

Dit document zal worden aangevuld terwijl het college gegeven wordt. Aan het eind van het college, 14 april, is de informatie weer compleet.

Opgave 1. Het seizoen hangt alleen af van de stand van de aardas t.o.v. de richting naar de zon. De richting van de aardas is vast. Of de richting naar de zon verandert door beweging van de aarde of door beweging van de zon maakt voor de verklaring van de seizoenen niet uit. Trek lijn 1 van het centrum van de zon naar het centrum van de aarde, en lijn 2 van de zuidpool op aarde naar de noordpool. Midwinter en midzomer staat het vlak door lijnen 1 en 2 loodrecht op de aardbaan, in december is de zuidpool dichterbij de zon, in juli de noordpool. Bij de evennachten staat lijn 1 loodrecht op lijn twee, en staan beide polen even ver van de Zon.

Opgave 2. Het baanvlak van de zon, de ecliptica, maakt een hoek van 23.5° met het vlak van de evenaar. De kortste afstand van de zon tot de hemelpool is 66.5° . Deze hoek bepaalt waar de zon t.o.v. het noorden ondergaat. Bij precessie onder constante hoek van 23.5° verandert deze minimale hoek niet; wat verandert is de ster waarnaar de aardas wijst, d.w.z. de positie van de hemelse noordpool tussen de sterren.

Opgave 3. 24 uur correspondeert met de omtrek van de aarde aan de evenaar, dus met 40000 km. 1 minuut correspondeert met $40000/(24 \times 60) \simeq 27.8$ km. Op breedte b is de fout in positie $27.8 \cos b$ km.

Opgave 4. Ga uit van de wet van Kepler, Vgl. 2.1, pas deze op de Aarde en op Venus toe, en deel op elkaar:

$$\left(\frac{P_V}{1 \text{ jr}}\right)^2 = \left(\frac{a_V}{AU}\right)^3 \frac{M_\odot + m_A}{M_\odot + m_V} \simeq \left(\frac{a_V}{AU}\right)^3 \left(1 + \frac{m_A}{M_\odot} - \frac{m_V}{M_\odot}\right)$$

a. verwaarloos de planeetmassa's:

$$\frac{a_V}{AU} = \left(\frac{224.7}{365.25}\right)^{2/3} \simeq 0.723$$

b. De reistijd over de astronomische eenheid is: $AU/c \simeq 499$ s. De reistijd naar Venus en terug is dan:

$$\frac{2(AU - a_V)}{c} = \frac{2AU}{c}(1 - 0.723) \simeq 276 \text{ s}$$

c. De volledige formule (zie boven):

$$\frac{a_V}{AU} = \left(\frac{P_V}{1 \text{ jr}}\right)^{2/3} \left(1 + \frac{m_V}{M_\odot} - \frac{m_A}{M_\odot}\right)^{1/3} \simeq \left(\frac{P_V}{1 \text{ jr}}\right)^{2/3} \left(1 - \frac{m_A - m_V}{3M_\odot}\right)$$

de relatieve fout door verwaarlozing van de massa van de Aarde is dus $m_A/(3M_\odot)$, evenredig met m_A/M_\odot ; idem voor Venus m_V/M_\odot .

d) de in a) gemaakte fout, ten opzichte van 1, is dus:

$$\frac{m_A - m_V}{3M_\odot} = \frac{m_A}{M_\odot} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{m_V}{m_A}\right) \simeq \frac{1}{332946} \frac{1}{3} (1 - 0.815) \simeq 1.85 \times 10^{-7}$$

Opgave 5a. Met $M = (\pi/6)\rho d^3$ en $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$ vinden we voor de massa's M_1, M_o, M_2 bij de beneden-grens ($d = 0.1 \text{ m}$), normering ($d = 4 \text{ m}$), en bovengrens ($d = 10^3 \text{ m}$) respectievelijk $1.57, 10^5$ en $1.57 \times 10^{12} \text{ kg}$. Omdat $d \propto M^{1/3}$ geldt dat $N(> M) \propto M^{-2.73/3} = M^{-0.91}$. We kennen de normering voor M_o , zodat

$$N(> M) = 1 \text{ jaar}^{-1} \left(\frac{M}{M_o}\right)^{-0.91}$$

b. Schrijf het aantal meteorieten per jaar met massa M als $N(M)dM = N_o M^p dM$ dan geldt (als $p + 1 < 0$):

$$N(> M) = \int_M^\infty N_o M'^p dM' = \frac{N_o M^{p+1}}{-(p+1)} = \frac{N_o M_o^{p+1}}{-(p+1)} \left(\frac{M}{M_o}\right)^{p+1}$$

Uit de laatste twee vergelijkingen volgt $N_o M_o^{p+1}/[-(p+1)] = 1$ per jaar, en $p+1 = -0.91$. Voor de massa die op Aarde terecht komt vinden we

$$M_{tot} = \int_{M_1}^{M_2} N(M)M dM = \int_{M_1}^{M_2} N_o M^{p+1} dM = \frac{N_o M_o^{p+2}}{p+2} \left(\frac{M_2}{M_o}\right)^{p+2} \left[1 - \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{p+2}\right]$$

Gebruik makend van de normeringen die we boven vonden, schrijven we dit als

$$M_{tot} = M_o (\text{jaar}^{-1}) \frac{-(p+1)}{p+2} \left(\frac{M_2}{M_o}\right)^{p+2} \left[1 - \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{p+2}\right]$$

Vul nu in $p+1 = -0.91$, en M_1, M_o, M_2 uit a), dan

$$M_{tot} = 10^5 \text{kg jaar}^{-1} \frac{0.91}{0.09} (1.57 \times 10^7)^{0.09} [1 - 0.083] \simeq 4 \times 10^6 \text{kg jaar}^{-1}$$

Om uit te rekenen hoeveel er tot M_o valt, vullen we in bovenstaande vergelijking voor M_{tot} in $M_2 = M_o$, zodat

$$M_{tot}(M_1 < M < M_o) = 10^5 \text{kg jaar}^{-1} \frac{0.91}{0.09} [1 - 0.37] = 10^6 \text{kg jaar}^{-1}$$

Opgave 6a. Radioactief verval van element X wordt beschreven door $X(t) = X(0)\exp(-\lambda t)$. Voor koolstof-14 kennen we de halveringstijd $t_{1/2} = 5730$ jr. We gebruiken dit om λ voor koolstof-14 te bepalen:

$$0.5 = \exp(-\lambda t_{1/2}) \Rightarrow \lambda = (-\ln 0.5)/t_{1/2} = \ln 2/t_{1/2}$$

We nemen aan dat de hoeveelheid koolstof-14 $X(0)$ in de aardatmosfeer niet verandert, zodat de gevraagde verhouding is: $X(t)/X(0) = \exp(-\ln 2 \times 4500/5730) = \exp(-0.544) = 0.58$

b. We weten nu dat de hoeveelheid $X(0)$ wel een functie van de tijd is, noem de gecalibreerde waarde $X_c(0)$. Dan weten we: $X(t) = X_c(0) \exp(-\ln 2 \times 5150/5730) = X(0) \exp(-\ln 2 \times 4500/5730)$ zodat $X_c(0)/X(0) = \exp(\ln 2 \times (5150 - 4500)/5730) = 1.082$

a'. een alternatieve schijfwijze is: $X(t) = X(0)2^{-t/t_{1/2}}$. Hiermee: $X(t)/X(0) = 2^{-4500/5720} = 0.58$

b'. $X(t) = X_c(0)2^{-5150/5730} = X(0)2^{-4500/5730}$ dus $X_c(0)/X(0) = 2^{(5150-4500)/5730} = 1.082$

Opgave 7a. het oppervlak van een bol op afstand a is $4\pi a^2$. De doorsnee van de planeet met straal R_p met deze bol heeft een oppervlak πR_p^2 . De fractie onderschept licht is dus: $f = (1/4)(R_p/a)^2$

b. de planeet met temperatuur T_p straalt uit: $L_p = 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4$. De planeet vangt in: $(1/4)(R_p/a)^2 L_\odot$. Stel deze twee aan elkaar gelijk:

$$\sigma T_p^4 = \frac{L_\odot}{16\pi a^2} \quad (1)$$

c. neem de logaritme van de laatste vergelijking:

$$\log T_p = \frac{1}{4} \log \frac{L_\odot}{16\pi \sigma R_\odot^2} - \frac{1}{2} \log \frac{a}{R_\odot} = 3.611 - 0.5 \log \frac{a}{AU} \quad (2)$$

Opgave 8 Neem een optimale verhouding aan van 1.5 kilo zuurstof per kilo benzine, dan heb je per kilo zonsmateriaal 1.0/2.5 kg. benzine en 1.5/2.5 kg zuurstof. $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg correspondeert met $2 \times 10^{30}/2.5$ liter benzine ofwel $2 \times 10^{30} \times 3 \times 10^7 = 6 \times 10^{37}/2.5$ J. Deel door de lichtkracht $L_\odot = 4 \times 10^{26}$ J/s, geeft een leeftijd van 2000 jaar. Dit is een zevende van onze ruwe schatting, blijkbaar geeft benzine plus zuurstof per proton maar 1/7 eV.

Opgave 9. Een jaar heeft 365,25 dagen, en $n = 365.25/29.5306 = 12.3685$ synodische maanden. Het aantal siderische maanden is 1 groter, dus 13.3685, en de lengte van de siderische maand is $365.25/13.3685 = 27.322$ dagen.

Opgave 10. Niet alle duimen zijn even breed, en niet alle armen even lang! De volgende getallen zijn daarom benaderde waarden.

a. een (stevige) duim is typisch 2.5 cm, de afstand op armlengte is ongeveer 70 cm. De hoek in radialen is $2.5/70 \simeq 0.036$ radialen. 1 radiaal is $360/(2\pi)$ graden; de duim is dan $0.036 \times 360/(2\pi) \simeq 2$ graden.

b. 2 graden is 2×3600 boogseconden, ofwel 7.2 miljoen milliboogseconden.

c. $1''$ correspondeert met $2\pi/(360 \times 3600) \simeq 4.848 \times 10^{-6}$ radialen; 1 milliboogseconde dus met

4.848×10^{-9} radialen. Noem de afstand in cm d dan geldt $4/d = 4.848 \times 10^{-9}$ radialen, ofwel $d = 10^9 \times 4/4.848 = 0.83 \times 10^9$ cm ofwel 8300 km.

Opgave 11a.

$$\left(\frac{P}{jr}\right)^2 = \left(\frac{a}{AU}\right)^3 \Rightarrow \frac{a}{AU} = (247.69)^{2/3} = 39.44 \quad (3)$$

b. $v = 2\pi a/P$, dus voor Aarde: $v_A = 2\pi AU/jr$ en voor Pluto: $v_P = 2\pi \times 39.44 AU/247.69 jr = 2\pi * 0.159 AU/jr$.

c. In oppositie staan de Aarde en Pluto op een lijn, hun afstand is $39.44 AU - 1 AU = 38.44 AU$. Hun snelheden zijn (voor aangenomen cirkelbeweging) evenwijdig, en het snelheids verschil is dus: $v_A - v_P = 2\pi(1 - 0.159) AU/jr = 2\pi(1 - 0.159) AU/365.25 \text{dag} = 0.0145 AU/\text{dag}$. De hoek die Pluto in een dag aflegt is dus (in radialen):

$$\theta = \frac{0.0145 AU}{38.33 AU} = 3.763 \times 10^{-4} = 77.6'' \quad (4)$$

In zes dagen dus: $7.76'$.

Opgave 12. –

Opgave 13a. Let op! De afstand in rechte klimming, uitgedrukt in boogseconden, schaaft met $\cos \delta$. Zie de tekst bij Tabel 10.3. $\Delta\alpha \equiv \alpha_1 - \alpha_2 = 1.5^s = 15 \cos \delta \times 1.5 = 11.3''$ $\Delta\delta \equiv \delta_1 - \delta_2 = -15.6''$. De hoekafstand afstand tussen de sterren is dus: $d = \sqrt{\Delta\alpha^2 + \Delta\delta^2} = 19.2''$. Per definitie hebben we: $1''$ op 1 pc correspondeert met 1 AU. Dus $1''$ is 1.347 AU op 1.347 pc, en $19.2''$ is $19.2 \times 1.347 = 25.9$ AU op 1.347 pc.

b.

$$\left(\frac{P}{jr}\right)^2 = \left(\frac{a}{AU}\right)^3 \frac{M_\odot}{M} \Rightarrow \frac{a}{AU} = \left(\frac{P}{jr}\right)^{2/3} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/3} = 79.9^{2/3} \times 2.02^{1/3} = 23.5 AU \quad (5)$$

c. Twee factoren dragen bij. Het antwoord uit a) geeft alleen de afstand loodrecht op de gezichtslijn, die kleiner is dan de volle afstand. En: als de baan eccentrisch is kan de afstand nu groter zijn dan de halve lange as a . In dit geval domineert het tweede effect.

d. Met σ de fout, geldt: $\sigma_d/d = \sigma_p/p$ dus $\sigma_d = d * \sigma_p/p = 1.347^2 \times 0.0014 = 2.54 \times 10^{-3}$ pc of uitgedrukt in AU: $\sigma_d = 523$ AU. Dus: de fout in afstand langs de gezichtslijn is veel groter dan de loodrechte afstand.

e. Uit b) weten we dat $a = 23.5$ AU, en omdat de eccentriciteit $e < 1$, hebben we voor de maximale afstand tussen de sterren: $a_{\max} = (1+e)a < 2a = 46.9$ AU. De afstand loodrecht op de gezichtslijn is 25.9 AU, dus de maximale afstand langs de gezichtslijn is $\sqrt{46.9^2 - 25.9^2} = 39.1$ AU.

f. De relatieve hoeksnelheid is $\Delta\mu = \sqrt{\Delta\mu_{\alpha^*}^2 + \Delta\mu_\delta^2} = \sqrt{0.078^2 + 0.47^2} = 0.48''$. Dit correspondeert met een relative snelheid loodrecht op de gezichtslijn: $\Delta v_\perp = 4.74 \times d\Delta\mu = 3.0$ km/s. Het verschil in snelheid langs de gezichtslijn is $\Delta v_r = 3.9$ km/s. Het totale snelheidsverschil tussen de sterren is dus $v_o \equiv \sqrt{\Delta v_\perp^2 + \Delta v_r^2} = 4.95$ km/s.

Schrijf de potentiële en kinetische energie als

$$E_{\text{pot}} = -\frac{GM_1M_2}{r} \quad \text{en} \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2} v_o^2$$

dan is de dubbelster is gebonden als

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} < 0 \quad \Rightarrow \quad E_{\text{kin}} < |E_{\text{pot}}|$$

De snelheden zijn gemeten, voor de potentiële energie moeten we r kennen: de absolute waarde van de potentiële is het kleinst als $r = a_{\max}$. Als de dubbelster voor die waarde gebonden is, is ze dat ook voor alle andere mogelijke waardes voor a . Dus bereken:

$$\frac{E_{\text{kin}}}{|E_{\text{pot}}|} = \frac{a_{\max} v_o^2}{2G(M_1 + M_2)} = \frac{4.95^2}{8.73^2} < 1$$

Opgave 14. Na een uur staat de ster naar rechts. Een ster die een rechte klimming heeft die een uur hoger is, d.w.z. eerst links van het zuiden stond, staat nu in het zuiden.

Opgave 15. De fout voor Hipparcos is een vijfde van de fout vroeger. Als de fout x is, heeft een parallax van $10x$ een fout van tien procent, en dat correspondeert met een afstand $d_{10} = 1/(10x)$

parsec. Vóór Hipparcos was $x = 0.005$, dus $d_{10} = 20$ pc. Met Hipparcos is $x = 0.001$, dus $d_{10} = 100$ pc. Een bol met een straal van 100 pc is $5^3 = 125$ keer zo groot als een bol met een straal van 20 pc. Dus verwachten we dat Hipparcos 125 keer zoveel sterren met een parallax fount minder dan 10 procent heeft gemeten.

Opgave 16. De maximale verplaatsing vinden we als de snelheid van de Aarde loodrecht op de richting van de Aarde naar de ster staat. De snelheid van de Aarde volgt uit $v_A = \sqrt{GM_\odot/AU}$ en is 30 km/s. De maximale aberratie is dus $v/c = 10^{-4}$ radialen, ofwel $360 \times 60 \times 60 / (2\pi) \times 10^{-4} \simeq 20''$.

Opgave 17. Omdat alle sterren op de foto in vrijwel dezelfde richting staan, hebben ze allemaal dezelfde aberratie. De relatieve posities zijn daarom niet beïnvloed.

Opgave 18. 550 nm is 5.5×10^{-7} m, en daarmee vinden we voor de energie van 1 foton op die golflengte:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \simeq 3.614 \times 10^{-19} \text{ J}$$

De visuele lichtkracht van de Zon (zie p.34) is $L_{V\odot} = 5.6 \times 10^{23} \text{ W nm}^{-1}$. Het aantal visuele fotonen dat de zon per seconde verlaat is dan

$$N_{V\odot} = \frac{L_{V\odot}}{E} = 1.56 \times 10^{42} \text{ s}^{-1} \text{ nm}^{-1}$$

Merk op dat de energie E correspondeert met 2.26 eV. Uit de flux van de Zon bij de Aarde ($2 \text{ W m}^{-2} \text{ nm}^{-1}$) kunnen we nog berekenen dat het aantal visuele fotonen dat per seconde per vierkante meter aankomt 5.53×10^{18} is.

Opgave 19. a. De Rayleigh-Jeans benadering geldt als $x \equiv hc/(\lambda kT) \ll 1$. Voor kleine x geldt: $e^x - 1 \simeq 1 + x - 1 = x$. Voor de Planckfunctie 3.10 hebben we dan:

$$B_\lambda d\lambda \simeq \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{hc/(\lambda kT)} = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4}$$

b. De verhouding van de flux in de Rayleigh-Jeans benadering op twee golflengtes is $f_1/f_2 = (\lambda_2/\lambda_1)^4$. Voor B en V hebben we respectievelijk $\lambda = 440$ en 550 nm. Dus:

$$\log \frac{f_{550}}{f_{440}} = 4 \log \frac{440}{550} = -0.388$$

c. B_λ is maximaal als $dB_\lambda/d\lambda = 0$. Door we in deze vergelijking B_λ volgens Vgl.3.10 invullen, de afgeleide naar λ berekenen, en de verschillende termen op één noemer brengen, kunnen we de gevraagde vergelijking vinden. We kunnen veel schrijfwerk (en kans op fouten!) besparen, door gebruik te maken van twee tussen-formules. De eerste:

$$\frac{d \ln B_\lambda}{d\lambda} = \frac{1}{B_\lambda} \frac{dB_\lambda}{d\lambda}$$

zodat, $dB_\lambda/d\lambda = 0$ nul is als $d \ln B_\lambda/d\lambda$ nul is, mits B_λ zelf niet nul is. We weten echter dat $B_\lambda > 0$ voor alle λ . De tweede is de kettingregel:

$$\frac{dB_\lambda}{dx} = \frac{dB_\lambda}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dx}$$

zodat $dB_\lambda/d\lambda = 0$ nul is als $d \ln B_\lambda/dx$ nul is, mits $d\lambda/dx$ ongelijk nul is, hetgeen voor alle λ geldt. Met $x = hc/(\lambda kT)$ hebben we dan:

$$\frac{dB_\lambda}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{d \ln}{dx} \frac{x^5}{e^x - 1} = 5 \frac{d \ln x}{dx} - \frac{d \ln(e^x - 1)}{dx} = 0$$

Schrijf het rechterstuk uit:

$$\frac{5}{x} - \frac{e^x}{e^x - 1} = 0 \Rightarrow 5e^x - 5 - xe^x = 0 \Rightarrow e^{-x} + \frac{x}{5} - 1 = 0 \quad \text{QED}$$

d. We substitueren $x = hc/(\lambda kT)$ zodat $\lambda = hc/(xkT)$ en $d\lambda = hc/(x^2 kT) \times dx$. Met Vgl.3.10 volgt dan

$$\int_0^\infty B_\lambda d\lambda = \int_0^\infty 2\pi hc^2 \left(\frac{xkT}{hc} \right)^5 \frac{1}{e^x - 1} \frac{hc}{x^2 kT} dx = \frac{2\pi h^3 k^4 T^4}{c^2} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

en door het antwoord van de integraal ($\pi^4/15$) in te vullen, krijgen we Vgl.3.11.

Opgave 20 $L_\odot = 4\pi R_\odot^2 F_\odot$. Invullen van L_\odot en R_\odot uit Tabel 11.3 geeft: $F_\odot = 6.33 \times 10^7 \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2}$. $L_{V_\odot} = 4\pi R_\odot^2 F_{V_\odot}$. Invullen van L_{V_\odot} en R_\odot uit Tabel 11.3 geeft: $F_{V_\odot} = 9.20 \times 10^4 \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ nm}^{-1}$. De verhouding is 687.5 nm ; door bovenstaande vergelijkingen op elkaar te delen zien we dat $F_\odot/F_{V_\odot} = L_\odot/L_{V_\odot}$.

Voor de bolometrische flux van de Planck-functie geldt: $F = \sigma T^4$, met σ uit Tabel 11.3 en $T = 5780 \text{ K}$ vinden we: $F = 6.33 \times 10^7 \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2}$, zoals verwacht. Voor de flux op 550 nm , i.e. $\lambda = 550 \times 10^{-9} \text{ m}$, vinden we met $T = 5780 \text{ K}$: $x \equiv hc/\lambda kT = 4.528$, en hiermee met Vgl.3.11: $F_{550} = 8.12 \times 10^{13} \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ m}^{-1}$. Let op de laatste dimensie: per meter! Om het meer inzichtelijke per nm te krijgen, moeten we delen door het aantal nanometers in een meter: 10^9 , en dan krijgen we $8.12 \times 10^4 \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ nm}^{-1}$.

Opgave 21 a. $T = 50000 \text{ K}$ en $\lambda = 5.5 \times 10^{-7} \text{ m}$. Eerst vinden we $x = hc/(\lambda kT) = 0.523$, zodat $e^x - 1 = 0.688$; verder invullen in Vgl.5.10 geeft $B_{550} = 7.45 \times 10^{15}/0.688 = 1.08 \times 10^{16} \text{ W m}^{-2} \text{ m}^{-1}$. Benaderd met Vgl.3.12 vinden we $B_{550} \simeq 1.42 \times 10^{16} \text{ W m}^{-2} \text{ m}^{-1}$. Let op! Omdat we alle grootheden in SI hebben ingevuld, zijn de antwoorden ook in SI, en dus is de flux (formeel) over een golflengte-interval van een meter gegeven. Omrekenen naar een meer realistisch golflengte-interval 'per nm' gebeurt door te delen door het aantal nm in een meter, 10^9 . We vinden dan voor de Planck functie: $B_\lambda = 1.08 \times 10^7 \text{ W m}^{-2} \text{ nm}^{-1}$. en voor de Rayleigh-Jeans benadering: $B_\lambda \simeq 1.42 \times 10^7 \text{ W m}^{-2} \text{ nm}^{-1}$. We zien dat de Rayleigh-Jeans benadering een iets meer dan 30% te groot antwoord geeft.

b. De energie die het steroppervlak verlaat is gelijk aan de energie die door de bol met straal d stroomt. Voor een sterstraal R , en flux bij aarde f_λ volgt $L_\lambda = 4\pi R^2 B_\lambda = 4\pi d^2 f_\lambda$ en $f_\lambda = B_\lambda (R/d)^2$

c. Analoog voor de bolometrische lichtkracht en flux: $B = \sigma T_{\text{eff}}^4 = 3.54 \times 10^{11} \text{ W m}^{-2}$. $L = 4\pi R^2 B$ en $f = B (R/d)^2$

d. Voor de bolometrische correctie volgt: $L/L_V = B/B_V = 3.28 \times 10^4 \text{ nm}$. en de logarithme hiervan is 4.52. Voor de Zon hebben we $L_\odot/L_{V_\odot} = f_\odot/f_{V_\odot} = 1370/2 = 685$. De bolometrische correctie in zonseenheden is dan: $L/L_V (L_\odot/L_{V_\odot}) = 47.9$; de logarithme hiervan is 1.68. De heetste ster in Tabel 4.1 heeft een temperatuur van iets minder dan 40000 K , en $\log L/L_V (L_\odot/L_{V_\odot}) = 5.10 - 3.71 = 1.39$; voor de hetere ster van 50000 verwachten we een nog grotere (absolute waarde van de) bolometrische correctie, zoals gevonden. In Figuur 3.8 is onze berekening voor een ster die in het rechter plaatje nog boven het meest linkse punt zal liggen.

Opgave 22 We zien eclipsen, dus ligt de inclinatie dicht bij 90° . De maximale snelheid van de zwaarste ster (die de kleinste snelheid heeft) is ongeveer $v_1 \simeq 120 \text{ km/s}$, die van de lichtste ster $v_2 \simeq 200 \text{ km/s}$. Met Vgl.3.18 hebben we dan: $v_1 + v_2 = (2\pi/P)(a_1 + a_2) = 2\pi a/P$. Invullen van de snelheden en de baanperiode (1.85 d, zie tekst bij Figuur 3.14) geeft: $a = 320 \cdot 10^3 (1.85 \cdot 24 \cdot 3600)/(2\pi) = 8.1 \cdot 10^9 \text{ m}$. Met Vgl.3.16 volgt nu $M_1 + M_2 = (2\pi/P)^2 a^3/G = 1.55 \cdot 10^{-95} \cdot 4 \cdot 10^{29}/G = 1.25 \cdot 10^{31}$ In zonseenheden hebben we $a = 11.6 R_\odot$ en $M_1 + M_2 = 6.2 M_\odot$. Uit de snelheidsverhouding hebben we met Vgl.3.17 en 3.18 ook de massaverhouding: $M_1/M_2 = v_2/v_1 \simeq 200/120$, zodat $M_2 \simeq 0.6 M_1$, $M_1 \simeq 6.2/1.6 = 3.9 M_\odot$. en $M_2 = 2.3 M_\odot$. Gegeven de ruwheid van de schatting van de snelheden is dit een redelijk antwoord. Merk op dat de massa's kloppen met de spectraal-typen: zie Tabel 4.1.

Opgave 23 Om de monochromatische lichtkracht te berekenen moeten we de flux van de ster vermenigvuldigen met $4\pi d^2$: $L_\lambda = 4\pi d^2 f_\lambda$. Als de procentuele fout in de paralax 10% is, is de fout in d ook 10%, en de fout in d^2 en daarmee in L_λ 20%. De fout in $\log L_V$ is dan ongeveer $\log 1.2 \simeq 0.08$. Dit is veel minder dan de breedte van de hoofdreeks op vaste kleur (merk op dat de kleur niet van de afstand afhangt), en dus kan de breedte van de hoofdreeks niet uit meetfouten alleen worden verklaard.

Opgave 24 a. Noem de flux door een vierkante meter aan het oppervlak van de ster F_λ , dan geldt: $L_\lambda = 4\pi R^2 F_\lambda$. Volgens de onderstelling geldt nu dat F_λ voor de hoofdreeksster en de witte dwerg gelijk is. Hiermee volgt $L_{V,hr}/L_{V,wd} = (R_{hr}/R_{wd})^2$. In Figuur 4.1 zien we dat de witte dwergen een visuele lichtkracht hebben die ongeveer 10^{-4} is van de visuele lichtkracht van de hoofdreeks, zodat $R_{wd} \simeq 0.01 R_{hr}$.

b. Bij $\log f_V/f_B = -0.18$ geeft de rechterfiguur $\log T \simeq 3.9$ zodat $T \simeq 8000 \text{ K}$ is. (Zie ook Tabel 4.1, waar we zien dat een hoofdreeksster met $\log f_v/f_B = -0.18$ ongeveer deze temperatuur heeft.)

c. De ster wordt kouder, dus wordt f_V/f_B groter. De koudere temperatuur leidt ook tot een lagere flux, dus tot een lagere visuele lichtkracht. Samen betekent dit dat een koelende witte dwerg in het Hertzsprung-Russell diagram naar rechts en naar beneden beweegt.

Opgave 25 Omdat een metaalarme ster onder de hoofdreeks zit, heeft ze een lagere flux dan een hoofdreeksster bij dezelfde kleur. Als we niet weten dat de ster metaalarm is, kennen we de ster een te hoge lichtkracht toe (namelijk de lichtkracht van de hoofdreeksster bij die kleur), en dan moeten we haar op een grotere afstand zetten om de gemeten flux te verklaren.

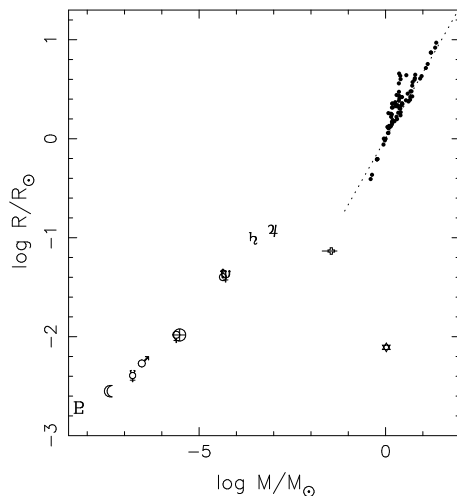
Opgave 26 a. In Tabel 3.3 staat Achernar, een ster met spectraal-type B3V; dat is dicht bij B2.5V, dus nemen we voor de B2.5V ster dezelfde visuele lichtkracht: $\log L_V/L_{V\odot} = 3.03$. De verhouding van de fluxen (in het visueel) van de hoofdreeks-ster (hr) en de superreus (sr) wordt gegeven door de verhouding van de lichtkrachten: $\log(f_{sr}/f_{hr}) = \log(L_{sr}/L_{hr}) = 4.08 - 3.03$ dus $f_{sr}/f_{hr} \simeq 11$. De totale flux is dus $12f_{hr}$ en de hoofdreeksster levert daarvan $1/12$.

b. De waargenomen kleur van Antares is $\log f_V/f_B = 0.484$, zodat de roodverkleuring wordt gegeven door $\log f_V^c/f_B^c - \log f_V/f_B = 0.42 - 0.484 = -0.064$. Dit verschil is ook gelijk aan $(\tau_V - \tau_B) \log e$, of met $\tau_B = 1.32\tau_V$ gelijk aan $-0.32\tau_V \log e$, zodat $\tau_V = 0.49$.

c. De visuele lichtkracht van de superreus is $L_V = L_{V\odot}10^{4.08} = 5.6 \times 10^{23}10^{4.08} = 6.73 \times 10^{27} \text{ W nm}^{-1}$. Met de onderstelling dat de totale flux wordt gedomineerd door de superreus hebben we met de in Tabel 3.3 gegeven waargenomen flux van Antares: $f_V^c = f_V e^{\tau_V} = 10^{-10.83} e^{0.49} = 2.41 \times 10^{-11} \text{ W m}^{-2} \text{ nm}^{-1}$. zodat $d^2 = L_V/(4\pi f_V^c) = 2.22 \times 10^{37} \text{ m}^2$ en $d = 4.71 \times 10^{18} \text{ m} = 153 \text{ pc}$. De uit de parallax volgende afstand $185 \pm 58 \text{ pc}$ is hiermee in overeenstemming.

Opgave 27 Voor Gliese B moeten we de straal berekenen uit de lichtkracht en de temperatuur:

$$\log \frac{R}{R_\odot} = 0.5 \log \frac{L}{L_\odot} - 2 \log \frac{T}{5780} = -2.5 + 2 \log \frac{1200}{5780} = -1.13$$

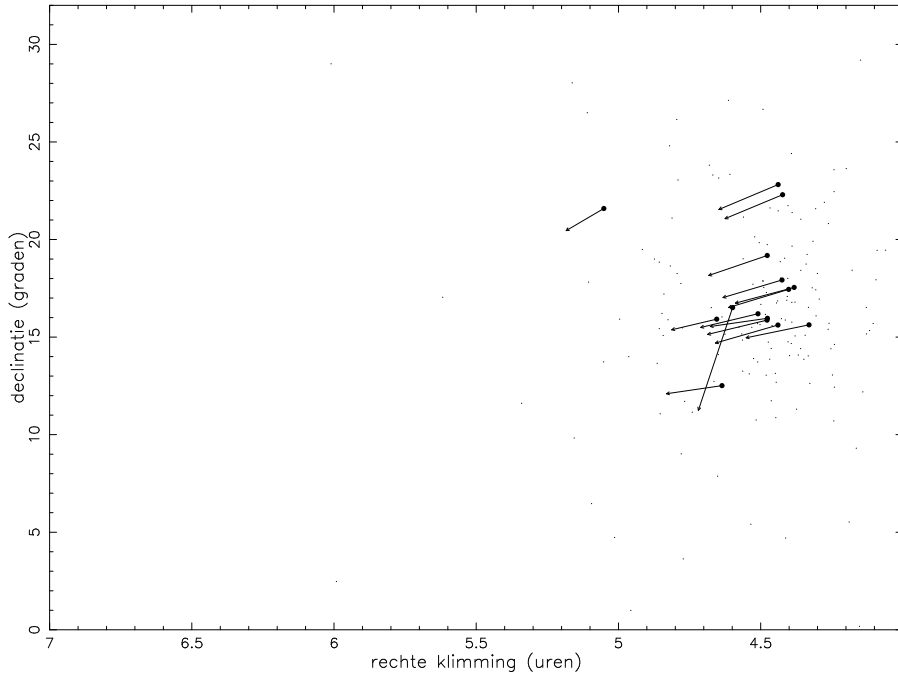


Opgave 28 In het Hertzsprung-Russell diagram van Collinder 121 zien we dat de $\log f_v/f_B$ van de blauwste sterren dicht bij -0.388 ligt: de roodverkleuring is dus klein en we verwaarlozen dit. De parallax is gemiddeld net onder 2 mas , de afstand is dus net meer dan 500 pc . De top van de hoofdreeks ligt bij $f_V \simeq 10^{-12}$. Dit correspondeert met een visuele lichtkracht: $L_V = 4\pi d^2 f_V = 3.0 \times 10^{27} = 5340 L_{V\odot}$. De logarithme is 3.72 . In Tabel 4.1 zien we dat deze waarde bij een O8V ster wordt bereikt, dus bij een massa van $22 M_\odot$. De levensduur van zo'n ster is $\tau = \tau_\odot (M/M_\odot)^{-2.8} = 10^{10} 22^{-2.8} = 1.7 \text{ miljoen jaar}$.

Opgave 29 a. $\mu_{\alpha*}$ is uitgedrukt in $''/\text{jaar}$, en μ_α in $^s/\text{jaar}$. Voor Aldebaran vinden we: $\Delta\delta = 10^5 \times (-0.1894)/3600 = -5.26^\circ$, $\Delta\alpha = 10^5 \times 0.0628/3600 = 1.74^\circ = 1.74/(15 \cos \delta)^h$. En daar zien we het probleem: δ verandert gedurende de beweging. We verwaarlozen dit probleem. Neem $\delta = 15^\circ$, dan is $\Delta\alpha = 0.12^h$. In de figuur zien we dit ingetekend. (Let op: α neemt naar links toe!) Het is duidelijk dat Aldebaran niet bij de Hyaden hoort.

b. Door de vervorming van het oppervlak (een afbeelding van een boloppervlak op een plat vlak) snijden de als rechte lijnen verlengde eigenbewegingen elkaar niet precies in een punt; het juist punt ligt wat naar beneden.

c. Ik reken het voor γ Tau volledig uit. Neem de radiant als punt 1, dan is $\sin \delta_1 = \sin 5.8^\circ = 0.101$, $\cos \delta_1 = 0.995$. Voor γ Tau is $\delta = 17.5426$ zodat $\sin \delta_2 = 0.266$ en $\cos \delta_2 = 0.964$. $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \cos(96.6 - 15 \times 4.3299) = 0.851$, zodat $\cos \lambda = 0.101 \times 0.266 + 0.995 \times 0.964 \times 0.851 = 0.843$, en dus is $\sin \lambda = 0.537$. Met $v_r = 39.3 \text{ km/s}$ vinden we $v = 46.6 \text{ km/s}$ en $v_\perp = 25.1 \text{ km/s}$. De eigenbeweging is $\mu = \sqrt{\mu_{\alpha*}^2 + \mu_\delta^2} = 0.118''/\text{jaar}$, en met Vgl.3.3 vinden we dan $d = 25.1/(4.74 \times 0.118) = 45.0 \text{ pc}$. In de tabel zijn voor de sterren in volgorde van Tabel 2 de antwoorden gegeven. We zien nu dat de ruimtelijke snelheden van leden van de Hyaden inderdaad redelijk aan elkaar gelijk zijn.



Figuur 1: De helderste sterren in de Hyaden, met hun eigenbeweging over een periode van honderdduizend jaar. De kleine punten geven de minder heldere leden van de Hyaden aan, zoals met Hipparcos gevonden. Aldebaran met eigenbeweging is ook ingetekend.

Tabel 1: Antwoorden voor de helderste sterren van de Hyaden uit de Hipparcos catalogus. Voor iedere ster is gegeven het nummer in de catalogus, de cosinus van de hoek met de radiant, de ruimtelijke snelheid, de snelheid loodrecht op de kijkrichting, en de afstand.

HIP	$\cos \lambda$	v (km/s)	v_{\perp} (km/s)	d (pc)
20205	0.843	46.6	25.1	45.0
20455	0.845	47.0	25.2	47.6
20542	0.847	46.3	24.6	45.1
20635	0.833	46.3	25.6	47.2
20648	0.849	45.6	24.1	45.0
20711	0.833	42.7	23.6	42.3
20713	0.857	47.6	24.5	43.4
20885	0.861	46.7	23.8	47.4
20889	0.851	46.3	24.3	45.2
20894	0.861	45.2	23.0	43.3
21029	0.864	47.4	23.9	46.7
21589	0.887	50.4	23.3	47.8
21683	0.882	40.4	19.0	47.4
23497	0.902	42.1	18.2	47.9

Opgave 30 a.

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr = \int_0^R 4\pi \rho_o r^{2-\gamma} dr = \frac{4\pi}{3-\gamma} R^{3-\gamma} \rho_o$$

zodat

$$\rho_o = \frac{3-\gamma}{4\pi} MR^{\gamma-3}$$

b.

$$E_{\text{pot}} = - \int_o^R 4\pi r^2 \rho \frac{GM(r)}{R} dr = - \frac{16\pi^2 G \rho_o^2}{3-\gamma} \int_0^R r^{4-2\gamma} dr = - \frac{16\pi^2 G \rho_o^2}{(3-\gamma)(5-2\gamma)} R^{5-2\gamma}$$

nu gebruiken we het resultaat van a)

$$M^2 = \frac{16\pi^2}{(3-\gamma)^2} R^{6-2\gamma} \rho_o^2$$

om ρ_o te elimineren:

$$E_{\text{pot}} = -\frac{GM^2}{R} \frac{3-\gamma}{5-2\gamma} (A)$$

Om de laatste vergelijking te controleren, nemen we een homogene ster, met $\gamma = 0$, en vinden dan inderdaad Vgl.5.6 terug.

De potentiële energie (A) is positief als ofwel $\gamma > 3$, ofwel $\gamma < 2.5$. Echter, met a) zien we dat $\gamma > 3$ tot een oneindig grote massa leidt. Dat is natuurkundig niet acceptabel, en dus moeten we $\gamma < 2.5$ kiezen.

c. Voor de thermische energie schrijven we:

$$E_{\text{th}} = \frac{M}{\mu m_p} \frac{3}{2} kT$$

en het viriaal-theorema wordt dan, met (A):

$$\frac{GM^2}{R} \frac{3-\gamma}{5-2\gamma} = \frac{M}{\mu m_p} 3kT \Rightarrow R = \frac{G\mu m_p}{3k} \frac{3-\gamma}{5-2\gamma} \frac{M}{T}$$

Ter controle nemen we weer een homogene ster, $\gamma = 0$, en vinden dan inderdaad Vgl.5.8 terug.

Opgave 31 De betekenis van de randvoorwaarde is dat de inval-snelheid aanvankelijk nul is.

a. Om schrijfwerk te sparen, noteren we een tijdsafgeleide met een punt. De valvergelijking wordt dan:

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} \Rightarrow \dot{R}\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} \dot{R} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{R}^2) = \frac{d}{dt} \frac{GM}{R}$$

Door integratie over t wordt dit (met een integratie-constante C):

$$\frac{1}{2} \dot{R}^2 = \frac{2GM}{R} + C \Rightarrow \dot{R} = \sqrt{\frac{2GM}{R} + C}$$

Nu gebruiken we de randvoorwaarde dat op $R = R_o$ geldt $\dot{R} = 0$ om C te vinden:

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2GM}{R} - \frac{2GM}{R_o}} = \sqrt{\frac{2GM}{R_o}} \left(\sqrt{\frac{R_o}{R} - 1} \right)$$

b. De onverwachte stappen hieronder zijn de eerste (het invoegen van $d\delta$) en de derde (het schrijven van \sin als $1 - \cos^2$):

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR/d\delta}{dt/d\delta} = \frac{(R_o/2) \sin \delta}{(R_o/[2\sqrt{C}])(-1 + \cos \delta)} = \sqrt{C} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \delta}}{1 - \cos \delta} = \sqrt{C} \frac{\sqrt{1 + \cos \delta}}{\sqrt{1 - \cos \delta}}$$

Hiermee hebben we \dot{R} bijna. Om $\cos \delta$ te elimineren schrijven we:

$$\frac{R_o - R}{R} = \frac{R_o - R_o/2 + (R_o/2) \cos \delta}{R_o/2 - (R_o/2) \cos \delta} = \frac{1 + \cos \delta}{1 - \cos \delta}$$

en daarmee is de laatste vgl. van a) gevonden.

c. $R(\delta) = R/2 \Rightarrow \cos \delta = 0 \Rightarrow \delta = \pi/2 \Rightarrow \sin \delta = 1$ zodat

$$t(\delta) = \frac{\pi/2 + 1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R_o^3}{GM}} \simeq 0.91 \sqrt{\frac{R_o^3}{GM}}$$

Opgave 32 a. $E_{\text{th}} = -\frac{1}{2} E_{\text{pot}} = \frac{f}{2} \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}}$ waar f is 0.6 voor een ster met constante dichtheid (zie Vgl.5.6), en iets groter voor een centraal gecondenseerde ster als de Zon (vgl. opgave 26). Voor een schatting van E_{th} met $f = 0.6$ krijgen we $E_{\text{th}} \simeq 10^{41}$ J.

- b. De thermische tijdschaal $\tau_{\text{th}} \equiv E_{\text{th}}/L_{\odot}$, ofwel $\tau_{\text{th}} \simeq 3 \times 10^{14} \text{ s} \simeq 10^7 \text{ jr}$.
 c. Schrijf $\Delta t = 100 \text{ jr}$ en de verandering van R_{\odot} in die tijd als ΔR_{\odot} , dan volgt:

$$\frac{dR}{dt} \simeq \frac{\Delta R_{\odot}}{\Delta t} \simeq \frac{R_{\odot}}{\tau_{\text{th}}} \Rightarrow \Delta R_{\odot} \simeq 10^{-5} R_{\odot}$$

Dit is veel minder dan de nauwkeurigheid waarmee de straal van de Zon bekend is (Vgl. Tabel 10.3), en dus niet waar te nemen.

Opgave 33 De dimensie van K druk staat verkeerd in het boek en van druk verkeerd in de opgave...! Voor de correcte dimensie van druk, bedenk dat $P \simeq mv \cdot v \cdot n$ zodat voor de dimensie geldt: $[P] = \text{kg m/s m/s m}^{-3} = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$.

a. De dimensie van K_e volgt met Vgl.6.20 als $[K_e] = [1/m_e] [\hbar]^2 [1/m_H]^{5/3} = \text{kg}^{-1} (\text{kg m}^2 \text{s}^{-1})^2 \text{ kg}^{-5/3} = \text{kg}^{-2/3} \text{m}^4 \text{s}^{-2}$. (Hierbij gebruiken we $[J] = \text{kg (m/s)}^2$) Nu nog de dimensie van ρ : die is kg m^{-3} . Inderdaad is nu $[K\rho^{5/3}] = \text{kg}^{-2/3} \text{m}^4 \text{s}^{-2} \text{ kg}^{5/3} \text{m}^{-5} = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$.

b. De dimensie van $K_{r,e}$ volgt met Vgl.6.22: $[K_{r,e}] = \text{m/s J s kg}^{-4/3} = \text{m kg (m/s)}^2 \text{ kg}^{-4/3} = \text{kg}^{-1/3} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$. Zodat: $[K_{r,e} \rho^{4/3}] = \text{kg}^{-1/3} \text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{ kg}^{4/3} \text{m}^{-4} = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2} = [P]$.

Opgave 34 a. De omzetting van 4 protonen en twee electronen in helium levert 26.72 MeV op, waarvan ongeveer 2% verdwijnt met de neutrino's. 1 MeV is volgens Tabel 10.3 gelijk aan $1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$. Per $0.98 \times 26.72 \times 1.6 \times 10^{-13} = 4.19 \times 10^{-12} \text{ J}$ komen twee neutrino's vrij. Per seconde komen dan $2L_{\odot}/4.19 \times 10^{-12} = 1.84 \times 10^{38}$ neutrino's vrij.

b. Op een afstand van 1 A.U. = $1.5 \times 10^{13} \text{ cm}$ is dat per vierkante cm: $1.84 \times 10^{38}/(4\pi 2.25 \times 10^{26}) = 6.5 \times 10^{10}$.

Opgave 35 a. Met Vgl.6.22 krijgen we voor de Zon:

$$P_c \sim \frac{3GM_{\odot}^2}{4\pi R_{\odot}^4} \simeq 2.7 \times 10^{14} \text{ N m}^{-2}$$

.De gemiddelde dichtheid van de Zon is $\bar{\rho} = 3M_{\odot}/(4\pi R_{\odot}^3) \simeq 1420 \text{ kg m}^{-3}$. Gebruiken we dit als schatting voor de centrale dichtheid, dan is de centrale temperatuur met Vgl.6.11:

$$T_c \sim \frac{\mu m_H}{k} \frac{P_c}{\rho_c} = 1.2 \times 10^7 \text{ K}$$

waar we $\mu = 0.5$ hebben genomen. Vergelijking met Figuur 7.2 laat zien dat de schatting voor de druk een factor ~ 10 te klein is; en de schatting voor de temperatuur ongeveer goed. We leren hieruit dat de schattingen op zijn best een orde van grootte geven: dat de temperatuur ongeveer goed is, komt doordat een fout van een factor 10 in de centrale druk wordt gecompenseerd door een even grote fout in de centrale dichtheid...

b. Met Vgl.6.12 en Tabel 10.3 vinden we

$$P_r = \frac{4 \times 5,67 \times 10^{-8}}{3 \times 3 \times 10^8} T_c^4 \simeq 5,6 \times 10^{12} \text{ N m}^{-2}$$

hetgeen inderdaad verwaarloosbaar is ten opzichte van P_c zoals in a) berekend.

c. Met $\log \rho_c \simeq \log \bar{\rho} = 3.2$ en $\log T_c \simeq 7.1$ ligt het centrum van de Zon in Figuur 6.3 ruim boven de lijn die ideaal (boven) van gedegeneerd (onder) scheidt.

d. Met $\kappa \simeq 0.1$ en $\rho \simeq 10^5$ krijgen we voor de vrije weglengte $l/(\kappa\rho) \simeq 10^{-4} \text{ m}$ in het centrum van de Zon.

Opgave 36 a. Op dezelfde r is bij hoge-massa sterren de lichtkracht $L(r)$ veel hoger, en daardoor is ook de flux $L(r)/(4\pi r^2)$ veel hoger. Deze hoge flux leidt via Vgl.6.5 tot een zeer hoge temperatuurs-afgeleide, zo hoog, dat convectie overneemt.

b. Gelijktellen van de adiabatiese en radiatieve temperatuurs-gradienten volgens Vgl.6.5 en 6.7 geeft:

$$-\frac{L(r)}{4\pi r^2} \frac{3\kappa\rho}{4\sigma} \frac{1}{4T^3} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T(r)}{P(r)} \frac{dP(r)}{dr} = -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T(r)}{P(r)} \frac{GM(r)}{r^2} \rho(r)$$

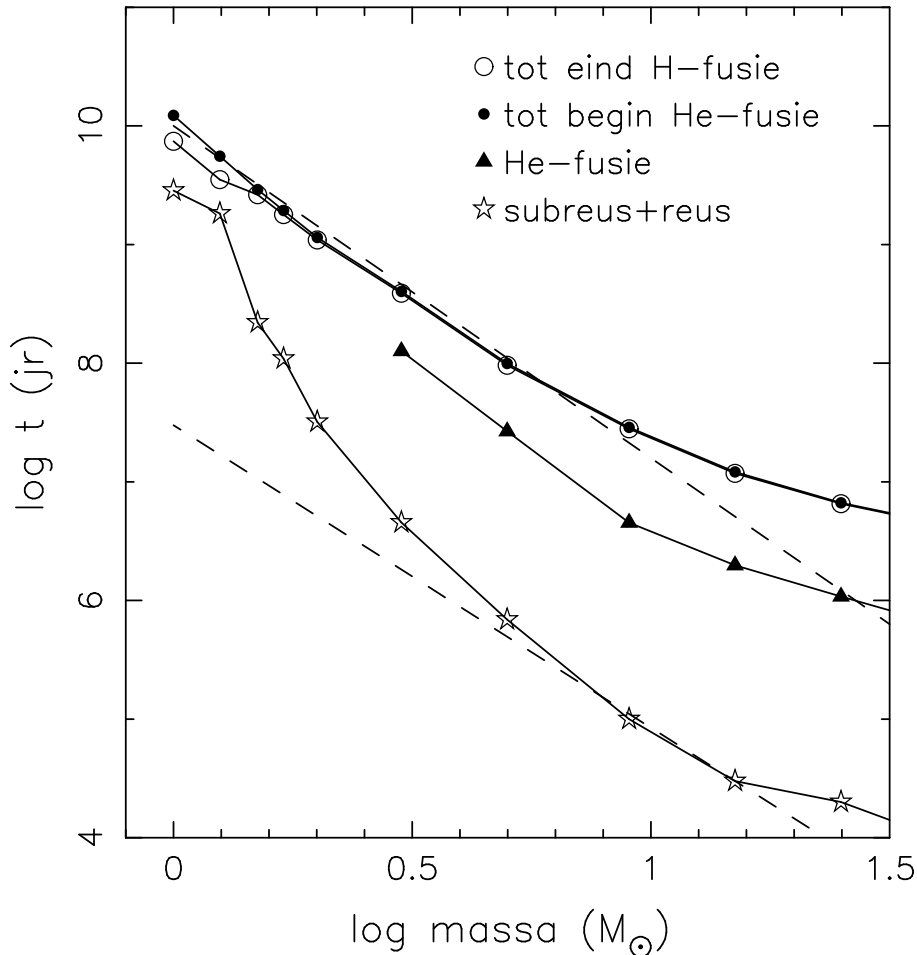
waar we nog de drukafgeleide uit hydrostatisch evenwicht (Vg.6.2) hebben ingevuld. Op de grens geldt dat de massa erbinen gelijk is aan de massa van de convectieve kern: $M(r) = M_{\text{conv}}$. Verder schrijven we voor de stralingsdruk $P_r = aT^4$ (met Vgl.6.12 volgt $a = 4\sigma/(3c)$), en $P_r/P \equiv 1 - \beta(r)$.

Invullen geeft dan:

$$\frac{M_c}{M} = \frac{\kappa}{16\pi cG(1 - 1/\gamma)(1 - \beta)} \frac{L(r)}{M}$$

c. Als de convectieve kern groter is dan het gebied waar kernfusie plaatsvindt, geldt dat op de rand van de kern de lichtkracht al de totale lichtkracht is: $L(r) = L$. Voor de hoofdreeks hebben we verder (zie Vgl.4.6) $L \propto M^{3.8}$, zodat

$$\frac{M_c}{M} \propto \frac{L}{M} \propto M^{2.8}$$



Opgave 37 We zien dat sterren tot $10 M_\odot$ een hoofdreeks-duur hebben die goed klopt met de nucleaire tijdschaal. De zwaardere fuseren een relatief groter deel van hun massa, en hebben een wat langere duur van de hoofdreeks dan uit Vgl.6.26 volgt. Voor sterren met een massa rond de $10 M_\odot$ verloopt de evolutie op de reuzentak op de thermische tijdschaal. Voor lichtere sterren ligt de levensduur van de reuzentak tussen de nucleaire en thermische tijdschaal in.

Opgave 38 a. Zie bladzijde 23! Massa in is 4.0302 amu, massaverlies is 0.0287 amu, dus omzetting in fractie is $\text{massaverlies}/(\text{massa in}) = 0.007$ ofwel $\epsilon_H = 0.7\%$.

b. de massa 12 amu geldt voor een koolstof-12 atoom, d.w.z. kern plus 6 electronen! De massa van een helium-atoom is die van de helium kern plus twee electronen, $4.0015 + 0.0011 = 4.0026$ amu. Massa in is drie helium atomen ofwel 12.0078 amu, massa uit is 12 amu, deficit is 0.0078 amu. In fractie $0.0078/12.0078 = 0.00065$ ofwel $\epsilon_{He} = 0.065\%$

c. Bij dezelfde lichtkracht verhouden de levensduren zich als de *epsilon*'s: $\tau_{He} = \tau_H \epsilon_{He} / \epsilon_H \simeq \tau_H / 11$ In de logarithme is een factor 11 een verschuiving met 1.04. Vergelijking met Figuur 8.7 laat zien dat de helium-fusie in werkelijkheid iets langer duurt. Dat komt doordat i) bij begin van de waterstof-verbranding al 30% van de dichtheid uit helium bestaat, ii) doordat tijdens de helium-fusie ook nog energie uit de waterstof-schil-fusie komt.

Opgave 39 a. $0.1 M_\odot c^2$ is 1.8×10^{46} J, 10 MeV is 1.7×10^{-12} J dus worden er $N_\nu = 1.1 \times 10^{58}$ neutrino's gevormd. 1 kpc is 3.086×10^{21} cm. De neutrino flux op 1 kpc zou dus zijn: $F_\nu = N_\nu / (4\pi 9.5 \times 10^{42}) = 9.4 \times 10^{13}$. Op d kpc is de flux kleiner met $1/d^2$.

b. De botsingsdoorsnede is $\sigma = 2.7 \times 10^{-42}$ cm² per Cl atoom. Het gemeten aantal is de flux maal de botsingsdoorsnede $N = F\sigma = 2 \times 10^{-36}$ per Cl atoom per seconde. Combinatie geeft de flux

als $F = N/\sigma \simeq 7.4 \times 10^5$ neutrino's per seconde. De meting is eens per maand (is 2.6×10^6 s), de flux per maand is dan 1.92×10^{12} neutrino's per maand. Het aantal supernova-neutrino's moet drie maal zo hoog zijn. Met a) vinden we dan

$$\frac{9.4 \times 10^{13}}{d(\text{kpc})^2} > 3 \times 1.92 \times 10^{12} \Rightarrow d(\text{kpc}) < 4$$

c. het gewicht van 1 C_2Cl_4 molecuul is $(2 \times 12 + 4 \times 35.45)1.66 \times 10^{-27} = 2.75 \times 10^{-25}$ kg. 1 liter weegt 3.85 kg, dus 10^5 gallon, met 3.785 liter per gallon, weegt $3.785 \times 10^5 \times 3.85 = 1.46 \times 10^6$ kg. Het aantal C_2Cl_4 moleculen is dan $1.46 \times 10^6 / 2.75 \times 10^{-25} = 5.29 \times 10^{30}$, en het aantal Cl atomen is vier keer zo groot: 2.12×10^{31} . De detectie (zie a) is 2×10^{-36} neutrino per Cl atoom per seconde. Dit getal, vermenigvuldigd met het aantal Cl atomen en met het aantal seconden in een maand (30 dagen is 2.6×10^6 s) geeft ongeveer 110 neutrino's per maand.

Opgave 40 a. De helderste Cepheide in IC5182 heeft een gemiddelde schijnbare visuele lichtkracht $\log L_{V_a}/L_{V_\odot} \simeq 3.15$ (Figuur 8.17 rechts), en een periode van 42 d (tekst bij Figuur 8.17). De logaritme van de periode (in dagen) is 1.6, en uit Figuur 8.17 links lezen we af dat dit correspondeert met een visuele lichtkracht $\log L_V/L_{V_\odot} \simeq 4.15$. Het verschil is $\Delta L = 1.0$. De afstand tot IC4182 is dan $d = d_a 10^{0.5} \simeq 3.2$ Mpc.

b. De bovenste Cepheide is de helderste, en heeft daarom de kleinste *relatieve* fout in de gemeten flux. In een logaritmisch diagram vertegenwoordigen de onzekerheids-balken de relatieve fout.

c. Op het maximum is de visuele flux van de supernova in IC4182 ongeveer $\log f_V \simeq -13.8$ $\text{W m}^{-2}\text{nm}^{-1}$. We zagen in a) dat de afstand tot dit stelsel 3.2 Mpc is, en dus is de visuele lichtkracht van het maximum van de supernova: $L_V = 4\pi(3.2 \times 3.086 \times 10^{22})^2 10^{-13.8} = 1.9 \times 10^{33}$ W nm^{-1} . Met $L_{V_\odot} = 5.6 \times 10^{23} \text{W nm}^{-1}$ volgt $\log L_V/L_{V_\odot} = 9.53$.

d. In Figuur 4.1 zien we dat de helderste rode sterren in het HR-diagram van Hipparcos ongeveer $\log L_V/L_{V_\odot} = 2.5$ hebben. In Figuur 8.17 (links) zie we dat de meeste Cepheiden helderder zijn dat dit: daarom zijn er vermoedelijk weinig Cepheiden in Figuur 4.1 te zien.

Opgave 41 a. In Figuur 8.16 kijken we naar de top van de Cepheiden-balk. Die ligt halverwege de evolutie-sporen van sterren van 15 en 25 M_\odot , en halverwege de stippellijnen voor 100 en 1000 R_\odot : we nemen voor de helderste Cepheide daarom $M = 20M_\odot$ en $R = 300R_\odot$. Invullen in Vgl.6.28 geeft een geschatte periode van 22 d. Dat is van dezelfde orde van grootte als de correcte periode van de helderste Cepheiden, met (zie Figuur 8.17) $\log P \simeq 1.7$ ofwel $P \simeq 50$ d.

b. Neem de helderste Mira variabele in Figuur 8.16: die heeft een straal van ongeveer $560R_\odot$. Voor een massa van 1 M_\odot volgt met Vgl.6.28 een geschatte periode van 250 d. Mira heeft een periode van 334 d (zie Figuur 8.15 rechtsboven).

Opgave 42 Het resultaat van 40c was dat het maximum van een SN Ia bij $\log L_V/L_{V_\odot} = 9.53$ ligt.

a. In de richting van de Melkweg-pool kijken we recht omhoog de Melkweg uit. Omdat het meeste gas en stof in het Melkwegvlak ligt, verwachten we weinig interstellaire absorptie in de richting loodrecht op het Melkwegvlak.

b. Virgo: $\log L_V/L_{V_\odot} \simeq 7.1$ dus $\Delta L = 9.53 - 7.1 = 2.42$ en $d = 1 \text{ Mpc} 10^{0.5 \times 2.42} \simeq 16$ Mpc. Analooq voor Coma: $\Delta L = 4.0$ dus d is 100 Mpc.

c. $f_V = 2.46 \times 10^{-20} \text{W m}^{-2}\text{nm}^{-1}$. Voor een aangenomen afstand $d_a = 1 \text{ Gpc}$ (10^9 pc ofwel 3.086×10^{25} m) vinden we $L_{V_a} = 4\pi 3.086^2 10^{50} f_V = 2.94 \times 10^{32} \text{W nm}^{-1}$ zodat $\log L_{V_a}/L_{V_\odot} = \log(5.25 \times 10^8) = 8.72$. Hieruit $\Delta L = 9.53 - 8.72 = 0.81$ en $d = 10^{0.4} = 2.5$ Gpc. Op afstanden die zo groot zijn moeten we corrigeren voor de uitdijning van het heelal terwijl het licht onderweg is: de afstand zal nauwkeuriger moeten worden gedefinieerd (afstand bij uitzenden van fotonen? of afstand bij aankomst van fotonen?) en een andere waarde hebben.

d. De energie ϵ_V van een visueel foton (550 nm) is 3.61×10^{-19} J. Een energie flux van $2.46 \times 10^{-20} \text{W m}^{-2}\text{nm}^{-1}$ correspondeert dus met een fotonenflux 0.068 fotonen $\text{m}^{-2}\text{nm}^{-1}\text{s}^{-1}$. Het oppervlak van de spiegel is $\pi 8^2 = 201 \text{ m}^2$, zodat het aantal fotonen dat per seconde de spiegel treft gelijk is aan $201 \times 0.068 = 13.7 \text{ nm}^{-1}$.

Opgave 43 nog te doen

Opgave 44 a.

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2\pi}{P} \right) = -\frac{2\pi}{P^2} \frac{dP}{dt} = -\Omega \frac{(dP/dt)}{P}$$

Invullen geeft $\Omega = 2\pi/P = 188 \text{ s}^{-1}$, en $d\Omega/dt = -2.37 \times 10^{-7} \text{ s}^{-2}$.

b. Scheiden van variabelen (Ω links, t rechts) geeft:

$$\frac{d\Omega}{\Omega^3} = -K dt \Rightarrow \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{d\Omega}{\Omega^3} = -K \int_{t_1}^{t_2} dt$$

waar $\Omega_i \equiv \Omega(t_i)$. Uitvoeren van de integralen geeft:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right) = -K(t_2 - t_1)$$

Vul nu in: $(d\Omega/dt)_2 = -K\Omega_2^3$ dus $K = -(d\Omega/dt)_2/\Omega_2^3$ en vindt:

$$t_2 - t_1 = \frac{\Omega_2}{2(d\Omega/dt)_2} \left[\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^2 - 1 \right]$$

c. Herschrijf de laatste vergelijking als

$$1 + 2(t_2 - t_1)(d\Omega/dt)_2/\Omega_2 = (\Omega_2/\Omega_1)^2$$

Invullen geeft (let wel: $t_2 - t_1$ moet in secondes, 1 jaar is ongeveer 3.15×10^7 s): $(\Omega_2/\Omega_1)^2 = 1 - 0.7445$ dus $\Omega_2 = 0.505\Omega_1$ zodat $\Omega_1 = 373$ en $P_1 = 0.017$ s.

d. Met Vgl. 44 schrijven we: $(\Omega_2/(d\Omega/dt)) = -P/(dP/dt)$ en hiermee vinden we

$$t_2 - t_1 = \frac{-P}{2(dP/dt)} \left[\left(\frac{P_1}{P_2} \right)^2 - 1 \right] \simeq \frac{P}{2(dP/dt)}$$

waar het \simeq -teken geldt als $P_2 \gg P_1$.

Opgave 45 a. In Figuur 9.10 is duidelijk een concentratie van bronnen te zien in de richting van het Melkwegcentrum. Dat betekent dat die bronnen een afstand hebben vergelijkbaar met de afstand tot het Melkwegcentrum, ofwel 8.5 kpc.

b. een röntgenfoton heeft een energie van een paar keV, zeg 3 keV, ofwel $3 \times 1.602 \times 10^{-16}$ J. Per seconde, per vierkante meter ($= 10^4 \text{cm}^2$) is er dan bij de aarde een flux $f_X \simeq 3 \times 1.602 \times 10^{-16} \times 10^4$, en op 8.5 kpc correspondeert dit met een lichtkracht $L_x = 4\pi(8.5 \times 3.086 \times 10^{19})^2 f_X = 4.2 \times 10^{30}$ J/s.

c. 10 MeV correspondeert met 1.602×10^{-12} J, en een vierkante meter is 100 keer 100cm^2 . Op een karakteristieke afstand van een Gigaparsec (3.086×10^{25} m) is de energie die op Aarde 10^4 fotonen levert dan $\Delta E = 10^4 \times 4\pi(3.086 \times 10^{25})^2 \times 100 \times 1.602 \times 10^{-13} = 2 \times 10^{46}$ J. Als de uitgezonden straling niet isotroop is (en we denken dat dat het geval is) is de uitgezonden energie lager.