Bijlage 1 bij *Inversie*

Appendix Inversie bekeken vanuit een complex standpunt

In deze paragraaf gaan we op een andere manier kijken naar inversie. We doen dat met behulp van de complexe getallen. We veronderstellen dan wel dat je weet wat complexe getallen zijn en dat je ermee kunt rekenen. Dus bijvoorbeeld dat je weet hoe je complexe getallen bij elkaar moet optellen of hoe je ze met elkaar moet vermenigvuldigen. We gaan er ook vanuit dat je bekend bent met complexe functies en juist die functies die overeenkomen met een meetkundige afbeelding (transformatie) in het complexe vlak, zoals een spiegeling, rotatie, translatie of projectie. Tot slot gaan we na waarom het gebruik van complexe getallen bij inversie handig is.

Vandaar de volgende opdrachten.

Opgave A.1

Welke meetkundige afbeelding hoort bij de volgende complexe functie? Zie onderstaande tabel, een voorbeeld is al ingevuld.

f(z)=	**Meetkundige afbeelding**
$i \cdot z$	Rotatie vanuit (0,0) over een hoek van 90° tegen de wijzers van de klok in.
$z+3+2i$	
$\overline{z}$	
$\frac{1}{2}(z-\overline{z})$	

a. Neem de tabel over en vul de tabel verder in.

Andersom kun je bij een gegeven meetkundige afbeelding de bijbehorende complexe functie zoeken.

b. Geef de complexe functie bij:

- Spiegeling in de imaginaire as.
- Rotatie om (0,0) over π radialen.

Voor de hand liggende vraag is nu: welke complexe functie hoort bij spiegelen in een cirkel?

Voor het gemak kiezen we de eenheidscirkel als inversiecirkel. Het middelpunt ligt dus in (0,0) en de grootte van de straal is 1. We proberen als bijbehorende complexe functie:

$$f(z)=\frac{1}{z}.$$

Komt dit echter wel overeen met spiegelen in de eenheidscirkel? Laten we dit controleren. We kiezen het complexe getal *2i*, berekenen *f*(*2i*) en drukken het uit in *i*:

$f(2i) = \frac{1}{2i} = \frac{i}{2i^2} = \frac{i}{-2} = -\frac{1}{2}i$. Dit getal is op de imaginaire as terug te vinden, maar we willen echter $\frac{1}{2}i$ als uitkomst krijgen (waarom?) . $-\frac{1}{2}i$ en $\frac{1}{2}i$ zijn echter wel elkaars geconjugeerde.

Laten we dus de complexe functie $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ proberen.

Opgave A.2

We nemen een willekeurig complex getal $z = a+bi$ en berekenen $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. Je kunt dit herschrijven tot $f(z) = \frac{z}{|z|^2}$.

a. Laat dat herschrijven zien.

Bij het complexe getal z kunnen we in een vlak met assenstelsel een punt P zetten en bij het complexe getal $f(z)$ punt P'.

Merk op dat $OP = |z|$ en $OP' = \frac{|z|}{|z|^2}$.

b. Laat nu zien dat punt P en punt P' elkaars inversiebeelden zijn ten opzichte van de eenheidscirkel. Vergeet niet om aan te tonen dat P' op halflijn OP ligt.

Bij spiegelen in de eenheidscirkel hoort dus de complexe functie $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$

Opgave A.3

Gegeven complexe functie $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$

a. Teken in een assenstelsel de eenheidscirkel en het vierkant V met de hoekpunten, in de notatie van de complexe getallen,1+i, 1-i, -1-i en -1+i.

b. Bereken $f(1+i)$, $f(1-i)$, $f(-1-i)$ en $f(-1+i)$.

c. Teken $f(V)$.

We hebben in hoofdstuk 1 gezien dat één van de eigenschappen van inversie is: dat cirkels die het inversiecentrum **niet** bevatten weer op cirkels worden afgebeeld. De vraag is of met behulp van complexe getallen deze cirkeleigenschap makkelijker aan te tonen is. We kunnen nu gebruik maken van de complexe functie $f(z)=\dfrac{1}{z}$.

We hebben verder nodig een belangrijke eigenschap van complexe getallen.

Een complex getal z vermenigvuldigt met zijn geconjugeerde levert het kwadraat van de voerstraal op. Kort opgeschreven: $z\cdot\overline{z}=|z|^2$.

We kijken nu hoe we in het complexe vlak een cirkel kunnen aanduiden. Dit aanduiden doen we meestal met behulp van een vergelijking.

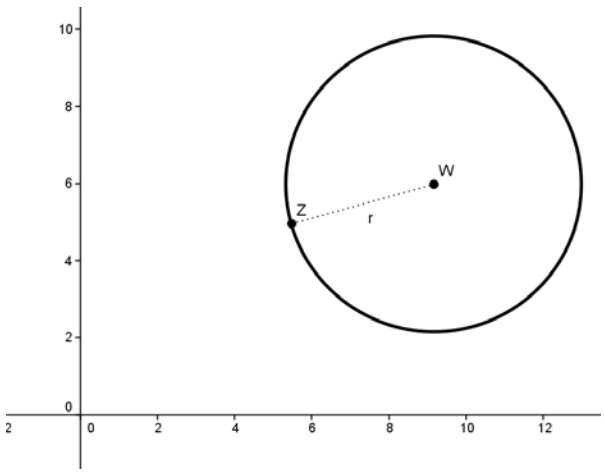
Een cirkel met middelpunt complex getal w en straal r geven we in het complexe vlak aan met de vergelijking: $|z-w|=r$. z is dus een complex getal met afstand r tot complex getal w.

Om gebruik te maken van net genoemde eigenschap kwadrateren we linker- en rechterlid. Dit geeft: $|z-w|^2=r^2$. Na toepassing van genoemde eigenschap krijgen we:

$(z-w)\cdot\overline{(z-w)}=r^2$.

Dit verder uitwerken geeft cirkelvergelijking: $z\cdot\overline{z}-w\cdot\overline{z}-z\cdot\overline{w}+w\cdot\overline{w}-r^2=0$

$$|z-w|=r$$



$$\boxed{z\cdot\overline{z}-w\cdot\overline{z}-z\cdot\overline{w}+w\cdot\overline{w}-r^2=0}$$

Figuur A.1 Samenvatting

Opgave A.4

Gegeven vergelijking $z\cdot\overline{z}-3i\cdot\overline{z}+3i\cdot z=16$.

- **a.** Toon aan dat deze vergelijking een cirkel voorstelt.
- **b.** Geef het middelpunt en straal van deze cirkel.

We bekijken nu de cirkel *c* met vergelijking $z \cdot \bar{z} - 5i \cdot \bar{z} + 5i \cdot z + 16 = 0$. We gaan deze cirkel afbeelden volgens complexe functie $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.

Als een punt, we duiden het aan met het complexe getal *u*, op de beeldfiguur ligt, dan moet het origineel $\frac{1}{\bar{u}}$ voldoen aan cirkelvergelijking $z \cdot \bar{z} - 5i \cdot \bar{z} + 5i \cdot z + 16 = 0$.

We moeten dan in de vergelijking $z \cdot \bar{z} - 5i \cdot \bar{z} + 5i \cdot z + 16 = 0$, z vervangen door $\frac{1}{\bar{u}}$ en $\bar{z}$ door $\frac{1}{u}$.

Opgave A.5

In onderstaande *uitlegmatrix* zie je de vervanging en de vereenvoudiging:

Aktie	**Resultaat**	**Geef uitleg**
z vervangen door $\frac{1}{\bar{u}}$.	$\frac{1}{\bar{u}} \cdot \frac{1}{u} - 5i \cdot \frac{1}{u} + 5i \cdot \frac{1}{\bar{u}} + 16 = 0$	
Vermenigvuldig met $u \cdot \bar{u}$	$1 - 5i \cdot \bar{u} + 5i \cdot u + 16 \cdot u \cdot \bar{u} = 0$	
Deel door 16 en verander de volgorde	$u \cdot \bar{u} - \frac{5}{16} \cdot i \cdot \bar{u} + \frac{5}{16} \cdot i \cdot u + \frac{1}{16} = 0$	

a. Vul de uitlegmatrix verder in.

De cirkelvergelijking $u \cdot \bar{u} - \frac{5}{16} \cdot i \cdot \bar{u} + \frac{5}{16} \cdot i \cdot u + \frac{1}{16} = 0$ kun je vervangen door $\left| u - \frac{5}{16} \cdot i \right| = \frac{3}{16}$.
Zo nodig vervang je *u* weer door *z.*

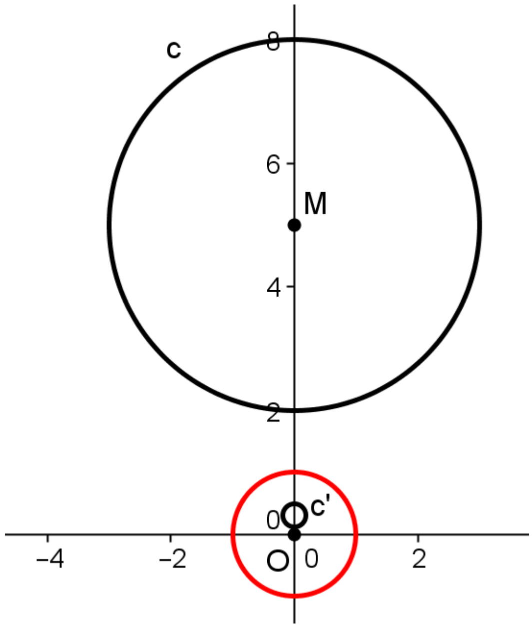
b. Laat dat zien.
c. Geef het middelpunt en de straal van deze cirkel.

We gaan dit alles controleren door de cirkel *c* te spiegelen in de eenheidscirkel.

Eerst berekenen we de coördinaten van het middelpunt en de straal van cirkel *c*.

Met behulp van cirkelvergelijking $z \cdot \bar{z} - w \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{w} - r^2 = 0$ zien we $w = 5i$ en $(5)^2 - r^2 = 16$. De straal van cirkel *c* is dus 3. Het middelpunt noemen we *M*. Bijbehorend getallenpaar is dus (0,5).

Zie figuur A.2. waarin de inversie te zien is.



Figuur A.2

In opgave A.5 heb je waarschijnlijk voor het middelpunt en de straal van de beeldcirkel respectievelijk $(0, \frac{5}{16})$ en $\frac{3}{16}$ gevonden. Dit gaan we nu controleren.

Het inversiebeeld van cirkel *c* is ook op te vatten als het beeld van *c* na puntvermenigvuldiging vanuit de oorsprong. In paragraaf 6 van hoofdstuk 1vonden we:

Als *I* de inversie in een cirkel met *O* als middelpunt en *r* als straal is dan geldt voor elke cirkel *c* die **niet** door *O* gaat en waarbij *m* de macht is van *O* ten opzichte van cirkel *c*: $I(c) = V_{O,\frac{r^2}{m}}(c)$ waarbij V de puntvermenigvuldiging is vanuit punt *O*.

Opgave A.6

De macht van inversiecentrum *O* ten opzichte van cirkel *c* is 16 en *r* heeft de waarde 1.

a. Laat dat zien.

We noemen het middelpunt van het inversiebeeld van cirkel *c* punt *N*. Het inversiebeeld van cirkel c geven we aan met c'.

b. Leg uit dat de *x*-coördinaat van punt *N* nul is.
c. Leg uit met behulp van de puntvermenigvuldiging dat de straal van cirkel c' gelijk is aan $\frac{3}{16}$.
d. Bereken de *y*-coördinaat van middelpunt *N*.
e. Vergelijk de resultaten met opgave A.5.
f. Laat zien dat de middelpunten *M* en *N* niet elkaars inversiebeeld zijn.

We hebben de cirkeleigenschap van complexe functie $f(z)=\frac{1}{z}$ voor slechts één cirkel gecontroleerd. Echter complexe functie $f(z)=\frac{1}{z}$ transformeert elke cirkel die **niet** door de oorsprong gaat in een cirkel. We bewijzen dat hier verder niet.

We onderzoeken nog wel wat de complexe functie $f(z)=\frac{1}{z}$ doet met cirkels die door de oorsprong gaan. De vraag is dan: wat is de beeldfiguur van zo'n cirkel na toepassing van de complexe functie $f(z)=\frac{1}{z}$?

Opgave A.7

Kijken we naar de algemene cirkelvergelijking $z\cdot\overline{z}-w\cdot\overline{z}-z\cdot\overline{w}+w\cdot\overline{w}-r^2=0$ dan moet voor een cirkel door de oorsprong gelden: $w\cdot\overline{w}-r^2=0$.

a. Leg dat uit.

We passen $f(z)=\frac{1}{z}$ toe op $z\cdot\overline{z}-w\cdot\overline{z}-z\cdot\overline{w}=0$.

b. Geef de beeldvergelijking.
c. Leg uit dat deze vergelijking lineair is en dat de beeldfiguur dus een rechte lijn is.

Samengevat:

Ook de complexe functie $f(z)=\frac{1}{z}$ heeft ten aanzien van cirkels dezelfde eigenschap als de spiegeling in de eenheidscirkel.

Conclusie

In hoofdstuk 1 hebben we de cirkeleigenschap van inversie afgeleid. Zie de opgaven 1.6.1 en 1.6.2. Met de complexe functie $f(z)=\frac{1}{z}$ is het ook vrij gemakkelijk om deze eigenschap af te leiden en de beeldfiguur weer te geven. Ook functie $g(z)=\frac{1}{z}$ heeft deze cirkeleigenschap.

Functies van de vorm $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ waarbij a, b, c en d reële getallen zijn hebben ook deze cirkeleigenschap. Deze functies heten *gebroken lineaire afbeeldingen* of ook wel *Möbius transformaties.*