in $\mathbf{A}$ betekenen. Het is toegestaan de elementen in $\mathbf{Y}$ te verwisselen, maar dan moet dat ook in $\mathbf{A}$ gebeuren.

c. $$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \text{ en } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zie uitleg bij (b).

Opgave 11.1
De vector Y bevat de aantallen geïnfecteerden in de verschillende groepen, bijvoorbeeld 5 niet-gevaccineerden en 2 gevaccineerden:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Als er nu meer geïnfecteerden bijkomen, bijvoorbeeld 1 gevaccineerde en 3 niet-gevaccineerden, dan kunnen we die in een tweede vector zetten, en om te berekenen hoeveel er nu in totaal zijn, tellen we alle elementen bij elkaar op.

Dan krijgen we de nieuwe Y:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

De elementen a_{ij} van de matrix A, zijn de aantallen van type i die door type j geïnfecteerd worden. Als het model bestaat uit niet-gevaccineerden en gevaccineerden, dan betekent

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bijvoorbeeld dat gevaccineerden geen gevaccineerden besmetten en 0,5 niet-gevaccineerden. Niet-gevaccineerden besmetten 1 gevaccineerde en 2 niet-gevaccineerden. Als nu (bijvoorbeeld door het weer) de infectiviteit van niet-gevaccineerden toeneemt, waardoor ze nog twee extra niet-gevaccineerden besmetten en nog 0,5 wel-gevaccineerden, dan wordt de nieuwe A:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0{,}5 \\ 1{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

Ook hiervoor moesten we de elementen afzonderlijk optellen, om de nieuwe matrix A te verkrijgen.

Opgave 11.2

a. $Y_1 = A \cdot Y_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}25 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}25 \\ 5 \end{pmatrix}$

$Y_2 = A \cdot Y_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}25 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}25 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2{,}25 + 0{,}25 \cdot 5 \\ 5 \cdot 2{,}25 + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}75 \\ 11{,}25 \end{pmatrix}$

b. $Y_2 = A^2 \cdot Y_0 = \begin{pmatrix} 5{,}25 & 0{,}5 \\ 10 & 1{,}25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}25 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 1 \\ 10 \cdot 1 + 1{,}25 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}75 \\ 11{,}25 \end{pmatrix}$

Conclusie: met A^2 vermenigvuldigen is inderdaad hetzelfde als twee keer met A vermenigvuldigen.

Opgave 11.3

a. $2\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b. $2\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 1{,}4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4 & -0{,}6 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

Opgave 11.4

a. $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+6\cdot 1 & 2\cdot 6+6\cdot 1 \\ 1\cdot 2+1\cdot 1 & 1\cdot 6+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$

b.
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}2\cdot 0{,}2+0{,}7\cdot 4 & 0{,}2\cdot 0{,}7+0{,}7\cdot 2 \\ 4\cdot 0{,}2+2\cdot 4 & 4\cdot 0{,}7+2\cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2{,}84 & 1{,}54 \\ 8{,}8 & 6{,}8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0+1\cdot 3+1\cdot 0{,}5 & 0\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 0 \\ 3\cdot 0+2\cdot 3+1\cdot 0{,}5 & 3\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 0 & 3\cdot 1+2\cdot 1+1\cdot 0 \\ 0{,}5\cdot 0+0\cdot 3+0\cdot 0{,}5 & 0{,}5\cdot 1+0\cdot 2+0\cdot 0 & 0{,}5\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3{,}5 & 2 & 1 \\ 6{,}5 & 7 & 5 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Opgave 12.1

$$\begin{pmatrix} 2 & 0{,}25 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dat geeft de volgende vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2\cdot 1+0{,}25\cdot 2 = 1\cdot\lambda \\ 5\cdot 1+0\cdot 2 \quad = 2\cdot\lambda \end{cases}$$

die beiden $\lambda = 2{,}5$ als oplossing hebben. Als $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan zijn er er helemaal geen geïnfecteerden, en dan kan de infectie dus ook niet verder verspreiden. Wiskundigen noemen dat een triviale oplossing: logisch, maar oninteressant.

Opgave 12.2

$\lambda^2 - 2\lambda - 1{,}25 = 0$

Gebruik de abc-formule:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{--2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1{,}25)}}{2\cdot 1} = 1 \pm 1{,}5$$

Dus $\lambda_1 = 2{,}5$ en $\lambda_2 = -0{,}5$.
Bij de eigenwaarde $\lambda_1 = 2{,}5$ is de eigenvector:

$$A \cdot y = \lambda_1 \cdot y$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0{,}25 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ V \end{pmatrix} = 2{,}5 \begin{pmatrix} 1 \\ V \end{pmatrix}$$

Dus $V = 2$.
Het onderste element geeft hetzelfde resultaat, dus één eigenvector is:

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bij de tweede eigenwaarde is de eigenvector:

$$A \cdot y = \lambda_2 \cdot y$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0{,}25 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ V \end{pmatrix} = -0{,}5 \begin{pmatrix} 1 \\ V \end{pmatrix}$$

Dus $V = -10$,

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Opgave 13.1

a. Uitwerken tot een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden, en dat stelsel vervolgens oplossen. Dit geldt ook voor b, c en d.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ 2c_1 - 10c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 - 10c_2 = 1 \end{cases}$$

Dan is: $c_1 = \frac{1}{12}$ en $c_2 = -\frac{1}{12}$.

b. $c_1 = \frac{11}{12}$ en $c_2 = \frac{1}{12}$

c. $c_1 = \frac{13}{3}$ en $c_2 = \frac{2}{3}$

d. $c_1 = 3$ en $c_2 = 0$

Opgave 13.2

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} y_1 + \frac{-1}{12} y_2 = \begin{pmatrix} 1/12 \\ 1/6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/12 \\ 5/6 \end{pmatrix}$$

$$Y_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1/12 \\ 1/6 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1/12 \\ 5/6 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1/12 \\ 1/6 \end{pmatrix} + \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1/12 \\ 5/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = \lambda_1^2 \begin{pmatrix} 1/12 \\ 1/6 \end{pmatrix} + \lambda_2^2 \begin{pmatrix} -1/12 \\ 5/6 \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 1/12 \\ 1/6 \end{pmatrix} + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} -1/12 \\ 5/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}25 \end{pmatrix}$$

$$Y_3 = \lambda_1^3 \begin{pmatrix} 1/12 \\ 1/6 \end{pmatrix} + \lambda_2^3 \begin{pmatrix} -1/12 \\ 5/6 \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 \begin{pmatrix} 1/12 \\ 1/6 \end{pmatrix} + \left(\frac{-1}{2}\right)^3 \begin{pmatrix} -1/12 \\ 5/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}31 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$$Y_4 = \lambda_1^4 \begin{pmatrix} 1/12 \\ 1/6 \end{pmatrix} + \lambda_2^4 \begin{pmatrix} -1/12 \\ 5/6 \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{2}\right)^4 \begin{pmatrix} 1/12 \\ 1/6 \end{pmatrix} + \left(\frac{-1}{2}\right)^4 \begin{pmatrix} -1/12 \\ 5/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 6{,}56 \end{pmatrix}$$

Opgave 13.3

a.
$$A = \begin{pmatrix} 1{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

b.
$$\begin{pmatrix} 1{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ V \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ V \end{pmatrix}$$

c. Los met de abc-formule op: $\lambda^2 - 2{,}2\lambda + 0{,}72 = 0$
$\lambda_1 = 0{,}4$ en $\lambda_2 = 1{,}8$. De grootste van deze twee eigenwaardes is het reproductiegetal, dus $R = 1{,}8$.

Opgave 13.4

a.
$$A = \begin{pmatrix} 17(1-v) & \frac{17(1-v)}{8} \\ \frac{17v}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

b.
$$\frac{289v^2 - 289v}{24} - 17\lambda(1-v) + \lambda^2 = 0$$

c. Op de grensvaccinatiegraad is de reproductieratio gelijk aan 1, dus $\lambda = 1$:
$\frac{289v^2-289v}{24} - 17 \cdot 1 \cdot (1-v) + 1^2 = \frac{289}{24}v^2 + \frac{119}{24}v - 16 = 0$
$\frac{289}{24}v^2 + \frac{119}{24}v - 16 = 0$
Via de abc-formule is $v_1 = -1{,}377$ en $v_2 = 0{,}965$.
Omdat de vaccinatiegraad tussen 0 en 1 moet liggen, is de grensvaccinatiegraad $v_g = 96{,}5\%$
Let op: de reproductieratio is de grootste eigenwaarde, dus niet alleen moet één van de λ's gelijk zijn aan 1, deze moet ook nog eens de grootste zijn. Dit kan je controleren door de verkregen v, in de determinant in te vullen en beide eigenwaardes te berekenen. Dan blijkt dat $\lambda_1 = 1$, en $\lambda_2 = -0{,}41$.

Opgave 14.1

Er kunnen natuurlijk geïnfecteerden bijkomen doordat er vatbaren besmet worden door contact met andere geïnfecteerden, maar ook doordat er geïnfecteerde mensen van buiten bijkomen (bijvoorbeeld ziek terugkomen van vakantie, of immigratie), of doordat er geïnfecteerde kinderen geboren worden (denk bijvoorbeeld aan AIDS).

Geïnfecteerden kunnen verdwijnen door herstel, doordat ze de populatie verlaten (emigratie), of doordat ze sterven. Je zou ook het isoleren van geïnfecteerden kunnen beschouwen als verdwijnen, omdat ze dan niet meer de infectie kunnen verspreiden.

Opgave 14.2

Je zou verwachten dat 1/20 van de geïnfecteerden in de dag erna herstellen. Dat zijn $300/20 = 15$ mensen.

Opgave 14.3

300 mensen maken elk 5 contacten, dat zijn 1500 contacten. Hiervan is 47% met vatbaren, dat zijn 705 contacten met vatbaren. Van deze contacten leidt 17% tot overdracht van het virus, dus dat betekent 120 nieuwe besmettingen.

Opgave 14.4

a. $Y(1) = Y(0) \times (1 + (5 \times 0{,}17 \times 0{,}47 - 1/20) \times 1) = 405$

b. $Y(2) = 405 \times 1{,}35 = 547$
   $Y(3) = 738$
   $Y(4) = 996$
   Het aantal geïnfecteerden stijgt, en het verschil tussen de opeenvolgende tijdstippen wordt steeds groter.

c. $R = c \cdot p \cdot x \cdot T = 5 \times 0{,}17 \times 0{,}47 \times 20 = 8{,}0$.

Opgave 14.5

a. $Y(1) = 1(1 + (40 \times 0{,}10 \times 1 - 0{,}5)) = 4{,}5$
   $Y(2) = 4{,}5 \times 4{,}5 = 20{,}3$
   $Y(3) = 20{,}3 \times 4{,}5 = 91{,}4$

b. $Y(t+1) = 4{,}5Y(t)$

c. $Y(t+0{,}5) = 4{,}5Y(t)$

d. $Y(0{,}5) = 2{,}75$ en $Y(1) = 7{,}56$
   $Y(1{,}5) = 20{,}8$ en $Y(2) = 57{,}2$
   $Y(2{,}5) = 157$ en $Y(3) = 433$

e. $R = c \cdot p \cdot x \cdot T = 40 \times 0{,}1 \times 1 \times 2 = 8{,}0$

Opgave 14.6
Het verschil is dat in het tweede geval het aantal besmettingen per dag groter is en de infectieuze periode korter. Dat betekent dat het aantal besmettingen per geïnfecteerde gelijk is, maar dat deze in veel kortere tijd worden besmet.

Opgave 14.7
In opgave 14.5 is de eerste geïnfecteerde gegroeid naar 4,5 geïnfecteerden na 1 dag. Van de 3,5 nieuwe ziektegevallen zullen er sommige al vroeg in die dag zijn besmet. Deze waren in principe al gelijk in staat om zelf anderen te besmetten, maar hier wordt geen rekening mee gehouden, waardoor dus een deel van de infecties wordt gemist. Door de tijdstap te verkleinen worden de nieuwe infecties al eerder meegeteld in het verdere verspreiden van de ziekte, en dus is een kleinere tijdstap beter. In principe geldt: hoe kleiner hoe beter.

Opgave 15.1
Met de kettingregel differentiëren: $\frac{dY}{dt} = Y(0)e^{(\beta x-\gamma)t} \cdot (\beta x - \gamma)$
Vervolgens geldt: als $Y = Y(0)e^{(\beta x-\gamma)t}$ de oplossing is, dan kun je de één door de ander vervangen: $\frac{dY}{dt} = Y \cdot (\beta x - \gamma)$. Dit is de differentiaalvergelijking (15.2)
In het voorbeeld is $Y(0) = 1$, $\beta = 4$, $x = 1$, en $\gamma = 0{,}5$, dus $Y(t) = e^{3{,}5}$.
Dit resulteert in:
$Y(1) = 33$
$Y(2) = 1097$
$Y(3) = 36316$.

Opgave 15.2

a. Uit hoofdstuk 12: $R_0 = 17$, vaccinatiegraad =88,2%, reductie infectiekans bij
   - contact tussen gevaccineerd geïnfecteerd en gevaccineerd vatbaar: 100 %.
   - contact tussen gevaccineerd geïnfecteerd en ongevaccineerd vatbaar 87,5 %
   - contact tussen ongevaccineerd geïnfecteerd en gevaccineerd vatbaar 66,6%

   Uit hoofdstuk 14: $T = 20$, $\beta = cp = 0{,}85$.
   De gegevens uit hoofdstuk 14:$R_0 = cpT = 17$ dus dat klopt.

b. Elke tijdstap Δt herstelt een proportie 0,05Δt van beide typen, en komen er nieuwe infecties bij:

$$U(t+\Delta t) = U(t) + (\mathbf{0{,}05}U(t) + 0{,}0125V(t))\Delta t$$

$$V(t+\Delta t) = V(t) + (0{,}25U(t) - 0{,}05V(t))\Delta t$$

Voorbeeldberekening voor vetgedrukte **0,05**:

- één ongevaccineerde heeft per dag **0,85** besmettelijke contacten (β).
- hiervan is een gedeellte **11,8 %** met ongevaccineerden.
- deze twee getallen samen leiden tot **0,1** nieuwe ongevaccineerde infecties *per* dag *per* geïnfecteerde.
- verder herstelt elke dag een proportie **0,05** van alle ongevaccineerden
- netto verschil is dus: **0,1-0,05=0,05**.

c. Op $t = 1$:$U(1) = 1{,}05$; $V(1) = 0{,}25$
Op $t = 2$:$U(2) = 1{,}11$; $V(2) = 0{,}50$
Op $t = 3$:$U(3) = 1{,}17$; $V(1) = 0{,}75$

d. Door herschikken van de vergelijkingen uit antwoord (b) zoals in het buikgriepvoorbeeld, kunnen we differentiaalvergelijkingen maken:

$$\frac{dU}{dt} = 0{,}05U + 0{,}0125V$$

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}25U = 0{,}05V$$

Opgave 15.3

a. Toename van het aantal geïnfecteerde mensen is 15 per dag. Afname gaat doordat elke geïnfecteerde gemiddeld een halve dag geïnfecteerd blijft. Met de tijd gemeten in hele dagen, betekent dit een herstelrate van $2Y(t)$:

$$\frac{dY}{dt} = 15 - 2Y$$

b. Met de kettingregel differentiëren: $\frac{dY}{dt} = 7{,}5(-e^{-2t} \cdot -2) = 15e^{-2t}$
Invullen van de oplossing in model:$\frac{dY}{dt} = 15 - 2(7{,}5(1 - e^{-2t})) = 15e^{-2t}$
Beide zijn gelijk, dus de oplossing klopt.

c. Dinsdag is na één dag, dus $Y(1) = 4,7$. Woensdag is twee dagen later, dus dan is $Y(2) = 7{,}4$. Zaterdag is de vijfde dag: $Y(5) = 7{,}5$.
Hier is geen groei te zien die al maar sneller gaat, maar vlakt de toename juist af totdat er 7,5 gevallen zijn. Dat komt doordat het aantal nieuwe besmettingen hier niet aftrankelijk is van het aantal al aanwezige ziektegevallen, maar de toename is constant in de tijd. De infectie verspreidt zich niet door contacten maar door een externe bron.

Opgave 16.1

a. $r = \beta - \gamma$
b. $R_0 = \beta/\gamma$
c. $R_0 = (r + \gamma)/\gamma = 1 + r\gamma$.

Opgave 16.2

a. Als $R_0 = 1$, dan is $\beta = \gamma$, dus dan is $r = 0$.
b. Als $R_0 > 1$, dan is $\beta > \gamma$, dus dan is $r > 0$.
c. Als $R_0 < 1$, dan is $\beta < \gamma$, dus dan is $r < 0$.
d. In de differentiaalvergelijking is de rechterkant negatief als $r < 0$, dus als $R_0 < 1$ neemt het aantal geïnfecteerden af en krijg je geen epidemie. Als de rechterkant positief is, is er een toename van het aantal geïnfecteerden, wat overeenkomt met $r > 0$ en $R_0 > 1$.

Opgave 16.3

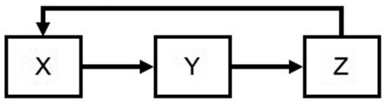
a. De spreiding van een infectie in een populatie gebeurt door willekeurige contacten, en ook het ontstaan van ziekte is niet voor iedereen gelijk. Dat betekent dat de toename van het aantal geïnfecteerden niet 100 % voorspelbaar gebeurt en dat er dus random schommelingen in de aantallen geïnfecteerden te zien zullen zijn. Om die reden kan je niet met volledige zekerheid een r en een R_0 uitrekenen, je kan hem alleen schatten. Wel is het mogelijk een interval voor r te maken, waarbinnen r zich waarschijnlijk zal bevinden (bijvoorbeeld: r ligt met 95% zekerheid tussen 0,11 en 0,15).
b. $R_0 = 1 + 0{,}29 \times 3 = 1{,}87$
c. $R_0 = 1 + 0{,}55 \times 10 = 6{,}5$ [omdat zowel r als T in weken was gemeten, kan de formule gewoon gebruikt worden.

Opgave 17.1

a. 33 kinderen na één dag en 36316 na 3 dagen. Dit is (waarschijnlijk) veel meer dan het aantal aanwezige kinderen.
b. Het klopt niet omdat er geen rekening wordt gehouden met de afname van het aantal vatbaren. Een groot deel van de kinderen die op de tweede en derde dag in aanraking komen met het virus zijn al geïnfecteerd geweest, dus dan kan het aantal nieuwe infecties niet zo snel groeien.

Opgave 17.2

a. Kinderziektes als waterpokken en rode hond, en ziektes als influenza en de vele virussen die verkoudheid veroorzaken.
b. De twee mogelijkheden zijn overlijden (HIV/AIDS, mond-en-klauwzeer, BSE, de pest) of weer volledig vatbaar worden (Salmonella, veteranenziekte).
c. Dat kan je weergeven door een pijl te trekken van de Z-groep naar de X-groep.



Opgave 17.3

$\frac{dX}{dt} = -\beta \frac{XY}{N}$
$\frac{dZ}{dt} = \gamma Y$

Opgave 18.1
Een mogelijke aanpassing is het verlies van immuniteit. Dit zou op twee manieren kunnen, ofwel doordat mensen van de R-groep weer naar de S-groep kunnen gaan (pijl van R naar S), ofwel doordat mensen vanuit de R-groep opnieuw geïnfecteerd kunnen worden (pijl van R naar f). In een open populatie sterven mensen en worden weer mensen geboren, waardoor er telkens nieuwe vatbaren bijkomen en de infectie door kan blijven spreiden. Dit wordt echter ook al gerealiseerd in een gesloten SlR-model waar je meermalen geïnfecteerd kan worden, zoals in de aanpassingen als hierboven beschreven.

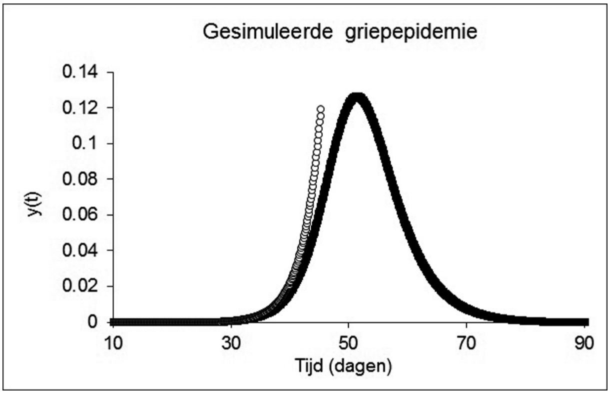
Opgave 18.2

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\frac{X}{N}}{dt} = \frac{1}{N}\frac{dX}{dt} = \frac{1}{N}\left(-\beta\frac{XY}{N}\right) = -\beta\frac{X}{N}\frac{Y}{N} = -\beta xy.$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\frac{Y}{N}}{dt} = \frac{1}{N}\frac{dY}{dt} = \frac{1}{N}\left(\beta\frac{XY}{N} - \gamma Y\right) = \beta\frac{X}{N}\frac{Y}{N} - \gamma\frac{Y}{N} = -\beta xy - \gamma y.$$

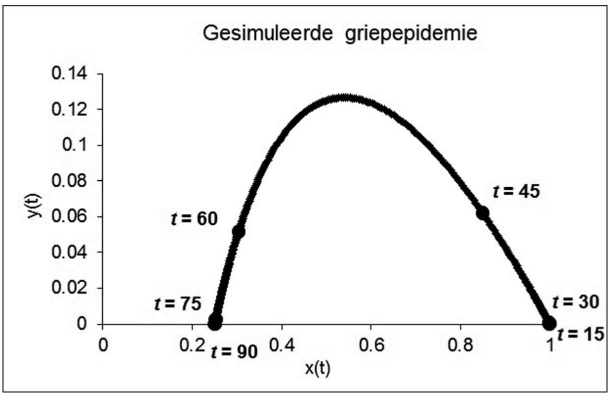
Opgave 18.3

Na iets meer dan 50 dagen. Op dat moment is $y = 0{,}126$, dus dat betekent iets meer dan 2 miljoen mensen besmet (N = 16.000.000). De exponentiële groeiparameter $r = 0{,}7 - 0{,}38 = 0{,}32$. In de figuur zie je dat de exponentiële groei gaat door tot ongeveer dag 40, als nog 95% vatbaar is ($x = 0{,}95$).



Opgave 18.4

Het begin van de epidemie bevindt zich rechtsonder, bij $x = 1$ en $y = 0$. Het begin ligt niet echt in dit punt (dan zou er helemaal geen epidemie komen), maar wel erg dichtbij. De tijd volgt de curve van rechtsonder helemaal naar links, eerst naar boven en dan weer naar beneden.



Opgave 18.5
De primitieve van $-1+\frac{1}{R_0 x}$ is $-x+\frac{1}{R_0}\ln(x)+C$, waarbij C de integratieconstante is. We krijgen dus als vergelijking:

$$y(x) = -x + \frac{1}{R_0}\ln(x) + C$$

Omdat op $t = 0$ zowel y als x bekend zijn ($y = 0, x = 1$), kan C berekend worden $0 = -1 + C$, dus $C = 1$,
en dit resulteert in de functie

$$y(x) = 1 - x + \frac{1}{R_0}\ln(x)$$

Opgave 18.6
De piek van de epidemie is te vinden door $y'(x) = 0$ op te lossen:

$$y' = -1 + \frac{1}{R_0 x}$$

Dus $x_{piek} = \frac{1}{R_0}$, met $y_{piek} = 1 - \frac{1}{R_0}(1 + \ln(R_0)$.

De fractie vatbaren die overblijft na de epidemie is te vinden door $y(x) = 0$ op te lossen (snijpunt met de x - as):

$$y(x) = 1 - x + \frac{1}{R_0}\ln(x) = 0$$

Dus $\ln(x) = R_0(x-1)$. Dit valt niet verder te vereenvoudigen, en een oplossing kan alleen gevonden worden door benadering. Als $R_0 = 0{,}7/0{,}38 = 1{,}8$, dan is $x = 0{,}26$. Dit betekent dat 26% van de populatie niet besmet wordt tijdens de epidemie.