Zebra 64 - Rekenen met risico's

Antwoorden op de opgaven

Opgave 1.1 – Sluit een autoverzekering (bijna) af

Zelf doen, leuk!

Opgave 1.2 – Kans op gesloten skipistes

Deze kans is gelijk aan €1,50/€175 = 3/350 ≈ 0,0086.

Opgave 2.1 – Verwachting en variantie van schadebedragen

a. $\overline{X}$=9.099.114 en Var(X)=722.674.756.635.646 of, hanteerbaarder, $(26.882.611)^2$.

b. Omdat de Delft-schade veel groter is dan de andere schaden, daalt het steekproefgemiddelde ($\overline{X}$=3.863.078). Ook de steekproefvariantie wordt kleiner omdat de Delft-schade een veel grotere afwijking van het gemiddelde heeft dan de andere: Var(X)= $(3.204.328)^2$.

c. Omdat een dergelijke schade aan een gebouw zeer weinig voorkomt (de Enschede-ramp in de cijfers betrof meerdere huizen en gebouwen), is de steekproefhistorie van 18 jaren niet representatief. Het weglaten van de Delft-schade geeft een representatiever beeld en daarmee betere inschatting van de risicopremie. Een bijkomend voordeel is dat de premie lager is voor de klanten. Een nadeel is dat er in dat geval helemaal geen rekening wordt gehouden met de mogelijkheid van een zeer grote brand.
Als de Delft-schade wel meegenomen wordt bij de premiestelling dan resulteert een te hoge premie, wat voor de klanten en de concurrentiepositie niet gewenst is.
In praktijk kiest een actuaris meestal een tussenweg door een inschatting te maken (bijvoorbeeld door wereldwijd te kijken) van de kans op een dergelijke zeer grote schade en hiervoor afzonderlijk een opslag in de premies op te nemen.

Opgave 2.2 – De kans op een miljoenenbrand

a. Gemiddeld zijn er 104,6 miljoenenbranden per jaar op 100.000 gebouwen. Een schatting voor p is daarom 104,6/100.000=0,001046.

b. P[> 120 branden] = 1–P[≤ 120 branden] = 1–0,937 = 0,063.

c. De verwachtingswaarde is gelijk aan 100.000p = 104,6.
De bijbehorende geschatte standaardafwijking is gelijk aan $\sqrt{(100.000p(1–p))} = \sqrt{104,5} \approx 10,22$.

d. Met de Normale verdeling geldt P[> 120 branden] = 0,066. Deze kans is vergelijkbaar, maar iets hoger (5,6%) dan bij het antwoord op b.

Opgave 2.3 – De risicopremie voor een miljoenenbrand

a. p=0,001046, dus E[N]=0,001046.
Het (preciezer) gemiddelde bedrag van een miljoenenbrand is €4,283 miljoen.
De risicopremie voor een gebouw is daarom 0,001046 x €4.283.000 = €4.481.

b. Het gemiddelde jaarlijkse totale schadebedrag aan miljoenenbranden in Tabel 2.4 is €448,6 miljoen. Door dit te delen door 100.000 gebouwen resulteert dit een een risicopremie van €4.486.

c. De uitkomsten van de onderdelen a. en b. zijn ongeveer hetzelfde omdat:

totaal schadebedrag / aantal schaden (Tabel 2.2)
x
aantal schaden (Tabel 2.3) / aantal gebouwen (100.000)
=
totaal schadebedrag (Tabel 2.4) / aantal gebouwen (100.000)

Opgave 3.1 – Bonus-malus bij andere verzekeringen?

a. Bij een zorgverzekering is de directe relatie tussen het eigen gedrag en de gemaakte kosten in de meeste gevallen onduidelijk. Daarnaast is het ethisch en maatschappelijk niet aanvaardbaar dat premies voor mensen met een zwakkere gezondheid hoger zijn dan voor degenen met een goede gezondheid.

Bij brandverzekeringen maakt de combinatie tussen een lage schadekans en een kleinere directe invloed van het eigen gedrag dat een bonus-malus systeem weinig invloed heeft op het claimgedrag.

b. Een voorbeeld is een eigen risico waarbij de verzekerde het eerste deel van de schade zelf betaalt. Dit wordt bijvoorbeeld wel toegepast bij zorg- en brandverzekeringen om de verzekerde aan te sporen om preventieve maatregelen te treffen (gezonde leefstijl, veilige electriciteitsbedrading, enz.).
Minder vaak komt het voor dat de verzekeraar een bepaald percentage betaalt van de kosten, zoals bij sommige tandartsverzekeringen.

Opgave 3.2 – De werking van het bonus-malus systeem

a. Via independer/autoverzekeringen worden na het invullen van (alles fictief) kenteken, geboortedatum, aantal schadevrije jaren en aantal kilometers per jaar, een aantal verzekeringen getoond. Vervolgens klikken op een van de aangeboden verzekeringen en dan op “meer informatie”, “dekking”, “totale dekking” en “bm-ladder” geeft voor een van de verzekeraars het eerste onderstaande overzicht.
Het tweede overzicht werd gevonden door te zoeken op “bonus malus ladder” en op een van de getoonde links te klikken.

Opvallend is dat beide ladders langer zijn dan de 14 treden in ons voorbeeld. Ook zijn de maximale kortingspercentages van 75% en 80% hoger dan de 70% in Tabel 3.1, hoewel de kortingen op trede 14 nog steeds vergelijkbaar zijn. De malus van trede 1 is in het ene geval 15% en in het andere geval 25%, ten opzichte van 20% in ons boekje. Daarbij merken we wel op dat de basistrede 2 in voorbeeld 1 al op het niveau van 95% zit in plaats van 100%.
De verdeling van de kortingspercentages over de treden is vergelijkbaar met onze ladder.
Beide voorbeelden zijn wat strenger in de terugval na 1 schade (tot en met respectievelijk trede 5 en 6 is de terugval helemaal naar trede 1 in plaats van trede 4), waarna de terugval bij schade in het eerste voorbeeld steeds 6 treden is en het tweede voorbeeld 5 tot 7 treden. Het systeem van Tabel 3.1 is milder met een terugval van 4 tot 6 treden.
Ten aanzien van de terugval na 2 schaden zijn beide voorbeelden ook strenger met een terugval van 10-11, respectievelijk 8-12 treden.
In het eerste voorbeeld is dit niet te zien, maar de twee verzekeraars zijn na 3 of meer schaden net zo onherroepelijk als in Tabel 3.1: terug naar af op trede 1.

Al met al zien we dat Tabel 3.1 een goede representatie is van bonus-malus ladders die in praktijk toegepast worden.

Trede	Korting perc.	Zonder schade	Met 1 schade	Met 2 schaden
22	75%	22	16	11
21	75%	22	16	11
20	75%	21	15	10
19	75%	20	14	9
--------------------	Bonusbescherming -----			
18	75%	19	13	8
17	75%	18	12	7
16	75%	17	11	6
15	75%	16	10	5
14	75%	15	9	4
13	72,5%	14	8	3
12	70%	13	7	2
11	65%	12	6	1
10	60%	11	5	1
9	55%	10	4	1
8	50%	9	3	1
7	45%	8	2	1
6	40%	7	1	1
5	35%	6	1	1
4	25%	5	1	1
3	15%	4	1	1
2	5%	3	1	1
1	-15%	2	1	1

Trede	Kortingspercentage	Geen schade is gemeld	1 schade gemeld	2 schades gemeld	3 schades gemeld
Trede 20	80%	20	15	8	1
Trede 19	79%	20	13	7	1
Trede 18	78%	19	12	6	1
Trede 17	77%	18	11	6	1
Trede 16	76%	17	10	5	1
Trede 15	75%	16	9	5	1
Trede 14	70%	15	8	4	1
Trede 13	67,5%	14	7	3	1
Trede 12	65%	13	7	3	1
Trede 11	62,5%	12	6	2	1
Trede 10	60%	11	6	2	1
Trede 9	55%	10	5	1	1
Trede 8	50%	9	4	1	1
Trede 7	45%	8	3	1	1
Trede 6	40%	7	2	1	1
Trede 5	30%	6	1	1	1
Trede 4	20%	5	1	1	1
Trede 3	10%	4	1	1	1
Trede 2	0%	3	1	1	1
Trede 1	-25%	2	1	1	1

b. Bij inschaling op de laagste trede kan een verzekerde geen 'malus' meer krijgen. De extra stimulans om schadevrij te rijden ontbreekt dan.

c. In onderstaande tabel is het tredeverloop van deze verzekerde te zien. Na de aangeduide schadehistorie komt de verzekerde op trede 9 met een premiepercentage van 45%:

Jaar	Trede begin jaar	Schade?	Trede volgend jaar
1	2	schadevrij	3
2	3	schadevrij	4
3	4	schadevrij	5
4	5	schadevrij	6
5	6	schadevrij	7
6	7	schadevrij	8
7	8	schadevrij	9
8	9	schade	6
9	6	schadevrij	7
10	7	schadevrij	8
11	8	schadevrij	**9**

d. De terugval vanuit trede 4 naar trede 1, dat is na twee jaren schadevrij en het jaar daarna schade, is het grootst: 40% van de basispremie.
De *relatieve* malus, dat wil zeggen het percentage verhoging ten opzichte van de premie voordat de schade werd geclaimd, is het hoogst bij de terugval van trede 13 naar trede 8: 54%.

Jaar	Trede begin jaar	# Jaren schadevrij	Trede bij schade	Malus (%basispremie)	Malus (% tov huidige premie)
1	2	0	1	20	20%
2	3	1	1	30	33%
3	4	2	1	**40**	50%
4	5	3	2	30	43%
5	6	4	3	30	50%
6	7	5	4	25	45%
7	8	6	5	20	40%
8	9	7	6	15	33%
9	10	8	7	15	38%
10	11	9	7	17,5	47%
11	12	10	8	15	43%
12	13	11	8	17,5	**54%**
13	14	12	9	15	50%

e. Bij 8 jaren schadevrij jaren klimt de verzekerde zowel bij maatschappij A als B jaarlijks één trede. Het verloop van de te betalen premies als percentages van de basispremie van A is te zien in onderstaande tabel, waarbij in de laatste kolom de korting van 20% bij B is toegepast.

	Trede begin jaar		Premie% (tov basis premie Maatschappij A)	
Jaar	**Maatschappij A**	**Maatschappij B**	**Maatschappij A**	**Maatschappij B**
1	7	5	55	56
2	8	6	50	48
3	9	7	45	44
4	10	8	40	40
5	11	9	37,5	36
6	12	10	35	32
7	13	11	32,5	30
8	14	12	30	28
			325	**314**

In totaal betaalt de verzekerde over acht jaar bij A 3,25 de basispremie en is hij/zij bij B iets goedkoper uit met 3,14 keer de basispremie.
Als er in het eerste jaar een schade geclaimd wordt is de situatie net andersom: dan betaalt de verzekerde 4,55 keer de basispremie bij A en iets meer, 4,6 keer de basispremie, bij B.

	Trede begin jaar		Premie% (tov basis premie Maatschappij A)	
Jaar	**Maatschappij A**	**Maatschappij B**	**Maatschappij A**	**Maatschappij B**
1	7	5	55	56
2	4	2	80	80
3	5	3	70	72
4	6	4	60	64
5	7	5	55	56
6	8	6	50	48
7	9	7	45	44
8	10	8	40	40
			455	**460**

Opgave 3.3 – Verdeling verzekerden over vereenvoudigde bonus-malus ladder

De elementen van l_1 zijn respectievelijk gelijk aan

$$f_1 \cdot p + f_2 \cdot p + f_3 \cdot p = (f_1 + f_2 + f_3) \cdot p = p,$$

$$f_1 \cdot (1-p) + f_2 \cdot 0 + f_3 \cdot 0 = f_1 \cdot (1-p),$$

en

$$f_1 \cdot 0 + f_2 \cdot (1-p) + f_3 \cdot (1-p) = (f_2 + f_3) \cdot (1-p).$$

Vervolgens zijn de drie elementen van I_2:

$$p \cdot p + f_1 \cdot (1-p) \cdot p + (f_2 \cdot + f_3) \cdot (1-p) \cdot p = (p + (f_1 + f_2 + f_3) \cdot (1-p)) \cdot p = (p + (1-p)) \cdot p = p,$$

$$p \cdot (1-p) + f_1 \cdot (1-p) \cdot 0 + (f_2 \cdot + f_3) \cdot (1-p) \cdot 0 = p \cdot (1-p),$$

en

$$p \cdot 0 + f_1 \cdot (1-p) \cdot (1-p) + (f_2 \cdot + f_3) \cdot (1-p) \cdot (1-p) = (f_1 + f_2 + f_3) \cdot (1-p)^2 = (1-p)^2.$$

Opgave 3.4 – Stabiele premie bij een vereenvoudigde bonus-malus ladder

a. $$\begin{aligned} SP &= cp + cp(1-p) + a(1-p)^2 \\ &= c\,((1-1) + p + p(1-p)) + a(1-p)^2 \\ &= c + c\,(-(1-p) + p(1-p)) + a(1-p)^2 \\ &= c + c\,(1-p)\,(-1 + p) + a(1-p)^2 \\ &= c - c\,(1-p)\,(1-p) + a(1-p)^2 \\ &= c - (c-a)(1-p)^2. \end{aligned}$$

b. Als er met zekerheid geen terugval is, dan komen alle verzekerden op trede 3 terecht en betalen zij de lagere premie a. Vullen we p=0 in, dan volgt inderdaad $SP=c-(c-a)=a$.
Andersom, als iedereen met zekerheid schade rijdt en claimt, dan belanden alle verzekerden op trede 1 met de hogere premie c. Uit p=1 volgt inderdaad $SP=c-(c-a)\cdot 0=c$.

Opgave 3.5 – Stabiele premie in Tabel 3.5

$1.000 \cdot SP = 1.000 \cdot (c-(c-a) \cdot (0{,}9)^2) = 1.000 \cdot (c(1-0{,}81)+0{,}81a)) = 810a+190c$.
Invullen van a=€1.000 en c=€1.500 levert SP=€1.095.000.

Opgave 3.6 – Verwacht toekomstig bonusverlies

a. Als $s \geq (2-p)(c-a)$ = 1,8 (€1.500–€1.000) = €900.

b. $$\begin{aligned} & (1-p)(2a+s) + p(a+c+s) \geq 2c \\ \Leftrightarrow\quad & a(2(1-p)+p) + pc + s((1-p)+p) \geq 2c \\ \Leftrightarrow\quad & a(2-p) + s \geq c(2-p) \\ \Leftrightarrow\quad & s \geq (2-p)(c-a). \end{aligned}$$

c. Door te claimen betaalt de verzekerde voor komend jaar en het jaar daarna in totaal $2c$ aan premie. Bij niet claimen is de verwachte premie $(1-p)2a+p(a+c)$, zijnde de totale premie voor de komende 2 jaar bij volgend jaar schadevrij, respectievelijk met jaar schade, maal de kansen daarop en vervolgens opgeteld. Het verschil van de verwachte premies bij wel en niet claimen is het verwachte bonusverlies: $2c - ((1-p)2a+p(a+c)) = c(2-p) - a(2(1-p)+p) = (2-p)(c-a)$.

d. Bij een hogere kans op schade is de kans dus groter dat volgend jaar eveneens schade gereden wordt en dat de verzekerde alsnog de hogere premie c moet gaan betalen. Het verwachte bonusverlies bij claimen wordt daarmee kleiner en wordt het claimen naar verwachting sneller voordeliger.

Opgave 4.1 – Het einde van de antiselectiespiraal

a. In jaar 4 is de situatie als volgt:

	Aantal verzekerden			**Premie / polis (€)**			**Premie totaal (€ mln)**	**Schadelast (€ mln)**			
	J	**M**	**O**	**J**	**M**	**O**	**Tot.**	**J**	**M**	**O**	**Tot.**
Iedereen Gelijk	3.750	250	250	567	567	567	**2,408**	2,25	0,10	0,125	**2,475**
Verschil Moet Er Zijn	250	3.750	1.750	600	400	500	**2,525**	0,15	1,50	0,875	**2,525**

Het verlies van Iedereen Gelijk neemt geleidelijk af, in jaar 4 is dit €0,067 miljoen.

b. Het eindniveau ziet er zo uit:

	Aantal verzekerden			Premie / polis (€)			Premie totaal (€ mln)	Schadelast (€ mln)			
	J	M	O	J	M	O	Tot.	J	M	O	Tot.
Iedereen Gelijk	2.000	0	0	600	600	600	**1,2**	1,2	0	0	**1,2**
Verschil Moet Er Zijn	2.000	4.000	2.000	600	400	500	**3,8**	1,2	1,6	1,0	**3,8**

Omdat de premies voor de jongeren bij beide verzekeraars gelijk zijn, zijn de 4.000 jongere verzekerden gelijk verdeeld over de *Iedereen Gelijk* en *Verschil Moet Er Zijn*. De financiën zijn bij beide partijen weer in evenwicht, zij het dat *Iedereen Gelijk* een behoorlijk verlies heeft geleden en *Verschil Moet Er Zijn* nu 80% van de markt in handen heeft. In praktijk zal *Iedereen Gelijk* meer in het nadeel zijn, omdat ze haar vaste kosten over minder verzekerden kan spreiden. Ook zullen de kapitaalkosten (zie Hoofdstuk 7) daar hoger zijn.

Opgave 4.2 – Berekening van de gemiddelde schadelast

De bromfietsers hebben een totale schadelast van 800×€500 + 2.400×€364 + 1.200×€455= €1.819.600. Per bromfietser is dit €1.819.600/4.400=€414 (ipv €413 door afronding in Tabel 4.4). De Brommer-cel in de laatste rij is dus 4.400×€413.

De scooteraars hebben een totale schadelast van 3.200×€625 + 1.600×€455 + 800×€568= €3.182.400. Per bromfietser is dit€€3.182.400/5.600=€568. De Scooter-cel in de laatste rij is dus 5.600×€568.

Opgave 4.3 – Waarom de randtotalen-methode niet werkt

a. De gecompleteerde tabel is als volgt:

	Eigen auto	Lease-auto	Totaal
Lichte auto	5.000 × € 200	2.000 × € 220	**7.000 × € 205,71**
Zware auto	5.000 × € 250	8.000 × € 275	**13.000 × € 265,38**
Totaal	**10.000 × € 225**	**10.000 × € 264**	**20.000 × € 244,50**

b. € 264 / € 225 = 1,173.
c. € 265,38 / € 205,71 = 1,290.
d. € 275 / € 200 = 1,375.
e. Vermenigvuldiging van de factoren bij b en c leidt tot een te hoge factor van 1,514. Hierbij wordt geen rekening gehouden met het feit dat zware lease-auto's met een hoge schadelast zijn oververtegenwoordigd ten opzichte van lichte eigen auto's met een lagere gemiddelde schade.
f. Eén-dimensionale analyses geven een globaal inzicht in de karakteristieken van een portefeuille, maar zijn ongeschikt voor tariferingsdoeleinden.

Opgave 4.4 – Alleen verhoudingen tussen parameters van belang

Als we een nieuwe basisparameter a^* definiëren als $a^* = a \times b_B \times c_O$, dan kan Tabel 4.10 herschreven worden als:

Basis (a^*)		**J** c_J	**M** c_M	**O** c_O
Brommer	b_B	$a^* \times (c_J/c_O)$	$a^* \times (c_M/c_O)$	a^*
Scooter	b_S	$a^* \times (b_S/b_B) \times (c_J/c_O)$	$a^* \times (b_S/b_B) \times (c_M/c_O)$	$a^* \times (b_S/b_B)$

Met alleen de verhoudingen b_S/b_B, c_J/c_O en c_M/c_O resulteren dus dezelfde uitkomsten als in Tabel 4.10 zonder verlies van informatie.
Als we vervolgens definiëren: $b_S^* = b_S/b_B$, $c_J^* = c_J/c_O$ en $c_M^* = c_M/c_O$ dan reduceert de tabel tot:

Basis (a^*)		**J** c_J	**M** c_M	**O** c_O
Brommer	b_B	$a^* \times c_J^*$	$a^* \times c_M^*$	a^*
Scooter	b_S	$a^* \times b_S^* \times c_J^*$	$a^* \times b_S^* \times c_M^*$	$a^* \times b_S^*$

In plaats van de zes parameters a, b_B en b_S, en c_J, c_M en c_O zijn dus alleen de vier parameters a^*, b_S^*, c_J^* en c_M^* benodigd.

Opgave 4.5 – Minimaliseren van de kwadratensom voor een van de parameters

a. $f'(x) = -\alpha/x^2 + \beta$ $\Leftrightarrow x^2$ $\alpha/\beta \Rightarrow x = \sqrt{(\alpha/\beta)}$, omdat negatieve x niet zijn toegelaten.
($f''(x) = 2\alpha/x^3 > 0$ voor $x>0$, daarom is er inderdaad sprake van een minimum.)

b.

$$\sum_{t,l} \frac{(S_{tl} - w_{tl} \times a \times b_t \times c_l)^2}{w_{tl} \times a \times b_t \times c_l}$$
$$=$$
$$\sum_{t,l} \frac{S_{tl}^2 - 2 \times S_{tl} \times (w_{tl} \times a \times b_t \times c_l) + (w_{tl} \times a \times b_t \times c_l)^2}{w_{tl} \times a \times b_t \times c_l}$$
$$=$$
$$\sum_{t,l} \left(\frac{S_{tl}^2}{w_{tl} \times a \times b_t \times c_l} + w_{tl} \times a \times b_t \times c_l - 2S_{tl} \right)$$

c.

$$\sum_{t,l} \left(\frac{S_{tl}^2}{w_{tl} \times a \times b_t \times c_l} + w_{tl} \times a \times b_t \times c_l - 2S_{tl} \right)$$
$$=$$
$$\frac{1}{a} \left(\sum_{t,l} \frac{S_{tl}^2}{w_{tl} \times b_t \times c_l} \right) + a \left(\sum_{t,l} w_{tl} \times b_t \times c_l \right) + \left(-2 \sum_{t,l} S_{tl} \right)$$

d.

$$a = \sqrt{\left(\sum_{t,l} \frac{S_{tl}^2}{w_{tl} \times b_t \times c_l} \right) \bigg/ \left(\sum_{t,l} w_{tl} \times b_t \times c_l \right)}$$

Opgave 5.1 – Observaties uit de gepresenteerde tabellen

a. De gemiddelde frequentie over alle subgroepen, 0,15 rechtsonder in Tabel 5.5, maal het bijbehorende gemiddelde schadebedrag €1.951 uit Tabel 5.6 is €293. Dit is ongeveer gelijk (2,3% hoger) aan de gemiddelde totale schadelast van €286 in Tabel 5.3.
Als we dit doen voor alle cellen in de tabellen, dan zijn de verschillen:

		Bonus-Malus trede						
		1	2	3	4	5	6	Totaal
Stad	Jong	0,8%	-0,2%	-1,2%	0,9%	-0,4%	-2,2%	**-1,1%**
	Twintiger	1,5%	-1,3%	-0,2%	1,5%	2,1%	2,2%	**-2,1%**
	Middelbaar	-0,4%	-1,1%	1,8%	-2,3%	0,1%	-2,3%	**-2,9%**
	Senior	1,0%	0,7%	1,2%	-1,4%	2,8%	-1,8%	**-0,3%**
	Oud	1,8%	1,6%	1,8%	0,7%	-1,7%	0,7%	**2,9%**
Platteland	Jong	1,8%	-1,2%	-0,1%	-1,9%	-0,8%	1,6%	**2,4%**
	Twintiger	2,5%	-1,5%	-1,6%	0,4%	-1,5%	4,7%	**2,6%**
	Middelbaar	-1,5%	2,2%	-0,5%	-1,8%	1,9%	5,8%	**-3,1%**
	Senior	1,3%	-0,8%	-0,6%	-2,1%	0,2%	5,1%	**0,8%**
	Oud	-1,1%	1,9%	-1,0%	2,2%	3,1%	2,7%	**1,9%**
	Totaal	**1,8%**	**-0,1%**	**-1,7%**	**-2,7%**	**-1,8%**	**-1,0%**	**2,3%**

b. De kans op schade in de stad is hoger omdat alle frequenties bij Stad in de laatste kolom hoger zijn dan die bij Platteland. Hou wel rekening met Valkuil 2 uit Hoofdstuk 4: randtotalen zeggen niet alles, maar in dit geval blijkt het verschil tussen Stad en Platteland ook uit de analyse in Hoofdstuk 5.
Dat jongeren vaker schaden hebben zien we doordat de schadefrequenties op de regels “Jong” hoger zijn dan die voor de andere leeftijden, zowel voor Stad als Platteland.

c. Van de 8.239 polissen op trede 5 zal een aandeel van ongeveer 1–0,17 geen schade hebben en doorstromen naar trede 6, dit zijn 8.239x0,83=6.838 polissen.
Van de 67.128 polissen op trede 6 zal naar verwachting een fractie van 1–0,11 geen schade claimen en op trede 6 blijven, 67.128x0.89=59.744 polissen.
In totaal zullen volgend jaar zich dus naar verwachting 6.838+59.744=66.582 polissen op trede 6 bevinden. Dit is iets te laag omdat de schadefrequenties van 0,17 en 0,11 ook verzekerden bevatten met meerdere schaden per jaar, dus het werkelijke aandeel van verzekerden met een of meer schades is wat lager en daardoor het aantal van schadevrije verzekerden hoger. Dat blijkt ook uit het feit dat zich nu 67.128 op trede 6 bevinden terwijl we werken met een portefeuille in een stabiele toestand en we dus volgend jaar weer 66.582 polissen op trede 6 verwachten.

d. Het bonushonger-effect heeft tot gevolg dat kleinere schaden niet geclaimd worden wegens de premieverhoging door terugval op de bonus-malus ladder. Daardoor zouden we een gemiddeld hoger schadebedrag verwachten op de treden 4 en 6, waar de premietoename na het claimen van een schade het grootst is. Dit is niet zichtbaar in Tabel 5.6 en dit effect is inderdaad niet meegenomen bij het simuleren van de gegevens.

Opgave 5.2 – Analyse van de modeluitkomsten

a. De risicopremie van een stedelijke jongere zonder schadevrije jaren is €425 x 1,76 x 1 = €748, terwijl een stedelijke oudere op bonus-malus trede 6 €425 x 1,35 x 0,4 = €229,50 betaalt (beide plus kostenopslag etc.)
Dit is een fors risicoverschil, dat in de praktijk op eenzelfde manier voorkomt. Hoewel dit risico-technisch klopt, maakt dit het verzekeren voor jongeren, die bovendien meestal minder geld hebben dan ouderen, financieel een stuk moeilijker.

b. De gevraagde verhoudingen staan in onderstaande tabel, waarbij we inderdaad zien dat de factoren in het frequentiemodel van Tabel 5.7 wat minder sterk afnemen dan de randtotalen van Tabel 5.5. Een deel van het rijgedrag dat zichtbaar is in de randtotalen wordt namelijk al ‘geabsorbeerd’ in de op- en afslagen van de risicofactoren leeftijd en regio, waardoor de factoren bij de bonus-malus treden gedempt worden. Het dubbeltellingseffect van de randtotalen (zie eind Paragraaf 4.2) wordt in het frequentiemodel van Tabel 5.7 weggenomen.

	Bonus-Malus trede					
	1	2	3	4	5	6
Tabel 5.5	0,28	0,27	0,25	0,18	0,17	0,11
	1	0,96	0,89	0,64	0,61	0,39
Tabel 5.7	1	0,99	0,94	0,72	0,68	0,46

Opgave 5.3 – Modelleervragen

a. De ruwe waargenomen gegevens bevatten nog toevallige uitslagen die niet representatief zijn om mee te voorspellen. Dit soort statistisch niet-significante uitslagen zijn weggenomen in het optimale model.
Neem bijvoorbeeld de risicopremies voor ouderen op het platteland. In Tabel 5.2 zien we deze groep verzekerden klein is, met name op de bonus-malus treden 1, 2 en 3. De waargenomen gemiddelde schadelast is in dit geval door een toevallige ontwikkeling hoger dan op grond van de rest van de gegevens verwacht mag worden. In het model is hiermee rekening gehouden.

Ouderen op het platteland	**Trede 1**	**Trede 2**	**Trede 3**	**Trede 4**	**Trede 5**	**Trede 6**
Gemiddelde totale schadelast (Tabel 5.3)	316	416	436	508	306	226
Risicopremie in optimaal model (Tabel 5.12)	549	543	516	395	335	225

b. Dezelfde kwadratensom wordt geminimaliseerd, maar met minder parameters. Het resulterende minimum zal daarom nooit kleiner kunnen zijn en, tenzij het niet-vereenvoudigde model overbodige parameters bevat en het wegnemen ervan tot dezelfde minimale waarde leidt, zal de minimale kwadratensom stijgen. Modelvereenvoudiging leidt daarom tot een hogere minimale kwadratensom.

c. Onderstaand worden de betreffende risicopremies met elkaar vergeleken en ook (niet in de vraag) met de ruwe data uit Tabel 5.3. In de kolom ‘5.9 tov 5.12’ is te zien dat de modeluitkomsten redelijk in de buurt van elkaar liggen, maar het meeste verschillen voor een jongere op het platteland in trede 3. Daar is het verschil met de waarneming in Tabel 5.3 ook het grootst, wel 42%.

	Tabel 5.3	**Tabel 5.9**	**Tabel 5.12**	**5.3 tov 5.12**	**5.9 tov 5.12**
Platteland, jongere, trede 3	386	630	670	0,58	0,94
Stad, twintiger, trede 2	474	421	437	1,09	0,96
Stad, oudere, trede 6	254	230	230	1,11	1,00

d. Voor de treden 2 en 3 zijn de (commerciële) percentages in Tabel 5.1 te laag, terwijl voor de treden 4, 5 en 6 meer ruimte aanwezig is voor kortingen. (We houden hierbij geen rekening met andere premiecomponenten.)

Opgave 6.1 – Rekenen met de exponentiële verdeling

a. $e^{-2\cdot 1,5} = e^{-3} < e^{-2\cdot 0,5} = e^{-1}$ en daarmee is $1-e^{-2\cdot 1,5} > 1-e^{-2\cdot 0,5}$.

b. Rechts van x=2 ligt de dichtsheidsfunctie bij λ=0,5 overal boven die van λ=1,5. Daarom geldt P[X>2 | λ=1,5] < P[X>2 | λ=0,5] en dus P[X≤2 | λ=1,5] = 1–P[X>2 | λ=1,5] > 1–P[X>2 | λ=0,5] = P[X≤2 | λ=0,5].

c. De dichtheidsfunctie bij λ=0,5 ligt voor alle waarden van x>ln(3)≈1,1 boven die bij λ=1,5. Deze hogere waarden zijn dus waarschijnlijker voor λ=0,5 dan voor λ=1,5, waardoor de verwachtingswaarde groter zal zijn.

d. λ=1/4.000 ⇒ P[X>10.000]=$1-(1-e^{-10.000\lambda}) = e^{-10.000/4.000} = e^{-2,5} \approx 0,082$.

Opgave 6.2 – Verwachtingswaarde van de exponentiële verdeling

Noem de primitieve functie $h(x)$. Dan geldt met toepassing van de productregel op de eerste term: $h'(x) = (-e^{-\lambda\cdot x} + \lambda x e^{-\lambda\cdot x}) + e^{-\lambda\cdot x} = \lambda x e^{-\lambda\cdot x}$.
Hieruit volgt dat

$$\mathrm{E}[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\infty} x\cdot \lambda e^{-\lambda\cdot x}\mathrm{d}x = \left[-xe^{-\lambda\cdot x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\cdot x}\right]_0^{\infty} = 0-(0-\frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda}.$$

Opgave 6.3 – De verdelingsfunctie bij de exponentiële verdeling

a. De dichtheidsfuncties in Figuur 6.2 zijn de afgeleiden van de verdelingsfuncties in Figuur 6.3. Omdat de dichtheidsfunctie voor λ=1,5 groter is dan voor λ=0,5 voor x<ln(3), stijgt de bijbehorende verdelingsfunctie sneller. Voor x>ln(3) is het omgekeerde het geval.

b.

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda \cdot z} dz \;=\; \left[-e^{-\lambda \cdot z}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + 1.$$

c. Voor kleinere waarden van x is $F(x)$ met λ=1,5 groter dan met λ=0,5. Omdat in beide gevallen $F(0)=0$, stijgt $F(x)$ dus in eerste instantie harder als λ=1,5.

Opgave 6.4 – Controle van de formule voor de risicopremie

Doe dit zelf met pen en papier.

Opgave 6.5 – Risicopremies bij een andere exponentiële verdeling

a. De verwachtingswaarde (= risicopremie zonder eigen risico) steeg in 5 jaar tijd van 1500 naar 1815. De gemiddelde jaarlijkse stijging g volgt dan uit: $(1+g)^5$ = 1815/1500. Hieruit resulteert $g=(1815/1500)^{1/5}-1$=3,9%.

b.

Eigen risico *r*	**Risico-premie** ***p*(*r*)**	**Δ Risico-premie**
0	1500	
500	1075	425
1000	770	305
1500	552	218
2000	395	156
2500	283	112
3000	203	80
3500	145	58
4000	104	41
4500	75	30
5000	54	21
∞	0	

Opgave 6.6 – Tussenstappen in de afleiding van de algemene formule

a. Gebruik hiervoor de productregel.

b. Schrijf eerst $\int_r^\infty (x-r)f(x)dx = -\int_r^\infty (x-r)d(1-F(x))$. Vervolgens volgt met partieel integreren:

$$\int_r^\infty (x-r)d(1-F(x)) \;+\; \int_r^\infty (1-F(x))d(x-r) \;=\; [(1-F(x))(x-r)]_r^\infty$$

zodat

$$-\int_r^\infty (x-r)d(1-F(x)) \;=\; \int_r^\infty (1-F(x))d(x-r) \;-\; [(1-F(x))(x-r)]_r^\infty$$

c. Voor $x=r$ geldt $(x-r)(1-F(x))=0\cdot(1-F(r))=0$.
Voor $x\to\infty$ gaat $1-F(x)$ naar nul, terwijl $(x-r)\to\infty$. Het is niet eenvoudig om aan te tonen dat in de limiet het product van $1-F(x)$ en $(x-r)$ naar 0 gaat, maar in de kern is dit het geval omdat de verwachtings-waarde een eindig getal is.

Opgave 7.1 – De kosten van het solvabiliteitskapitaal

€4.750.000 x 6% / 10.000 = €28,50 per verzekerde. Dit is zelfs hoger dan de risicopremie en daarom is het de overweging waard om voor een zekerheid van 99,5% te kiezen.

Opgave 7.2 – Een extra solvabiliteitsbuffer

Bij dit kapitaal hoort een maximaal aantal gestolen fietsen van (€42.750+€250.000)/€500=585,5. Met 585 gestolen fietsen geldt $P[N \le 585] \approx 0{,}999936128$. Dit komt overeen met een zekerheid van eens in de $1/(1-0{,}999936128)=15.656$ jaar.

Opgave 7.3 – De kosten van het solvabiliteitskapitaal (vervolg)

a. Vervang €50.000 in de vergelijking door k_F en herschrijf tot $\sqrt{a} = k_F / (2{,}576 \cdot €500 \cdot \sqrt{0{,}05 \cdot 0{,}95}\,) \approx k_F / €280{,}71$. De waarde van c is dus ongeveer €280,71.
b. €50.000 x 6% / 31.726 = €0,095 per verzekering.

Opgave 7.4 – De kosten van het solvabiliteitskapitaal bij afzonderlijke en samengenomen portefeuilles

a. €54.645 x 6% / 5.000 = €0,656 per verzekering.
b. €61.434 x 6% / 15.000 = €0,246 per verzekering (fietsen en e-bikes samengenomen). Merk hierbij op dat dit voor fietsers hoger is dan de €0,17 die zij zonder de e-bikes hoeven te betalen, terwijl de de kapitaalkosten voor de e-bikers juist flink dalen. Voor het berekenen van premies is een eerlijkere toedeling van de kapitaalkosten dus wel nodig.
   Voor de afzonderlijke portefeuilles is dit €82.717 x 6% / 15.000 = €0,331 per verzekering (zo'n 35% hoger dus).

Opgave 7.5 – Gecorreleerde risico's en volledige diversificatie

a. $\rho=0{,}75 \rightarrow \sigma_{F+E} = \sqrt{(€10.897^2 + €21.213^2 \mathbf{+ 2 \times 0{,}75} \times €10.897 \times €21.213)} = \sqrt{915.473.070} = 30.257$
   $\rho=-0{,}5 \rightarrow \sigma_{F+E} = \sqrt{(€10.897^2 + €21.213^2 - \mathbf{2 \times 0{,}5} \times €10.897 \times €21.213)} = \sqrt{337.577.917} = 18.373$.
b. Als $\sigma_F=\sigma_E$ en $\rho=-1$. In dit geval geldt $\sigma_{F+E} = \sqrt{(\sigma_F^2 + \sigma_E^2 - 2\,\sigma_F\,\sigma_E\,)} = \sqrt{(\sigma_F - \sigma_E)^2} = 0$.

Opgave B.1 – Kansen van de Binomiale verdeling

a. Dit zijn de 5 takken met elk naar verwachting 2,93 (= $1000 \cdot (\frac{1}{4})^4 (\frac{3}{4})$) gevallen.
b. Het betreft de 10 takken met elk naar verwachting 8,79 (=$1000 \cdot (\frac{1}{4})^3 (\frac{3}{4})^2$) gevallen. Het gaat hier om de mogelijke 10 combinaties GGGFF, GGFGF, GGFFG, GFGGF, GFGFG, GFFGG, FGGGF, FGGFG, FGFGG en FFGGG.
c. Het verwachte aantal gevallen met 0 goede antwoorden is $1000 \cdot (3/4)^5$,
   met 1 goed antwoord $1000 \cdot (\frac{1}{4})^1 (\frac{3}{4})^4 \cdot 5$
   en met 2 goede antwoorden: $1000 \cdot (\frac{1}{4})^2 (\frac{3}{4})^3 \cdot 10$.
d. Leg de figuren naast elkaar en laat de factor 1000 steeds weg.
e. $P[N=3] = \binom{5}{3} \cdot (\frac{1}{4})^3 (\frac{3}{4})^2 = 10 \cdot 9/1024 = 90/1024$
   $P[N=4] = \binom{5}{4} \cdot (\frac{1}{4})^4 (\frac{3}{4}) = 5 \cdot 3/1024 = 15/1024$
   $P[N=5] = \binom{5}{5} \cdot (\frac{1}{4})^5 = 1 \cdot 1/1024 = 1/1024$

Opgave B.2 – De Binomiale verdeling bij aantal autoschaden

$P[\text{4 schadevrije kwartalen}] = \binom{4}{4} \cdot (0{,}95)^4 \cdot (0{,}05)^{4-4} \approx 0{,}815$

$P[\text{3 schadevrije kwartalen}] = \binom{4}{3} \cdot (0{,}95)^3 \cdot (0{,}05)^{4-3} \approx 0{,}171$

$P[\text{2 schadevrije kwartalen}] = \binom{4}{2} \cdot (0{,}95)^2 \cdot (0{,}05)^{4-2} \approx 0{,}014$