

Min en min is plus!

Thermometers, liften en heksen. Hoe leg jij uit waarom min en min plus is? In dit artikel wordt ingegaan op de didactiek van het optellen en aftrekken van negatieve getallen en het gebruik van het spel *Plusminus* in de wiskundeles.

Inleiding

Om het rekenen met negatieve getallen inzichtelijk te maken, gebruikt iedere docent zijn eigen methode. Zo wordt er soms gekozen voor een koppeling met praktijkvoorbeelden: geld, temperatuur, liften of luchtballonnen. Bij sommige docenten komt de heks een ketel met warme of koude blokjes vullen, maar vaak wordt er gewoon gehamerd op de rekenregel: 'min en min is plus'. In dit artikel gaan we in op de vraag waarom leerlingen het rekenen met negatieve getallen vaak lastig vinden en dragen we manieren aan om dit onderwerp in de les te behandelen. Wanneer krijgen rekenregels betekenis voor de leerling? En wanneer draagt de aansluiting op de belevingswereld van leerlingen daadwerkelijk bij aan het begrip over rekenen met negatieve getallen?

Tellen op de vingers

Het aanleren van (natuurlijke) getallen en simpele rekenkundige bewerkingen begint al op jonge leeftijd. Een rijtje telwoorden – soms gegeven als een rijmpje of versje – wordt gekoppeld aan een aantal dingen; bijvoorbeeld blokjes of vingers. Het rijtje wordt doorlopen en als de objecten op zijn, weet een kind het gevraagde getal. Het getal is in dit stadium nog geen *object* maar wordt gekoppeld aan een *proces* (tellen). Dit is goed te zien in het optellen van twee en drie met behulp van vingers. Zo worden de sommetjes $2 + 3$ en $3 + 2$ niet van elkaar onderscheiden; je begint weer vanaf één te tellen.

Na verloop van tijd worden de getallen op zichzelf staande objecten die zich verhouden tot andere getallen. Er ontstaat een netwerk van getallen en getalrelaties. Deze getalrelaties worden steeds verder uitgebreid en spelen later een cruciale rol bij rekenen.^[1] Het voordeel van de objectvorming in combinatie met



figuur 1

$2 + 3 = 5$ en $3 + 2 = 5$ worden niet van elkaar onderscheiden; De getallen worden nog niet als object herkend.

getalrelaties is de grotere flexibiliteit bij rekenen. Wanneer gevraagd wordt naar de uitkomst van de rekensom $8 + 6$, kan het bijvoorbeeld helpen om eerst 'naar tien te rekenen', dus $8 + 6 = 8 + 2 + 4 = 10 + 4 = 14$. Deze denkstappen gaan na verloop van tijd snel en het aantal verschillende manieren om een som handig aan te pakken breidt zich bij de sterkere rekenaars constant uit.^[2]

Rekenen met negatieve getallen

Bij het rekenen met negatieve getallen speelt deze proces-object-dualiteit een cruciale rol. Het aftrekken en optellen is het proces, terwijl het negatieve getal zelf (inclusief het minteken) het object is. Zo hoort bij de opgave $7 - 3$ de eerste min bij het proces en de tweede bij het object.

Om het verschil tussen proces en object duidelijk te maken, wordt door wiskundedocenten vaak een context gebruikt. We kunnen drie soorten contexten onderscheiden: een toepassingscontext, een aanleercontext en een motiverende context. Een bepaalde context kan meer dan één van deze soorten tegelijk zijn.

Contexten

Aanleercontext heeft als functie om het wiskundig concept aan te leren. De aanleercontext is vaak breder dan een toepassingscontext, zodat meer situaties in deze aanleercontext kunnen worden besproken. Het creëert als het ware een 'omgeving' waarin het concept kan worden aangeleerd. Denk aan de balans bij de balansmethode.

Toepassingscontext heeft als functie om het wiskundig concept toe te passen. De toepassingscontext is vaak specifiek, bijvoorbeeld een hangbrug bij parabolen of de lift bij negatieve getallen.

Motiverende context heeft als functie om de leerlingen te motiveren. Dit is meer persoonlijk en afhankelijk van de praktijksituatie.^[3]

Bekende en minder bekende aanleercontexten bij het rekenen met negatieve getallen zijn:

- de heks en de ketel;
- de luchtballon en de zandzakken;
- het plusmin-mannetje;
- pijlen (op een getallenlijn);
- tellers of 'counters'.

Contexten

De meest gebruikte aanleercontext bij negatieve getallen is 'de heks en de ketel': een heks beschikt over koude (negatieve getallen) en warme blokjes (positieve getallen) en haalt deze uit de ketel (aftrekken) of stopt ze juist in de ketel (optellen). Bij dit voorbeeld lijkt er een duidelijke scheiding tussen proces en object te worden aangeleerd, maar toch kleven er een paar bezwaren aan deze aanleercontext.

Ten eerste een inhoudelijk bezwaar, zie hiervoor het voorbeeld uit *Moderne Wiskunde* in figuur 2.

Het voorbeeld rept over zes koude blokjes, oftewel 6×-1 blokje. En niet over één koud blok van -6 . De optelling bij dit voorbeeld moet dus zijn: $-7 + 6 \times -1 = -13$. De handeling van de heks komt hiermee niet overeen met de uitgewerkte som. Een expert die gewend is aan het rekenen met negatieve getallen zal hier snel overheen stappen, maar voor een leerling kan deze dubbelzinnigheid wel degelijk voor verwarring zorgen. Dit zou opgelost kunnen worden door een heks te laten werken met grote en kleine blokken. Al is het dan de vraag of de aanleercontext zijn doel niet voorbij schiet.

Theorie
Als je koude of warme blokjes in de ketel doet, kun je dat als een optelling opschrijven.
Voorbeeld
De begintemperatuur is -7°C . Als de heks er zes koude blokjes bij doet, dan daalt de temperatuur. De eindtemperatuur wordt -13°C . De volgende optelling hoort hierbij.
$\begin{array}{ccc} \text{begin-} & & \text{eind-} \\ \text{temperatuur} & & \text{temperatuur} \\ \uparrow & & \uparrow \\ (-7) & + & 6 \times (-1) = -13 \end{array}$

figuur 2 uit *Moderne Wiskunde*, deel 1B vmbo-gt, 12^e editie

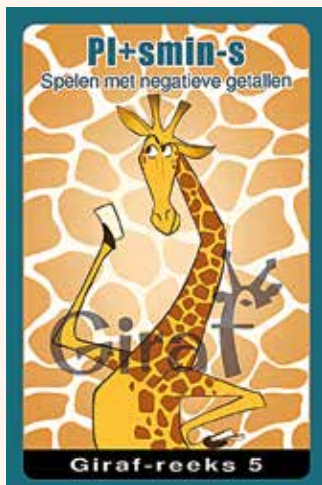
Een tweede bezwaar is het theoretische karakter van deze context: het is onmogelijk om deze situatie in de klas fysiek uit te voeren, laat staan om het leerlingen zelf fysiek uit te laten voeren. Je kunt hooguit laten zien met behulp van een toneelstuk of applet. Hierdoor blijft het een context die zich op het bord of op papier afspeelt en waarbij de leerlingen het proces niet als zodanig kunnen ervaren. Tot slot zie je dat docenten deze context vermijden omdat het niet echt meer van deze tijd is. Bij de andere aanleercontexten schuilen vergelijkbare of andere bewaren. En hoe zit het met de toepassingscontexten zoals temperatuur, liften en schulden? Over het algemeen ontstijgen deze contexten niet de abstractie en zijn deze gekunsteld als het gaat om de lastigste elementen bij dit concept, bijvoorbeeld: de temperatuur daalt met -5 graden, de lift daalt -3 verdiepingen. Het vermogen van iemand neemt toe omdat een schuld wordt kwijtescholden. Oftewel het onderscheid tussen het proces en het object is voor leerlingen niet duidelijk en de context is niet toereikend om dit inzicht te bieden.

Spel

Plusminus is een spel binnen de Giraf-reeks^[5] van Epsilon Uitgaven. Het is de speelse tegenhanger van de meer bekende Zebra-reeks, maar dan gericht op de onderbouw havo/vwo en vmbo.

Doel: Door de kaarten bij elkaar op te tellen probeert de speler de som van zijn vier kaarten zo dicht mogelijk bij de nul te krijgen.

Elke speler krijgt vier gesloten kaarten en legt deze



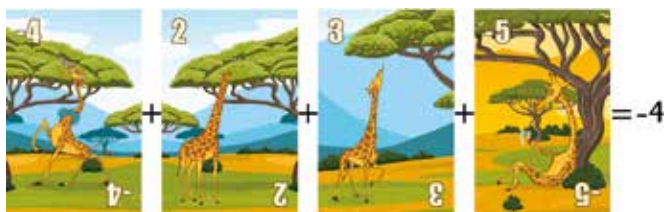
figuur 3

naast elkaar voor zich neer. Elke speler bekijkt alléén zijn buitenste twee kaarten en onthoudt deze getallen. De stapel met overgebleven kaarten ligt gesloten in het midden: de gesloten pakstapel. De jongste speler begint en pakt een kaart van de stapel en bekijkt deze. De speler kan kiezen om de gekozen kaart te ruilen met één van

de kaarten die voor hem ligt of open terug te leggen naast de gesloten kaarten. Geruilde kaarten worden ook open naast de pakstapel gelegd. Hierdoor ontstaat een open pakstapel. De volgende speler mag de open kaart pakken of een kaart van de gesloten stapel. Als een speler denkt dat hij dichtbij nul zit (door de kaarten bij elkaar op te tellen), klopt hij op de tafel. De speler met de score het dichtst bij nul wint!

Plusminus

Vanuit de bezwaren op de bestaande contexten, is het idee ontstaan om een nieuwe aanleercontext te ontwikkelen waarbij de aangegeven bezwaren zoveel mogelijk getackeld worden. Dit heeft uiteindelijk geresulteerd in het kaartspel *Plusminus*, bestaande uit speelkaarten met hierop positieve en negatieve getallen (-5 t/m 5). Leerlingen krijgen een viertal kaarten die opgeteld een (tussen)score geven. Door tijdens het spel kaarten weg te leggen (aftrekken) of kaarten toe te voegen (optellen) ontstaan er nieuwe (tussen)scores.



figuur 4 Voorbeeld van een (tussen)score

Het spel heeft een aantal voordelen ten opzichte van de heks: de getallen zijn daadwerkelijke objecten, -4 is niet vier koude blokjes, maar een kaart met -4 erop. Als eventueel

nadeel kan worden opgemerkt dat de leerlingen dus bekend moeten zijn met negatieve en positieve getallen, want deze worden niet gekoppeld aan 'koud' en 'warm'.

De leerlingen ervaren zintuigelijk door wegleggen en ontvangen dat er iets weggaat (aftrekken) of iets bij komt (optellen). Dit sluit aan bij de theorie van 'embodied cognition', die stelt dat cognitie niet los gezien kan worden van waarnemen en handelen, maar juist de cognitie faciliteert.^[4] Bij de heks ontbreekt deze 'belichaming'.

Door de spelvorm kan het voorkomen dat -5 en 5 in één viertal zitten. Leerlingen zien dit snel als getallen die 'elkaar opheffen'. Het concept van 'tegengestelde getallen' wordt op deze manier informeel ontwikkeld.

Het doel is uiteindelijk dat leerlingen realiseren wat de principes zijn achter het samenspel van het proces en de objecten, bijvoorbeeld dat de som van het viertal kaarten toeneemt als je een kaart met een negatief getal weglegt (min en min is plus).

Het spel mathematiseren

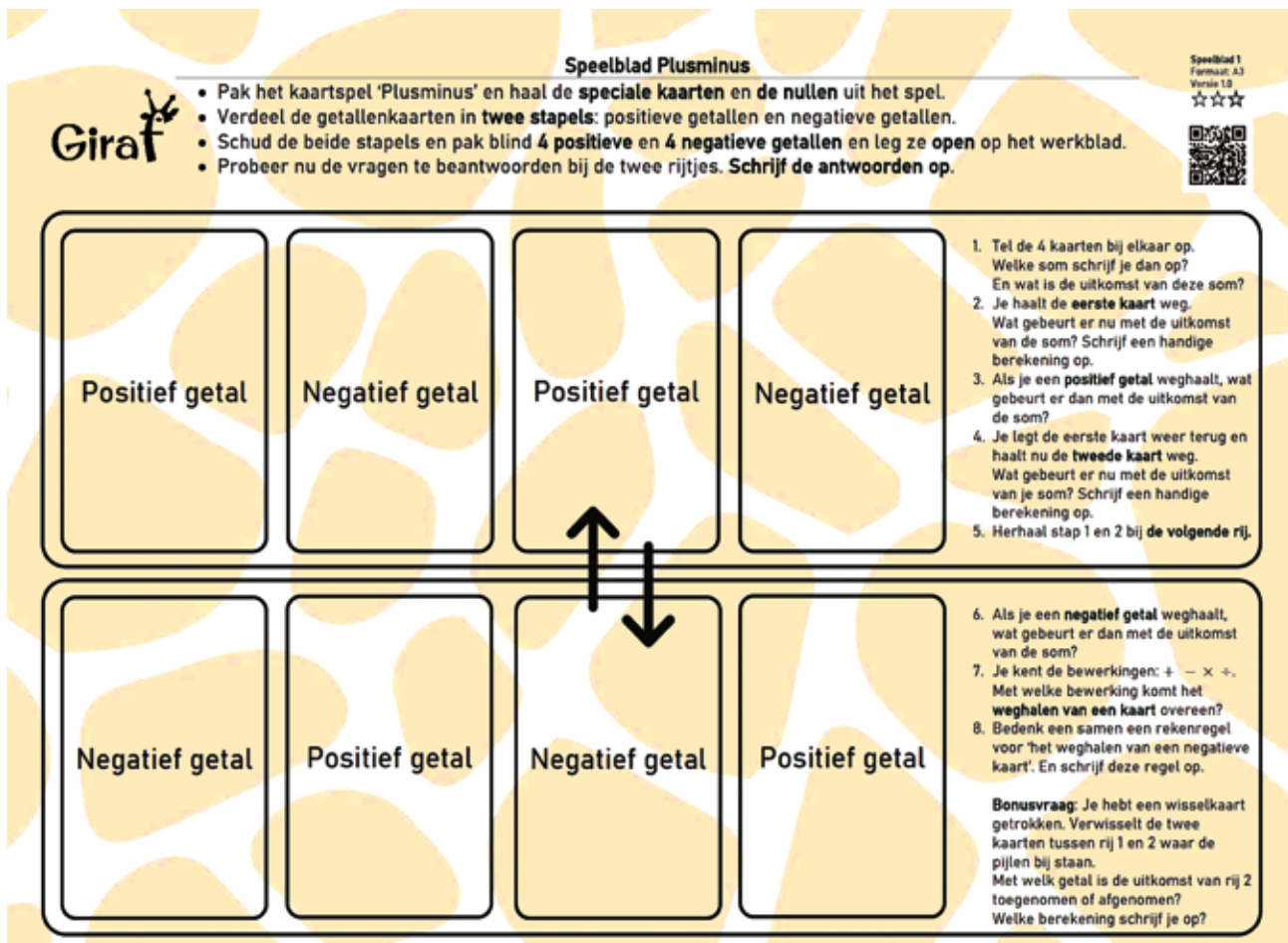
Vanzelfsprekend dient er een vervolg gegeven te worden aan het spelen van het spel, waarbij de leerlingen actief worden gestimuleerd om te verwoorden wat er nu precies voor rekenkundige concepten achter het spel zitten. Het didactische model, waarbij de leerling van spelen (concreet) via voorstellen, naar formeel handelen (abstract) gaan, wordt beschreven in het handelingsmodel.^[6]

Om dit handelingsmodel vorm te geven, zijn werkbladen ontwikkeld waarmee leerlingen op een andere wijze met de spelkaarten aan de slag kunnen gaan.

Het doel hierbij is de handelingen te expliciteren en te verbaliseren: 'het wegpakken staat dus voor (het proces van) aftrekken'. Waardoor er uiteindelijk begrip ontstaat over waarom bijvoorbeeld 'min en min' nu eigenlijk 'plus' is. Wanneer uit deze activiteit kan worden geconcludeerd dat er (meer) begrip is ontstaan voor deze concepten, kan er worden overgegaan naar de 'formele fase', waarbij leerlingen bijvoorbeeld uit de methode opgaven gaan maken met getallen die niet op de speelkaartjes staan (zoals hogere, lagere, decimale en gebroken getallen) en hierin vaardigheid ontwikkelen, zodat het spelen van het spel overbodig wordt voor het begrip.

Conclusie

Met de ontwikkeling van het spel *Plusminus* is geprobeerd een sterkere scheiding aan te brengen tussen het proces en het object bij het rekenen met negatieve getallen. Hierbij wordt de leerlingen de ruimte gegeven om het proces expliciet te laten ervaren, net zoals jonge kinderen bijvoorbeeld vingers gebruiken om (op) te tellen én worden negatieve getallen op zichzelf staande objecten die zich



figuur 5 Voorbeeld van één van de speelbladen

verhouden tot andere getallen. Door de spelvorm vervolgen via de werkbladen te koppelen aan gewone rekenopgaven, krijgen negatieve getallen een betekenisvolle plaats in het mentale rekenschema van de leerlingen. Dit schema kan vervolgens makkelijker worden uitgebreid naar het vermenigvuldigen van negatieve getallen.

Noten

- [1] Van Stiphout, I. (2019). Wat bedoelen ze toch met... proces-object? *Euclides*, 96(6), 4-9.
- [2] Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A perceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140.
- [3] Faes, T., Goris, T., Konings, T., Krabbendam, H., Monquill, A., & Staal, H. (2011). *Het leren van wiskunde - Leren effectief lesgeven*. Uitgeverij Ten Brink.
- [4] Alberto, R., & Bos, R. (2020). Het Flzier gericht

op... Embodied cognition in wiskundeonderwijs. *Euclides*, 95(5), 4-6.

[5] zie: <https://www.epsilon-uitgaven.nl/giraf-reeks>

[6] Ecent/Elwier. (2024, april 11). Handelingsmodel. Opgehaald van Lerarenopleidingen Science en Wiskunde/ Rekenen: <https://elbd.sites.uu.nl/2019/09/11/handelingsmodel/>

Over de auteurs

Sibren Stienstra is lerarenleider wiskunde aan de NHL Stenden. E-mailadres: sibren.stienstra@nhlstenden.com
Paul Durenkamp is lerarenopleider wiskunde aan de NHL Stenden en de RUG. Hij is tevens bestuurslid van de NVvW. E-mailadres: p.durenkamp@nvvw.nl