

Zebra 62: Vormen en Verhoudingen in de Architectuur

Antwoorden en uitwerkingen

Inhoudsopgave

Lijst van opgaven in het boekje	2
Antwoorden en uitwerkingen	3
Inleiding	3
Hoofdstuk 1: Piramiden en de gulden snede	4
Hoofdstuk 2: Gebouwen geïnspireerd door veelvlakken	7
Hoofdstuk 3: Het denken en ontwerpen van een architect	9
Hoofdstuk 4: (Be)werken met elementaire vormen	11
Hoofdstuk 5: Beroemde koepels	21
Hoofdstuk 6: Eindopdrachten	24



Lijst van opgaven in het boekje

Nummer	Naam opgave	Pagina in het boekje
	Natuur en architectuur	4
1.1.1	De piramide van Cheops	5
1.2.1	Lijnstuk AF	7
1.2.2	Driehoek van Kepler	7
1.2.3	Gulden rechthoeken	8
1.2.4	Bewijslast	9
1.3.1	Slowaakse radio	9
1.3.2	Modellen	10
1.3.3	Glazen panelen van de grote Louvre piramide	10
1.4.1	Dodecaëderhuis	13
1.4.2	Koepel de Baslica di Santa Maria del Fiore	14
1.4.3	Modulor	15
1.4.4	Projecten	16
2.1.1	Kaäba	17
2.2.1	Icosaëder en de gulden snede	20
2.2.2	Niet regelmatig	20
2.3.1	Sterdodecaëder	22
2.3.2	De Nationale Bibliotheek van Wit-Rusland	22
2.3.3	Afgeknotte icoesaëder	23
3.1.1	Interieur	24
3.1.2	Eigenschappen van het matenstelsel	27
3.2.1	Plastische getal	29
3.2.2	Stelsels afleiden	30
3.2.3	Ontwerp van een kruis	30
4.1.1	Kunstwerken van Carel Visser	32
4.2.1	Rotskoepel	33
4.2.2	Art Tower in Mito	34
4.2.3	Tertraëder van Bottrop	35
4.2.4	Sierpinski-driehoeken	36
4.2.5	Tertraëder van Bottrop (2)	37
4.2.6	Megahotel in Amsterdam	37
4.2.7	Forum	38
4.2.8	Tokyo Big Sight	39
4.2.9	Grote Onderbroek	39
5.1.1	Koepel Hagia Sofia	42
5.2.1	Plattegrond van de Santa Maria del Fiore	43
5.2.2	Vergelijken van profielen	45
5.2.3	Hoe ontwerp je het quinto acuto-profiel?	45
5.2.4	Basis Lantaarn	46
5.2.5	Verhouding	48
5.2.6	Koepel van het Rijksdaggebouw	48
6.1.1	Vergelijken	53
6.2.1	Hotel ontwerpen	56
6.3.1	Ontwerpen	59

Antwoorden en uitwerkingen

Inleiding

Opgave *Natuur en architectuur*

- a. Gaudi maakte gebruik van bomen, hij keek naar plekken waar takken afgezaagd zijn. Hij keek naar de kruinen. Bloemen. Bladerenopbouw van planten. Natuurverschijnselen zoals golven. Zeesterren, diverse schelpvormen en de honingraat.
- b. Basisvormen die hij toepaste zijn onder meer de hyperboloïde en paraboloid. De zuilen van het schip van de Sagrada Família zijn een uniek ontwerp en bestaan uit dubbelgetordeerde Salomonische zuilen (die over de lengte gedraaid zijn) met gelijke spiralen die tegen elkaar indraaien.



Hoofdstuk 1: Piramiden en de gulden snede

Opgave 1.1.1 De piramide van Cheops

- a. Inhoud piramide is $\frac{1}{3} \cdot 138,75 \cdot 230^2 \approx 2.446.625 \approx 2,4$ miljoen m^3 . De afwijking is ongeveer 0,2 miljoen kubieke meter.
- b. Het oorspronkelijke grondvlak is 230 bij 230. Daar gaan nu vier rechthoekige driehoeken af met rechthoekzijden van 115 bij 0,6. De totale oppervlakte daarvan is 138 vierkante meter. Verdwenen is een oppervlakte van $\frac{138}{230^2} \times 100\% = 0,26\%$.
- c. Neem een rechthoekige driehoek die loodrecht staat op het grondvlak met als rechthoekzijden de hoogte van de piramide en een halve diagonaal van het grondvlak. Pas de Stelling van Pythagoras toe: $x^2 = (115\sqrt{2})^2 + 146,59^2 = 47938,6281x \approx 218,9$ meter.
- d. *Controle ontwerpregel 1.* Kwadraat van de hoogte 21489 vierkante meter. Hoogte van een zijvlak is $\sqrt{47938,6281 - 115^2} = 186,32$. Oppervlakte zijvlak is 21426 vierkante meter. Verschil van 63 vierkante meter. Ten opzichte van het zijvlak gaat het om 0,3%.

Controle ontwerpregel 2. Omtrek vierkant grondvlak is 920 meter. Omtrek cirkel is $2\pi \cdot 146,59 \approx 921$ meter. Verschil van 1 meter.

Opgave 1.2.1 Lijnstuk AF

Merk op dat $AF = AE + EF = \frac{1}{2} + EF$. $EF = EC = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$. $AF = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Opgave 1.2.2 Driehoek van Kepler

- a. Maak gebruik van figuur 1.2.1. Teken een cirkel met punt A als middelpunt en straal zo groot als lengte van lijnstuk AF. Noem het snijpunt van die cirkel met het verlengde van BC punt G. AG heeft dus lengte φ .
- b. In $\triangle ABG$ geldt volgens de Stelling van Pythagoras dat $AB^2 + BG^2 = AG^2$. Dus $1 + BG^2 = \varphi^2$. Het guldensnedegetal φ is een oplossing van de vierkantsvergelijking $x^2 - x - 1 = 0$. Dus geldt: $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ of te wel $\varphi^2 = \varphi + 1$. Dus $BG^2 = \varphi$, $BG = \sqrt{\varphi}$. Samengevat: $AB = 1$, $BG = \sqrt{\varphi}$ en $AG = \varphi$. Dus $\triangle ABG$ is een driehoek van Kepler.
- c. Eerst ontwerpregel 3 afleiden uit ontwerpregel 1.

We beschouwen nu $\triangle MBT$ (een halve dwarsdoorsnede). $MB = 115$, $TM = 146,59$ en de afmeting van de schuine zijde BT, zie uitwerking vraag d van opgave 1.1.1, is 186,82. We delen de drie getallen door 115 en we verkrijgen: 1, 1,275 en 1,625. Merk op dat 1,625 ongeveer φ is en 1,275 ongeveer $\sqrt{\varphi}$. De afmetingen van rechthoekige $\triangle MBT$ voldoen dus aardig aan de verhouding 1: $\sqrt{\varphi}$: φ . Er is dus sprake van een driehoek van Kepler.

Andersom!! Uit ontwerpregel 3 ontwerpregel 1 afleiden.

Nu gaan we ervan uit dat de halve dwarsdoorsnede een driehoek van Kepler is. We moeten nu aantonen dat de oppervlakte van een zijvlak gelijk is aan de hoogte van de piramide in het kwadraat. De verhouding van de hoogtelijn uit de top van een zijvlak met de hoogte van de piramide is dus φ : $\sqrt{\varphi}$. Merk op dat de hoogte van de piramide gelijk is aan $\sqrt{\varphi} \cdot 115$ en die hoogtelijn uit de top in een zijvlak is $\varphi \cdot 115$. Het kwadraat van die hoogte is dan $\varphi \cdot 115^2$. Oppervlakte van een zijvlak is $\frac{1}{2} \cdot 230 \cdot \varphi \cdot 115 = \varphi \cdot 115^2$. En daarmee is ontwerpregel 1 aangetoond.

Opgave 1.2.3 Gulden rechthoeken

- a. Omdat rechthoek ABCD een gulden rechthoek is geldt $\frac{AB}{AD} = \frac{x}{1} = \varphi$. Dus $x = \varphi$.
- b. $\frac{BC}{BE} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\varphi-1}$. Van de Keplerdriehoek weten we $\varphi^2 = \varphi + 1$. Dus $1 = \varphi^2 - \varphi = \varphi(\varphi - 1)$. $\frac{BC}{BE} = \frac{\varphi(\varphi-1)}{\varphi-1} = \varphi$. Dus zelfde verhouding. Rechthoek BCFE is dus ook een gulden rechthoek.

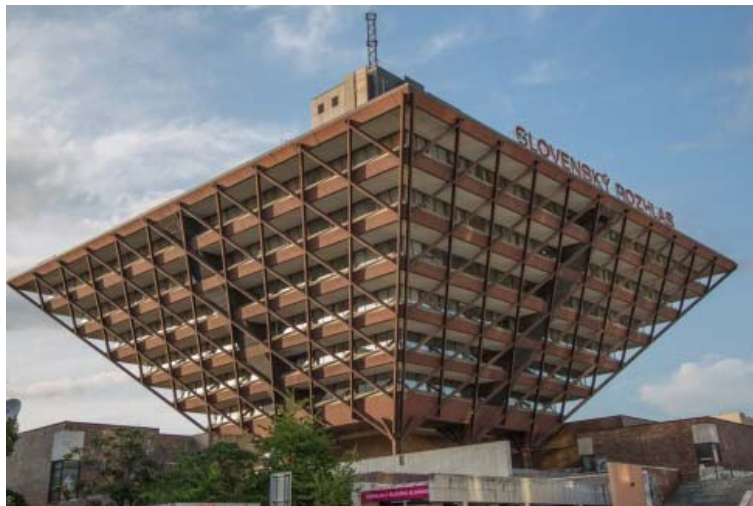
- c. $\text{Opp}(ABCD) = \varphi \cdot 1 = \varphi$. $\text{Opp}(BCFE) = 1 \cdot (\varphi - 1)$. Verkleiningsfactor is $\frac{\varphi-1}{\varphi}$. Na vijfmaal knippen: $(\frac{\varphi-1}{\varphi})^5 \approx 0,00813$. We nemen het omgekeerde van 0,00813: $(0,00813)^{-1} \approx 123$. De overgebleven gulden rechthoek is ongeveer 123 keer zo klein geworden.
- d. Verhouding van de afmetingen van de rode rechthoek $ABCD$ is $\frac{385,7}{239,5} \approx 1,610$. Verhouding van de afmetingen van de blauwe rechthoek $BEFG$ is $\frac{333,9+239,5}{354,3} \approx 1,618$. Klopt dus vrij aardig met afgeronde guldensnedegetal 1,618.

Opgave 1.2.4 Bewijslast

In de opgaven 1.2.2 en 1.2.3 blijkt de toepassing van de gulden snede heel aardig te kloppen. Toch is hiermee niet bewezen dat de architecten van toen op de hoogte waren van de gulden snede.

Opgave 1.3.1 Slowaakse radio

- a. Het lijkt alsof de beide zichtbare randen van het dak elk verdeeld zijn in 11 gelijke stukken. In dat geval zou het dak een vierkante vorm hebben.
- b. Door die verdeling in 11 stukken zou het kunnen gaan om 10 lagen. Elke laag zou een hoogte van 4 meter kunnen hebben.
- c. Er zijn met de aanname, 7 vierkanten te zien die van bovenaf steeds met dezelfde factor worden verkleind. De buitenkant heeft een stalen constructie waarbij per laag het aantal driehoeken steeds twee minder wordt. Er is bij elk zijvlak twee stelsels van evenwijdige lijnen te zien.



Opgave 1.3.2 Modellen

a.

gebouw	hoogte	lengte	inhoud
Grote glazen piramide	21,65	35,42	9054
Cheops	146,59	230	2584870

We kijken naar de verhoudingen van de afmetingen. $\frac{21,65}{146,59} \approx 0,148$ $\frac{35,42}{230} \approx 0,154$. De factoren verschillen 0,006. De Grote glazen piramide kunnen we nagenoeg als een model zien van de grote piramide Cheops.

- b. We kunnen kiezen voor het werken met een vermenigvuldigingsfactor. Kiezen we voor 0,15 dan is de inhoud van Cheops $(\frac{1}{0,15})^3 \approx 296$ keer zo groot als de inhoud van de Grote glazen piramide. Rekenen we de inhouden uit, zie tabel in a dan is de inhoud van Cheops ongeveer 285 keer zo groot. Verschillen komen voort uit de afrondingen. Afgerond in honderdtallen kunnen we zeggen dat de inhoud van Cheops 300 keer zo groot is.
- c. Nodig zijn dus de afmetingen.

Opgave 1.3.3 Glazen panelen van de grote Louvre piramide

Aantal panelen bij zijvlak zonder ingang is $18 + 17 + \dots + 3 + 2 + 1 = 9(18 + 1) = 171$.

Aantal panelen bij drie van dit soort zijvlakken is 513.

Aantal panelen van zijvlak met ingang is $171 - 11 = 160$.

Totaal aantal glazen panelen is $513 + 160 = 673$.

Opgave 1.4.1 Dodecaëderhuis

a. De afstand van twee tegenover elkaar liggende grensvlakken is gelijk aan de diameter van de ingeschreven bol.

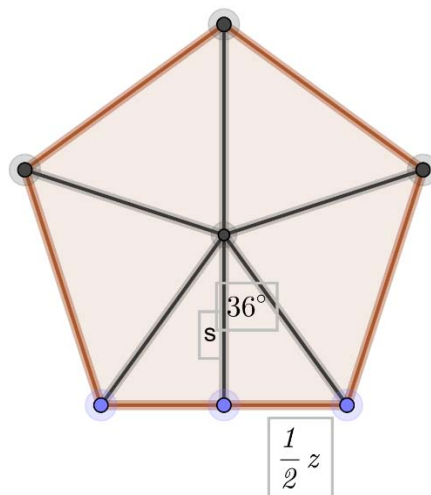
b. $h = 4\sqrt{2,5 + 1,1\sqrt{5}} \approx 8,91$ meter. Het scheelt 9 cm.

c. $V = 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot z\sqrt{2,5 + 1,1\sqrt{5}} \cdot \text{opp}(\text{vijfhoek})$

Je kunt de vijfhoek verdelen in tien congruente driehoeken. Er zijn vijf middelpuntshoeken van 72 graden. Een zo'n middelpuntshoek wordt door hoogtelijn s verdeeld in hoeken van 36 graden. Er geldt $\tan(36^\circ) = \frac{0,5z}{s}$ dus $s = \frac{0,5z}{\tan(36^\circ)}$.

$$\text{Opp}(\text{vijfhoek}) = 5 \cdot \frac{\frac{1}{4}z^2}{\tan(36^\circ)}. V = 2,5 \cdot z^3 \sqrt{2,5 + 1,1\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\tan(36^\circ)}$$

d. Invullen $z = 4$ geeft 491 kubieke meter. Dat is grofweg 25% meer dan de inhoud van een kubushuis in Helmond.



Opgave 1.4.2 Koepel de Basilica di Santa Maria del Fiore

a. Metingen doen.

b. Ook op grond van je bevindingen bij a mag je nog niet beweren dat de architect de gulden snede heeft toegepast.

Opgave 1.4.3 Modulor

a. Bijvoorbeeld $\frac{1829}{1130} \approx 1,619$, $\frac{1130}{698} \approx 1,619$, $\frac{2260}{1397} \approx 1,618$, enzovoort.

b. $698 + 432 = 1130$. Voer nog wat controles uit.

c. $204 + 126 = 333$. $30 + 18 = 48$, enzovoort. $11 + 18$ geeft geen 30. Dat heeft weer te maken met afrondingen.

d. $x, \varphi \cdot x, \varphi^2 \cdot x$.

Uitleg: Van laag naar een hoger (groter) getal geldt dat de som $x + \varphi \cdot x$ gelijk is aan het getal dat dan volgt $\varphi^2 \cdot x$.

Opgave 1.4.4 Projecten

a. Bij het ontwerp van Niemeyer is er sprake van een gulden rechthoek dus de hoogte van het gebouw is $\varphi \cdot 87 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}) \cdot 87 \approx 141$ meter.

b. Bij het ontwerp van Le Corbusier is de breedte van elke rechthoek 87 meter. Omdat het gulden rechthoeken zijn hebben ze alle drie dezelfde hoogte, waarbij de hoogte de kleinste afmeting is: $\frac{87}{\varphi} \approx 53,77$ m. Dus de totale hoogte is driemaal zoveel en dat geeft 161 meter.

c. Wat blijkt? Er is geen sprake van een perfecte stapel van drie gulden rechthoeken. We gaan ervan uit dat de verdiepingen allemaal even hoog zijn. De eerste rechthoek telt 9 verdiepingen, de tweede verdieping heeft 11 verdiepingen en de derde rechthoek heeft er 10.

Hoofdstuk 2: Gebouwen geïnspireerd door veelvlakken

Opgave 2.1.1 Kaäba

Inhoud is $12 \times 10 \times 15 = 1800$. 1800 m^3 dus. Voor een kubus met ribbelengte r en met die zelfde inhoud geldt: $r^3 = 1800$ dus $r = 1800^{1/3} \approx 12,16$ meter.

Opgave 2.2.1 Icosaëder en de gulden snede

- Er is meegedeeld dat vierhoek $ABCD$ een rechthoek is. AB is een ribbe en BC is een diagonaal van een regelmatige vijfhoek waarvan de zijden even lang zijn dan AB . De verhouding van die twee lengtes is volgens de definitie de gulden snede.
- Van de 30 ribben zijn er 15 tweetallen evenwijdige ribben die een gulden rechthoek bepalen.

Opgave 2.2.2 Niet regelmatig

a.

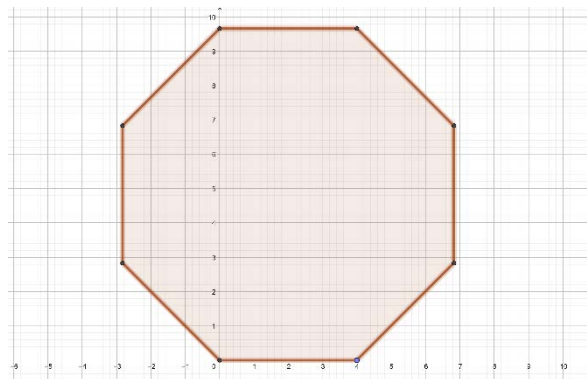
Veelvlak	Aantal grensvlakken	Aantal ribben
Rhombicubotaëder	$(1 + 4 + 8 + 4 + 1) = 18$ vierkanten, 8 driehoeken, totaal 26 grensvlakken.	$\frac{24 \times 4}{2} = 48$ ribben, er zijn 24 hoekpunten.
12-puntige dodecaëder ster	$12 \times 5 = 60$	$12 \times 10 = 120$

- Er zijn twee soorten grensvlakken bij de Rhombicubotaëder. De 12-puntige ster voldoet ook niet aan het vierde kenmerk: 'het convex zijn'.

Opgave 2.3.1 Sterdodecaëder

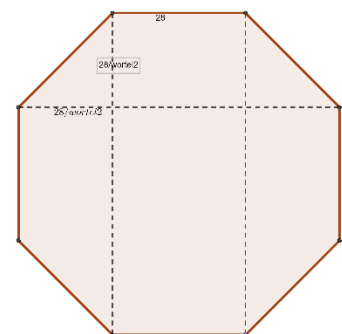
Opgave 2.3.2 De Nationale Bibliotheek van Wit-Rusland

- Zo'n verdieping heeft de vorm van een regelmatig achtzijdig prisma. Het bovenaanzicht is een regelmatige achthoek.
-



- De vorm van de vloer is onder te verdelen in twee even grote gelijkbenige trapeziïums en in een rechthoek. Breedte van de vloer is even lang als de basis van het trapezium: $28 + \frac{56}{\sqrt{2}}$. Totale oppervlakte is $2 \cdot \frac{1}{2} (28 + \frac{56}{\sqrt{2}} + 28) \cdot \frac{28}{\sqrt{2}} + (28 \cdot (\frac{56}{\sqrt{2}} + 28)) \approx 3785$ vierkante meter.

Andere methode: Bereken oppervlakte van kadervierkant en trek daarvan af tweemaal de oppervlakte van een vierkant met zijde $\frac{28}{\sqrt{2}}$.



Opgave 2.3.3 *Afgeknotte icosaeëder*

- a. Er zijn twee soorten grensvlakken, regelmatige vijf- en zeshoeken.
- b. Er zijn oorspronkelijk 12 hoekpunten. Bij het afknotten bij die hoekpunten ontstaan dan 12 regelmatige vijfhoeken. Elk driehoekig grensvlak verandert in een regelmatige zeshoek. En daar zijn er dus 20 van. Het totaal aantal hoekpunten is $12 \times 5 = 60$. Bij elk hoekpunt komen 3 ribben samen. Ze tellen dubbel. Er zijn dus in totaal 90 ribben.

Hoofdstuk 3: Het denken en ontwerpen van een architect

Opgave 3.1.1 *Interieur*

Opgave 3.1.2 *Eigenschappen van het matenstelsel*

- a. Je moet vijf rijtjes van vier opeenvolgende maten controleren. Het klopt ongeveer of precies.
- b. $d = a + be = b + cf = c + d = a + b + c = a + e$. Dus $f - e = a$.
- c. Je moet aantonen dat $h - 2e = a$. $h = e + f = e + (e + a) = 2e + a$. Dus $h - 2e = a$.

Opgave 3.2.1 *Plastische getal*

- a. Bij marge 0,1% geldt $1,001a = 0,999b$ en $1,001b = 0,999c$. Dat geeft $\frac{b}{a} = \frac{1,001}{0,999} = \frac{c}{b}$.

Bij marge 4% geldt $1,04a = 0,96b$ en $1,04b = 0,96c$. Dat geeft $\frac{b}{a} = \frac{1,04}{0,96} = \frac{c}{b}$.

Conclusie: verhoudingen blijven aan elkaar gelijk.

- b. $d = a + bar^3 = a + ar$. Deel door a : $r^3 = 1 + r$. Controle via GR: $\frac{1}{1,324717} \approx 0,75$, $\frac{1}{1,324717^2} \approx 0,57$ ($\frac{4}{7} \approx 0,57$), enzovoort.

Opgave 3.2.2 *Stelsels afleiden*

Stelsel 4 krijg je door de getallen van stelsel 2 opeenvolgend af te trekken van de getallen van stelsel 1.

Stelsel 5 krijg je door de getallen van stelsel 3 opeenvolgend af te trekken van de getallen van stelsel 2.

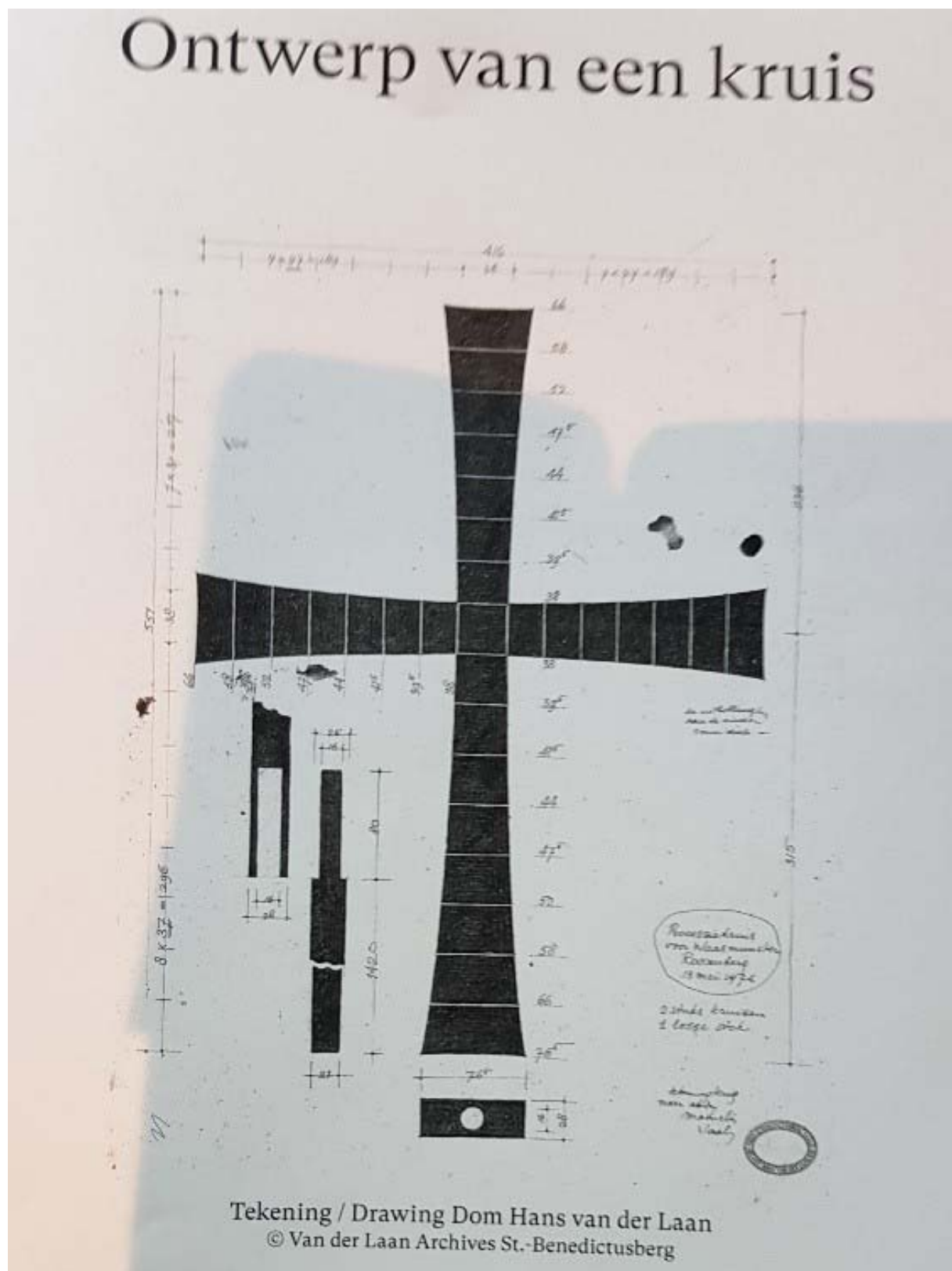
Stelsel 6 krijg je door de getallen van stelsel 3 opeenvolgend af te trekken van de getallen van stelsel 1.

Opgave 3.2.3 *Ontwerp van een kruis*

Het gaat om de vier volgende maten: 236, 315, 416 en 551. Deze zijn terug te vinden in de eerste vier maten van het matenstelsel $1, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{7}{3}, 3, 4, \frac{16}{3}$ en 7.

236	315	416	551	$315 + 416$ = 731	$416 + 551$ = 967	$551 + 731$ = 1282	$731 + 967$ = 1698
1	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{3}$	3	4	$\frac{16}{3}$	7

Zie ook de bijlage op de volgende pagina.



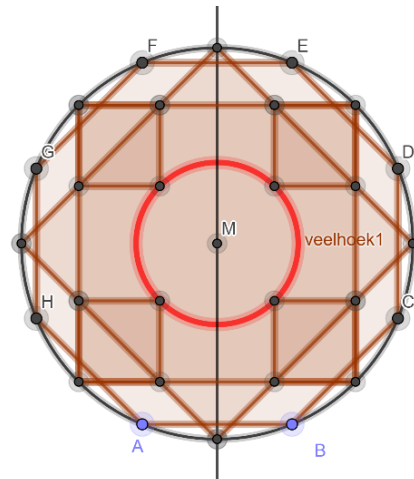
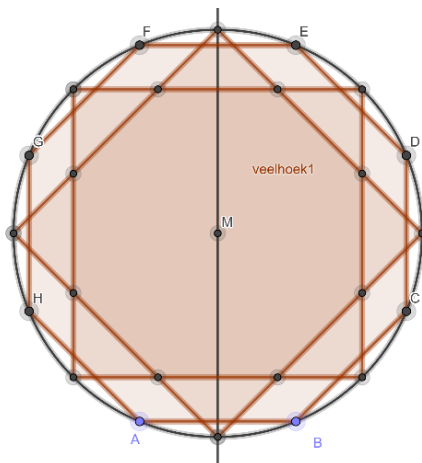
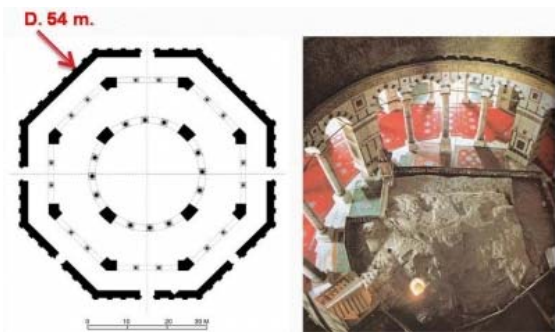
Hoofdstuk 4: (Be)werken met elementaire vormen

Opgave 4.1.1 Kunstwerken van Carel Visser

- Van boven naar beneden halverwege lijkt er sprake van een regelmatige vergroting. Bovenste en onderste deel lijken elkaar spiegelbeeld ten opzichte van het horizontale vlak halverwege.
- Er is sowieso bij alle drie sprake van stapelingen en regelmatigheden. Ze zijn alle drie symmetrisch. Maar in het symmetrisch zitten ook weer verschillen. Figuur c bijvoorbeeld heeft twee verticale symmetrievlakken terwijl figuur b ook een horizontaal spiegelvlak heeft. Ook figuur a heeft geen horizontaal spiegelvlak. Bij figuren a en b is sprake van ‘vergrotingen en verkleiningen’.

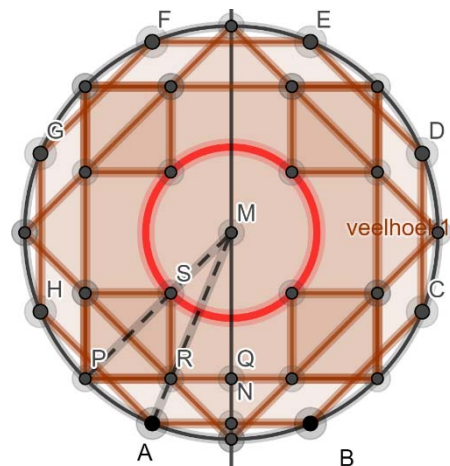
Opgave 4.2.1 Rotskoepel

- a,b** Met behulp van een cirkel kan een regelmatige achthoek $ABCDEFGH$ worden getekend. De vier portalen bevinden zich op het midden van de bogen AB , CD , EF en GH . Bepaal de middens van de vier overgebleven bogen en teken de twee gewenste vierkanten. De vierkanten snijden elkaar op 8 plaatsen waar de pijlers zich bevinden.



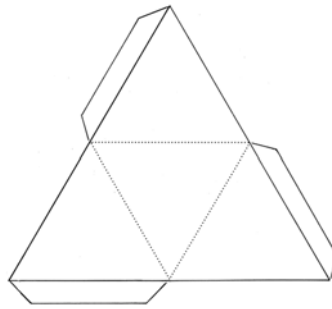
- c.** Afstand van middelpunt M tot zijde AB is 27 meter. Het voetpunt van M op zijde AB noemen we N . Beschouw $\triangle MNB$. Merk op dat $\angle AMB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$. $\tan(\angle NMB) = \tan(22,5^\circ) = \frac{NB}{MN}$. $NB = 27 \cdot \tan(22,5^\circ) \approx 11,18$. $AB = 22,37$. Omtrek achthoek is 179 meter.

- d.** Straal MB , zie $\triangle MNB$, kun je berekenen met $\cos(22,5^\circ) = \frac{27}{MB}$. $MB = \frac{27}{\cos(22,5^\circ)} \approx 29,225$ m. Beschouw de volgende punten: P is het midden van boog AH , S is het snijpunt van straal PM met de rode cirkel, R is het snijpunt van straal AM met beide vierkanten. Punt Q is het snijpunt van MN met het rechtopstaande vierkant. $SM = PM - PS = 29,23 - PS$. We willen PR uitrekenen om PS te vinden. Merk op: $MQ = PQ = \frac{PM}{\sqrt{2}} \approx 20,66$. Er geldt: $\frac{RQ}{AN} = \frac{MQ}{MN}$, $\frac{RQ}{11,18} = \frac{20,66}{27}$, $RQ = 8,56$. Dus $PR = PQ - RQ = 20,66 - 8,56 = 12,10$. $PS = \sqrt{2} \cdot PR = 17,11$ en $SM = 29,23 - 17,11 = 12,12$. Oppervlakte cirkel is $\pi \cdot 12,1^2 \approx 460$ vierkante meter.



Opgave 4.2.2 *Art Tower in Mito*

a.



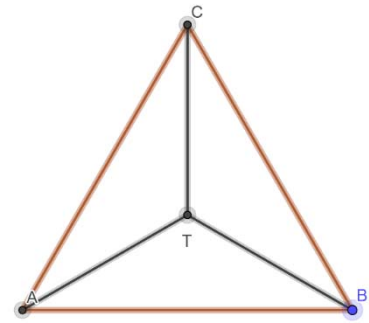
- b. Er zijn drie spiralen te zien. De hoekpunten van de tetraëders liggen op die spiralen. Een tetraëder heeft van de vier hoekpunten twee op één van de drie spiralen liggen. De andere twee hoekpunten liggen op de twee andere spiralen.
- c. Al zou je een oneindige stapeling hebben van regelmatige viervlakken nooit zul je een viervlak vinden die exact dezelfde ligging (oriëntatie) heeft als een van de voorgaande viervlakken. Dit komt omdat de schroeflijnvormige spoed per cel geen rationale breuk van een cirkel is. Er is dus bij een willekeurig viervlak van de stapeling niet een ander viervlak van de stapel te vinden zodat door een rotatie die in dezelfde positie komt te liggen.
- d. Ga eerst na uit hoeveel viervlakken de toren is opgebouwd.

Ontwerp: Het ontwerp is mogelijk gebaseerd op de gelijksoortige spiraalvormige papieren lampions die door een vriend van Arata Isozaki ontworpen werd. Het gaat om de beeldhouwer Isamu Noguchi. De toren doet ook denken aan *Colonne sans fin* van beeldhouwer Brancusi.



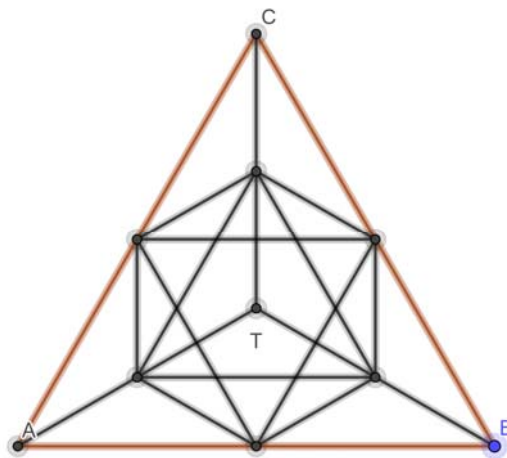
Opgave 4.2.3 *Tetraëder van Bottrop*

- a. Het grondvlak heeft de vorm van een gelijkzijdige driehoek. Rekening houdend met de schaal moet er een driehoek worden getekend met zijden van 12 cm. Geef de top aan met de letter T en de hoekpunten van het grondvlak met A , B en C .

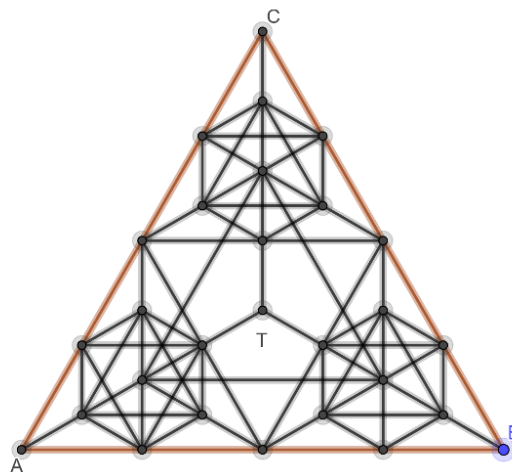


- b. Projectie van top T op het grondvlak $\triangle ABC$ noemen we T' . Beschouw $\triangle AT'T$. We moeten uitrekenen de lengte van $T'T$. $AT' = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2700}$. $AT'^2 = 1200$. $TT'^2 = 3600 - 1200 = 2400$. Totale hoogte is $\sqrt{2400} + 9 \approx 58$ m.

c.



- d. Er zijn 6 buizen van 60 meter. Er zijn 12 buizen van 30 meter. Er zijn 36 buizen van 15 meter.

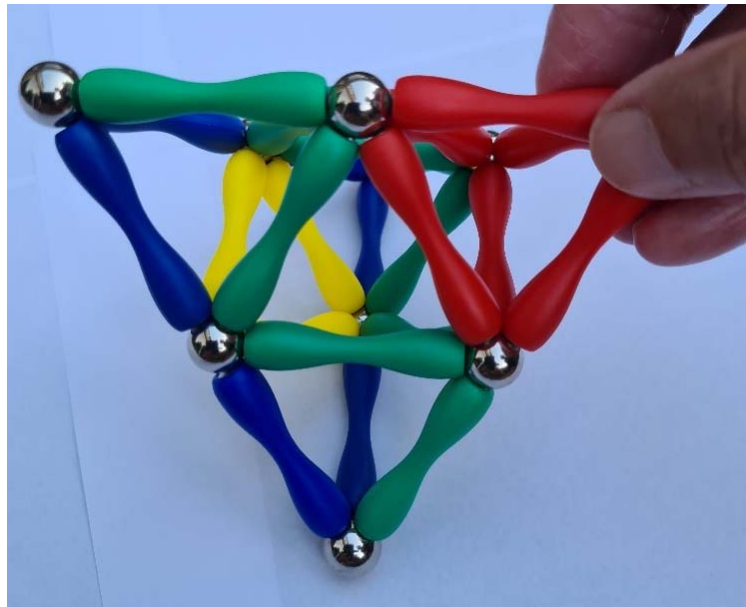


Opgave 4.2.4 *Sierpinski-driehoeken*

- a.
- b. Bij de eerste iteratie wordt een driehoek weggelaten, bij de tweede iteratie zijn dat er drie, bij de derde iteratie zijn dat er 9, enzovoort. Totaal weggelaten: $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364$ driehoeken.

Opgave 4.2.5 *Tetraëder van Bottrop (2)*

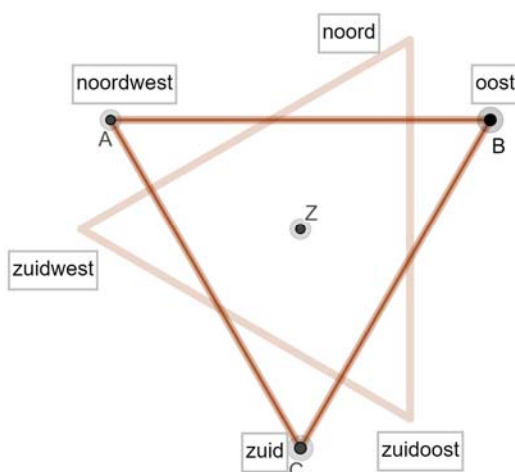
- a. Regelmatig achtvlak. Dat veelvlak heeft zes hoekpunten en acht driehoekige grensvlakken. Die hoekpunten zijn de middens van de ribben van de oorspronkelijke tetraëder. Zie de figuren hier onder.

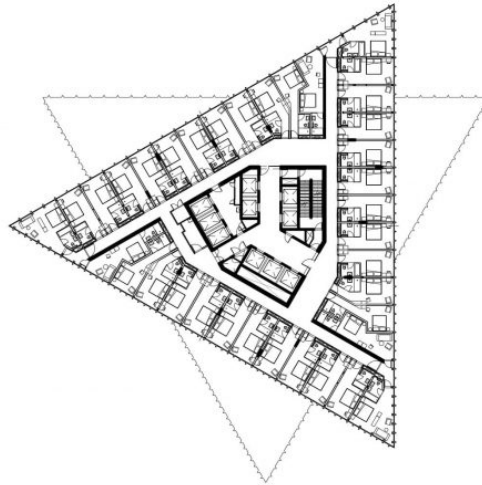


- b. We letten nu op de regelmatige achtvlakken. Na één bewerking – een onderverdeling maken van kleinere tetraëders – is er één regelmatig achtvlak. Na twee bewerkingen zijn er $(1 + 4)$ regelmatige achtvlakken. Na drie bewerkingen: $(1 + 4 + 16)$. Na vier bewerkingen: $(1 + 4 + 16 + 64)$. Na vijf bewerkingen zijn er $(1 + 4 + 16 + 64 + 256)$ achtvlakken, enzovoort. Er is sprake van een meetkundige rij $1, 4, 16, 64, \dots$ met reden 4.

Opgave 4.2.6 *Megahotel in Amsterdam*

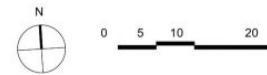
- a. Het hotel bestaat uit drie driezijdige prisma's waarvan het bovenaanzicht van elk prisma een even grote gelijkzijdige driehoek is. In het bovenaanzicht zie je dan twee even grote driehoeken die in het zwaartepunt geroteerd zijn over een hoek van dertig graden. Het bovenaanzicht is dan een zespuntige ster.



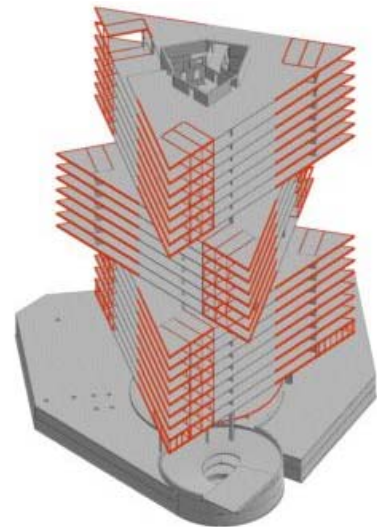


RAI

MIDDLE BLOCK - TYPICAL HOTEL FLOOR

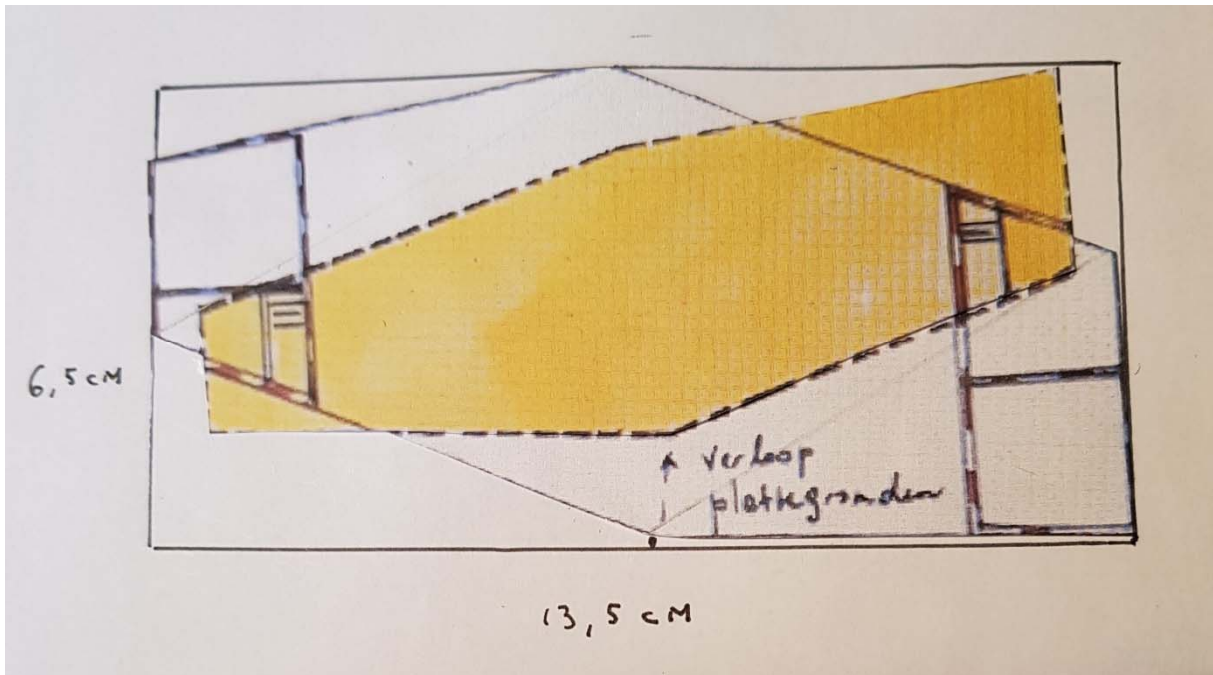


- b.** Een groot driezijdig prisma waarvan de hoogte ongeveer 81 meter is. Vanaf het grondvlak bevinden zich twee open lagen met een totale hoogte van pakweg 10 meter.
- c.** De lengte van een zijde, noem dat x , van een gelijkzijdige driehoek. Verder heb je nodig de hoogte van de onderkant van het onderste prisma. Zie uitwerking bij b. $\text{Inhoud}(\text{prisma}) = 81 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}x^2$.



Opgave 4.2.7 Forum

- a. Het dak is kleiner en ligt niet recht boven het grondvlak.
- b. Maak een rechthoekige omlijsting van de begane grond.



Oppervlakte van 'begane grond' = $6,5 \cdot 13,5 - (0,5 \cdot 21 + 0,5 \cdot 6,5 + 0,5 \cdot 7 \cdot 2,5) = 65$.

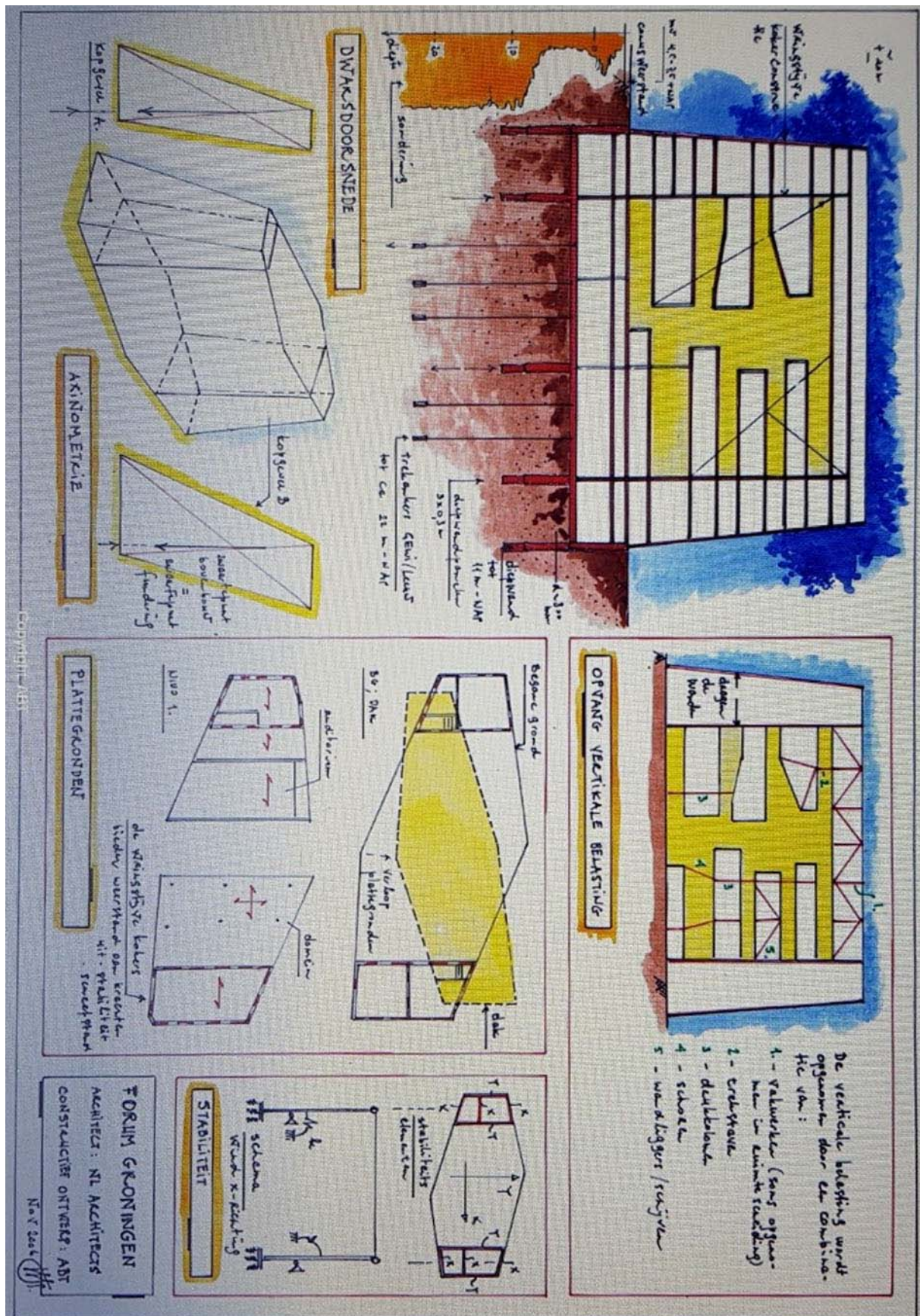
Oppervlakte 'bovenaanzicht dak' = $0,5(1,8 + 4)6 + 0,5(3 + 4)6 = 38,4$. Dat is ongeveer 59% van het grondvlak. Het dak is echter schuin. Schatting ruim 60%.

- c. Kijk in een driehoek naar de hellingshoek. De cosinus moet 0,6 zijn. De hellingshoek is dan 53 graden. Dat is een behoorlijk schuin dak. Theoretisch gezien is dat mogelijk.
- d. ...



Op de volgende pagina's volgen nog twee bijlages bij deze opgave.

Schetsen van Architectenweb.



Bijlage Opgave 4.2.7 *Forum*

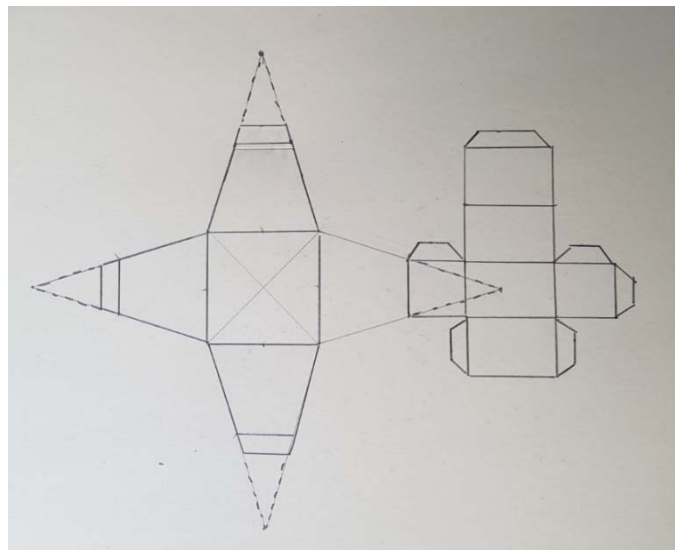
Op 22 oktober '20 kreeg Forum een prijs: 'Beste gebouw van het jaar 2020'



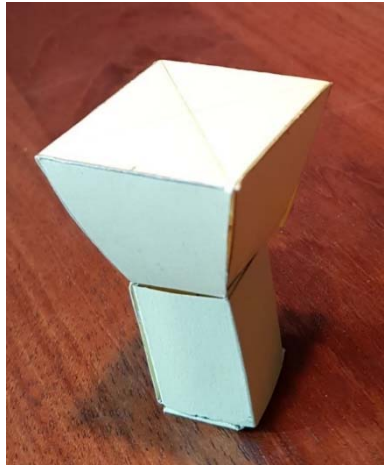
De jury over Forum Groningen: “Knap hoe de architecten deze kolos op de krappe locatie achter de Grote Markt hebben laten landen, waarbij de beschikbare ruimte maximaal is benut. Nog veel indrukwekkender is het gebouw zelf, dat sterk contrasteert met de omgeving, maar ook past in deze stad met zijn moderne architectuur. Maar bovenal waren we onder de indruk van de bruisende binnenwereld, waar studenten boven hun boeken hangen, kinderen spelen en gezinnen een dagje uit beleven. Een gebouw met een enorme aantrekkingskracht en verblijfskwaliteit, dat in alle opzichten een verrijking is voor de stad, als icoon, cultuurwarenhuis, panoramabalkon en als stadshuiskamer.

Opgave 4.2.8 *Tokyo Big Sight*

- a. Doe-opdracht. Denk aan de plakrandjes. In de bouwplaat moet ook de balk te zien zijn. Maak eerst een uitslag van een piramide.



- b. Hieronder een foto van de afgeknotte piramide met ondersteunende balk.

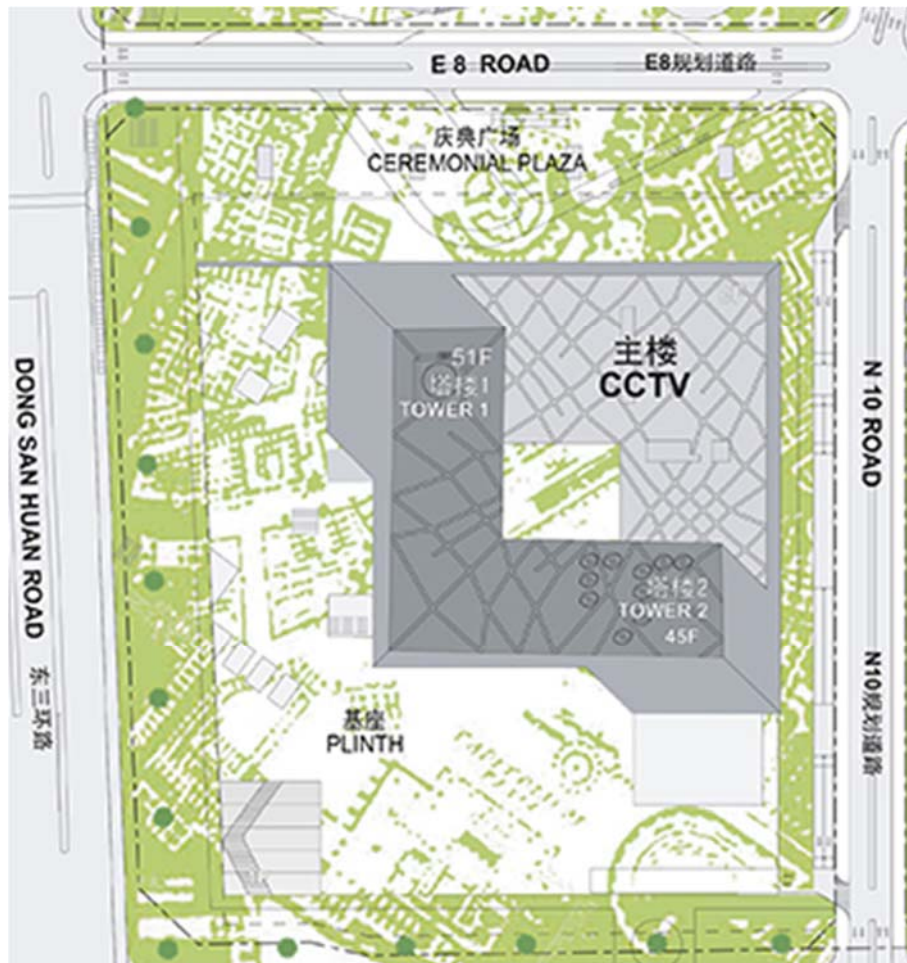


- c. Om een idee te krijgen plaats je vier regelmatige vierzijdige piramiden tegen elkaar zodat het veelvlak een vierkant grondvlak heeft. Je kunt dat doen met allerlei soorten materiaal. Sowieso met behulp van bouwplaten. Zie de foto hiernaast. Er is gebruik gemaakt van het spel Magnetic. Let op de vier toppen van het veelvlak. Je kunt er een piramide in plaatsen waarvan de vier toppen, we noemen ze achtereenvolgens T_1, T_2, T_3 en T_4 , de hoekpunten vormen van het grondvlak. Dat grondvlak duiden we aan met $T_1T_2T_3T_4$. Omdat in werkelijkheid de vier piramiden afgeknot zijn zal het grondvlak wel evenwijdig zijn met vlak $T_1T_2T_3T_4$ maar een stuk kleiner. De vorm van het middenstuk is een regelmatige vierzijdige piramide.



Opgave 4.2.9 Grote Onderbroek

- a. De uiteindelijke vorm zou voortgekomen kunnen zijn door bij een vierzijdige piramide de top scheef af te knotten. Bij het overgebleven deel worden weer stukken verwijderd.
- b.



- c. Het gebouw is geen torenflat geworden. Je kunt het gebouw van verschillende richtingen bekijken en steeds verandert de vorm en zie je een andere vorm van de opening. Koolhaas wil af van de typologie wolkenkrabber waarbij slechts nog een zinloos doel is overgebleven om de hoogste te zijn. Hij zoekt een vorm die zich verbindt met de stad. Door de twee torens op hoogte met elkaar te verbinden omhult het gebouw de ruimte. Daar waar een wolkenkrabber als een tweedimensionaal stokje gezien kan worden, is de CCTV in alle richtingen anders.
- d. De hoogte van het trapezium is $161,00 \text{ m} - 46,45 \text{ m} = 114,55 \text{ m}$. Kies bijvoorbeeld het standbeeld dat hoort bij figuur 4.2.15. Met behulp van een schaal, zie de hoogte in figuur 4.2.15, vind je voor de basis ongeveer 60 meter en voor het bovenste lijnstuk van het trapezium 37 meter. De grootte van de trapeziumopening is $\frac{1}{2}(60 + 37) \cdot 115$. Afgerond in honderdtallen: 5600 vierkante meter.

Opgave 5.2.3 Hoe ontwerp je het quinto acuto-profiel?

- a. De grootte van een middelpuntshoek is $360 : 8 = 45^\circ$. Teken een hulplijn loodrecht op de x -as. Hieruit volgt dat $\triangle OHH'$ gelijkbenig is, dus $H'O = HH'$.

$$x_H = -\cos(45^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, y_H = \sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Coördinaten H : $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$. Zonder goniometrie kan ook met het toepassen van de Stelling van Pythagoras in $\triangle OHH'$.

- b. Merk op: $G(0,1)$.

$$x_M = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}+0}{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{2}, y_M = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}.$$

$$M(-\frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}).$$

- c. $\triangle EMM''$ is rechthoekig. $EM'' = 1 + \frac{1}{4}\sqrt{2}$, $M''M = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Stelling van Pythagoras geeft:

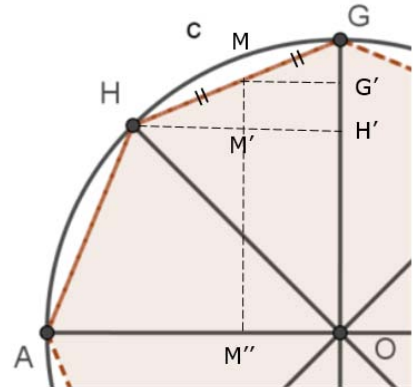
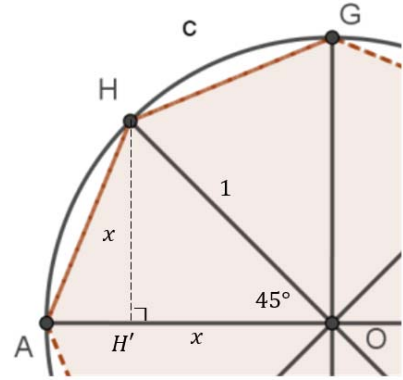
$$(M''M)^2 + (M''E)^2 = (EM)^2,$$

$$(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2})^2 + (1 + \frac{1}{4}\sqrt{2})^2 = (EM)^2,$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{2}{16} + 1 + 2 \times \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{2}{16} = (EM)^2$$

$$1\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2} = (EM)^2,$$

$$EM \approx 1,600.$$



Opgave 5.2.4 Basis Lantaarn

- a. Trek hulplijn PJ . $JP = JA = 8$, $JQ' = 3 - (\frac{1}{2} \times PQ) = 3 - (\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$, $JP' = 6 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3}$.

Stelling van Pythagoras geeft in $\triangle JPP'$:

$$(PP')^2 + (JP')^2 = (JP)^2,$$

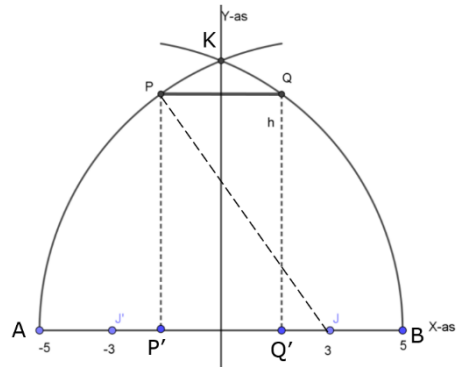
$$(PP')^2 + (\frac{14}{3})^2 = (8)^2,$$

$$(PP')^2 = \frac{380}{9},$$

$$PP' = h \approx 6,5,$$

$$\frac{h}{10} \approx 0,65.$$

- b. $\frac{116}{174} \approx 0,67$. De verhouding is niet in overeenstemming met deze twee gegevens.



Opgave 5.2.5 Verhouding

Hoogte halve cirkelboog is $\frac{1}{2} \cdot R$. Bij de hoogteberekening van een spitsboog kijk je naar de hoogte van een gelijkzijdige driehoek waarvan de zijden gelijk zijn aan R . Er geldt hoogte is $\frac{1}{2} \cdot R \cdot \sqrt{3}$. Bij het quinto acuto-profiel kijk je naar een rechthoekige driehoek waarvan de schuine zijde gelijk is aan $0,8R$ en een rechthoekzijde gelijk is aan $0,3R$. Met behulp van de Stelling van Pythagoras geldt:

$$h^2 + (0,3R)^2 = (0,8R)^2,$$

$$h^2 = 0,55R^2 = 0,55 \cdot (2 \cdot \frac{1}{2}R)^2 = 0,55 \cdot 2^2 \cdot (\frac{1}{2}R)^2 = 2,2(\frac{1}{2}R)^2,$$

$$h = \frac{1}{2}R \cdot \sqrt{2,2}.$$

De drie hoogtes verhouden zich als $\frac{1}{2}R : \frac{1}{2}R \cdot \sqrt{2,2} : \frac{1}{2}R \cdot \sqrt{3} = 1 : \sqrt{2,2} : \sqrt{3}$.

Opgave 5.2.6 Koepel van het Rijksdaggebouw

- a. ...
- b. ...
- c. Bij een halve bol zou de hoogte gelijk zijn aan de halve diameter maar dat is niet het geval. De hoogte is 23,5 en dus meer dan de straal met waarde 19. De koepel lijkt op een bol die in verticale richting is uitgerekt.
- d. ...
- e. De koepel heeft de vorm van een uitgerekte halve bol. De straal is 19 meter. Inhoud halve bol is $\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 19^3 \approx 14365,46 \text{ m}^3$. In verticale richting gaan we de bol uitrekken. Hoogte koepel is 23,5 m. Uitrekkingsfactor is dan $\frac{23,5}{19}$. Inhoud koepel is $\frac{23,5}{19} \cdot \frac{2}{3} \pi \cdot 19^3 \approx 17767,8 \text{ m}^3$. Wat zegt dit getal jou? Vergelijk het met de inhoud van je woonhuis. Hieronder een vuistregel:

Vermenigvuldig de vloeroppervlakte van elke verdieping met de hoogte. De standaardhoogte van een verdieping is bij veel woningen 2,5 meter. Een garage of schuur tel je ook mee.

Zo kun je snel een schatting krijgen over de inhoud van je woonhuis. De inhoud van de koepel zal waarschijnlijk meer dan 40 keer zoveel zijn als de inhoud van jouw woonhuis.



Hoofdstuk 6: Eindopdrachten

Enkele opmerkingen en bijlagen bij dit hoofdstuk.

Pagina 54, bijlage bij Figuur 6.2.2, opening Intempo

In 2021 is in Benidorm het Intempo-gebouw, de hoogste woontoren van Spanje, na 15 jaar eindelijk ‘open’ gegaan. Twee gouden torens van 193 meter hoog met 47 verdiepingen, verbonden door een M-vormige koepel, domineren de skyline van Benidorm. De Intempo woontoren is een van de eerste in Europa waarvan het lange bouwproces een stil symbool is geworden van de vastgoedwaan in Spanje die dankzij de huizen crisis tot stilstand kwam. 15 jaar na de eerste steen, was het werk voor 90% klaar en konden de deuren open. De geschiedenis van Intempo gaat terug tot 2006, toen het werd gepromoot door de Baskische zakenman José Ignacio de la Serna (Olga Urbana SL). De vastgoedcrisis en bankencrisis bracht het project aan het wankelen. In 2012 was er een schuld van 108 miljoen euro. Pas in 2018 nam het investeringsfonds Strategic Value Partners (SVPGlobal) het pand over en startte het de promotie weer op. Sindsdien is het gebouw ook weer verder in aanbouw met als doel de constructie aan te passen aan de huidige normen. Alle 256 woningen in het gebouw hebben op de een of andere manier veranderingen ondergaan. De grootste wijzigingen zijn geconcentreerd in de hogere verdiepingen, genaamd ‘diamant’. Daar stuitte de huidige eigenaren op het probleem dat de helft van de woningen niet aan de zeezijde lag, maar aan bergzijde waar het themapark Terra Mítica zich bevindt. De oplossing: appartementen samenvoegen zodat ze zowel uitzicht op zee, als op de bergen hebben. Dit is het meest exclusieve deel van het gebouw, met woningen van meer dan een miljoen euro.



Pagina 54, ontwerpen met morphotheek

Het aantal combinaties is $8 + 7 + 6 + \dots + 1 = 4 \times 9 = 36$.

Of denk aan een roosterdiagram van acht bij acht: $8 \times 8 - 8 = 56$. Totaal = $28 + 8 = 36$.

Pagina 56, figuur 6.2.7 en figuur 6.2.8

Het volgende verschil zal 15 + 6 zijn, dus 21. Bouwset 5 breid je uit van onderen met 21. Het totaal aantal eenheden zal zijn 35 + 21, dus 56.

Pagina 56, figuur 6.2.9

$$T_{99} = \frac{99(99+1)}{2} = \frac{9900}{2} = 4950$$

Pagina 58, afgeknotte octaëder bij figuur 6.3.3

Twee formuleringen van de opgave.

Open formulering

Ontwerp een gebouw waarvan de vorm is afgeleid van het platonische lichaam het regelmatig achthoek. Daarbij is het de bedoeling dat je bij elk hoekpunt gelijke stukken wegneemt. Het gebouw moet een volume hebben van 500 kubieke meter. Dit volume is vergelijkbaar met dat van de kubus- en bolwoningen. Geef duidelijk belangrijke afmetingen aan zoals de afmetingen van het grondvlak en de hoogte van het gebouw.

Minder open geformuleerd

Je gaat een huis ontwerpen dat qua volume te vergelijken is met een kubus- of bolwoning. De vorm van het huis moet een *afgeknotte octaëder* zijn met een volume van 500 kubieke meter.

a. Ga na dat er precies twee soorten grensvlakken zijn en beredeneer hoeveel van elke soort.

Een afgeknotte octaëder heeft precies 36 ribben die allemaal even lang zijn.

b. Ga na en bereken de lengte van een ribbe.

c. Maak een 3D-tekening van de afgeknotte octaëder.

Het huis moet ook nog aan de volgende eisen voldoen:

- Het grondvlak van het huis moet een regelmatige zeshoek zijn..
- Het huis moet vier ramen hebben.
- In het dak moet een zo'n groot mogelijke cirkelvormige uitsparing komen waarin een vijfde raam wordt geplaatst.

d. Ontwerp een huis dat aan die eisen voldoet en geef berekeningen van alle belangrijke afmetingen waaronder de hoogte van het huis.

De inhoud van de octaëder geven we aan met $2I$ waarbij I gelijk is aan de inhoud van piramide $F.ABCD$.

Een *afgeknotte octaëder* is een Archimedisich lichaam met 14 vlakken waarvan 6 vierhoekig en 8 zeshoekig, 24 hoekpunten en 36 ribben. Het figuur ontstaat als bij een octaëder de hoeken zodanig worden afgeknot dat de ribben van het figuur gelijk zijn. Dat heeft tot gevolg dat de 36 ribben drie maal zo klein zijn dan de ribben van de oorspronkelijke octaëder. De inhoud van zo'n afgeknotte piramide bij een hoekpunt – merk op dat die piramide gelijkvormig is met piramide $F.ABCD$ – is 27 keer zo klein.

We nemen voor de lengte van een ribbe van de octaëder $3x$. Merk op dat de hoogte van piramide $F.ABCD$ gelijk is aan de helft van de lengte van diagonaal AC . Dus de hoogte is $\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 3x$.

$$\text{Volume van afgeknotte octaëder} = 2I - 6 \cdot \frac{1}{27}I = \frac{48}{27} \cdot I.$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 3x \cdot (3x)^2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 9 \cdot x^3$$

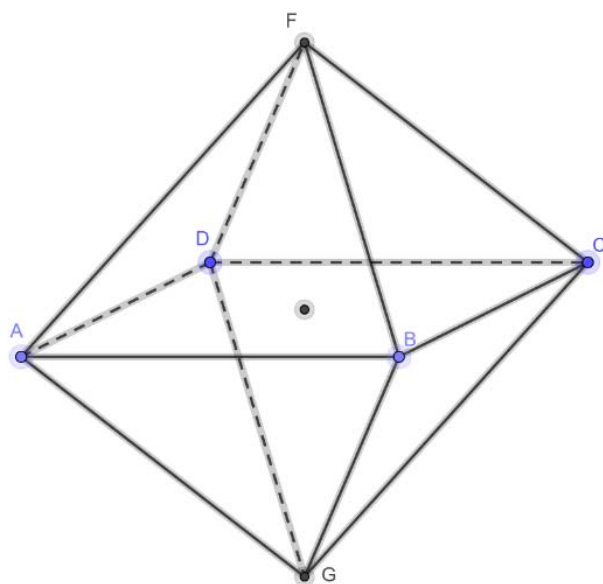
$$\text{Dus, volume van afgeknotte octaëder} = \frac{48}{27} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 9 \cdot x^3 = 8\sqrt{2} \cdot x^3.$$

Dat volume moet 500 kubieke meter zijn.

$$\text{Dus } 8\sqrt{2} \cdot x^3 = 500.$$

$$x^3 = \frac{125}{2\sqrt{2}} = \frac{5^3}{(\sqrt{2})^3}. \text{ Dus } x = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Oppervlakte van een *vierkant grensvlak* van de afgeknotte octaëder is $\frac{25}{2} = 12,5 \text{ m}^2$.



Dan bekijken we een zeshoekig grensvlak. Oppervlakte van een zeshoekig grensvlak is zesmaal de oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek met zijdelengte $\frac{5}{\sqrt{2}}$. Oppervlakte zeshoekig grensvlak is $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 32,48 \text{ m}^3$.

De afgeknotte octaëder heeft een ingeschreven bol. De diameter van deze bol kan gebruikt worden als de hoogte van een huis met de vorm van een afgeknotte octaëder waarvan het grondvlak zeshoekig is. Het is handig om de afstand te nemen van twee overstaande vierkante grensvlakken.

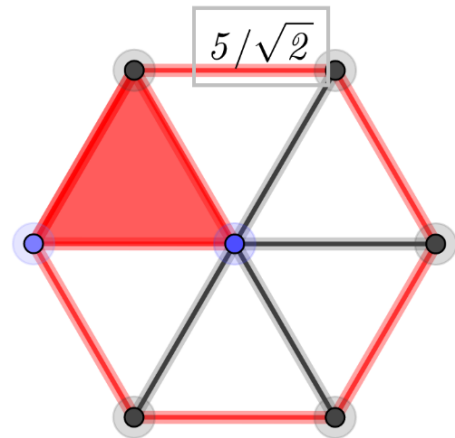
$$\text{Hoogte} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \text{hoogte piramide } F.ABCD$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.5\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = 10 \text{ m.}$$

Straal van ingeschreven cirkel van regelmatige zeshoek

$$= \sqrt{3} \cdot (\text{lengtehalvezijde}) = \frac{2.5}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3} \approx 3,06 \text{ m.}$$

Oppervlakte cirkelvormig raam is 29,45 vierkante meter.



pagina 69, bijlage bij opgave 6.3.1, Notre-Dame de Paris

