Bijlage 1: De Binomiale verdeling

Een kansvariabele *N* is Binomiaal verdeeld als

- er sprake is van een aantal herhalingen van eenzelfde kansexperiment, zeg *n*
- bij ieder van deze kansexperimenten slechts twee mogelijke uitkomsten zijn (die we succes en mislukking kunnen noemen)
- de kans op succes bij elk van deze zelfde kansexperimenten steeds gelijk is (zeg *p*)
- bij het aantal herhalingen het aantal successen geteld wordt dat we noteren als de kansvariabele *N*

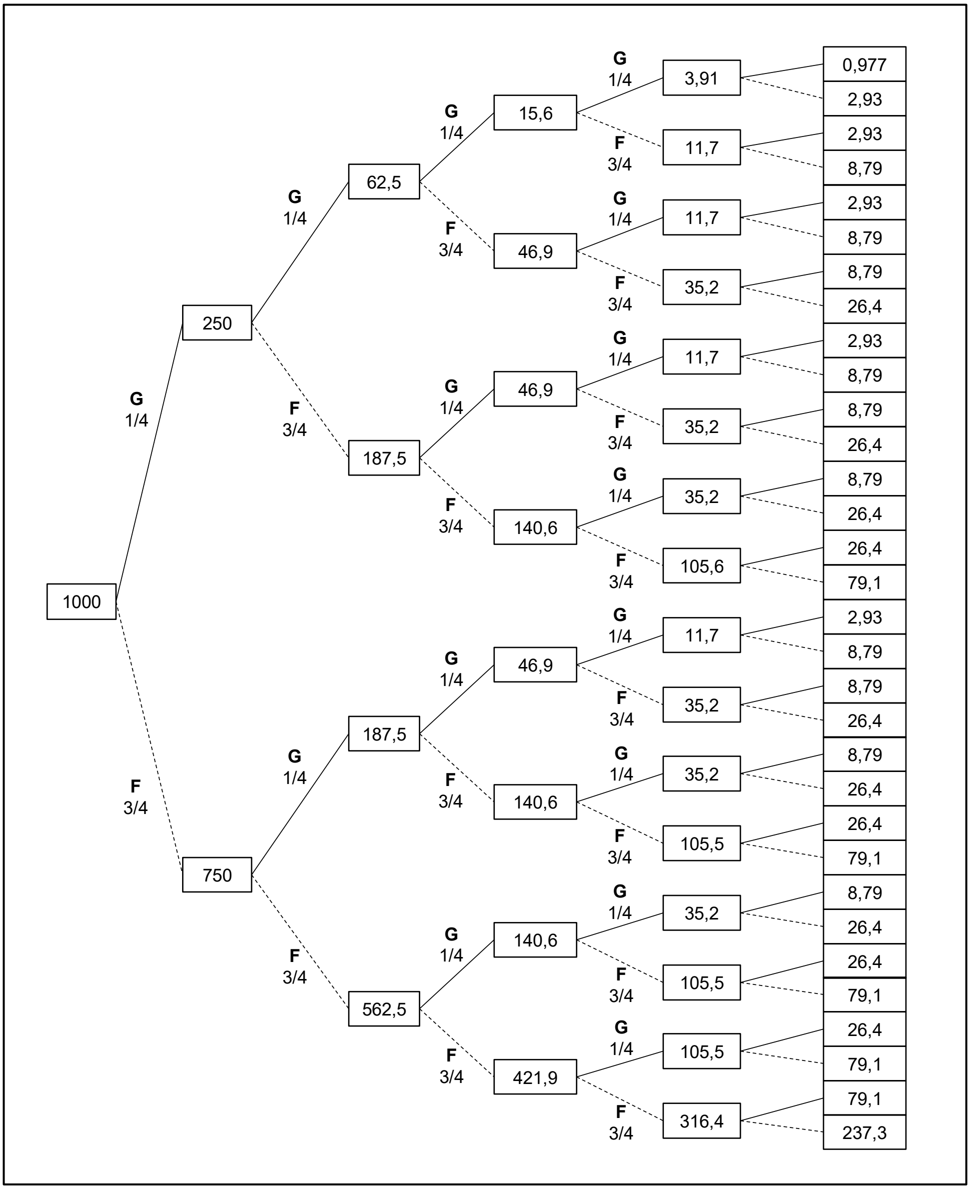
Voorbeeld 1
Gooi tien keer met een dobbelsteen en tel het aantal 'zessen' (en noem dat aantal successen *N*): het aantal herhalingen *n* is dan 10; er zijn steeds twee mogelijke uitkomsten, te weten 'zes' of 'geen zes'; de kans *p* op 'zes' is bij iedere worp 1/6.

Voorbeeld 2
Vul zonder de vragen te lezen willekeurig 5 vierkeuzevragen in en tel het aantal goede antwoorden (en noem dat *N*). Het aantal herhalingen is hier $n = 5$ en de succeskans *p* bij iedere vraag is gelijk aan ¼.

Voorbeeld 3
Neem een vaas met 4 rode en 2 witte balletjes. Pak 20 keer achter elkaar zonder te kijken een balletje, noteer de kleur en leg het balletje terug voor de volgende trekking. Tel het aantal keren dat je een rood balletje pakt en noem dat *N*. Wat zijn *n* en *p* in dit geval?

In ieder van deze voorbeelden kunnen we kansen op de verschillende uitkomsten van *N* berekenen. We illustreren dit door de kansen op $N = 0$, $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$, $N = 4$ en $N = 5$ uit te rekenen bij Voorbeeld 2.

De eerste manier is om, in gedachten, dit 1000 keer na te spelen. In 250 van deze 1000 gevallen verwachten we dat de eerste goed beantwoord zal worden, en in 750 gevallen zal de eerste vraag fout beantwoord worden. Vervolgens kijken we naar de 250 gevallen waarin de eerste vraag goed beantwoord is; we verwachten nu dat in 62,5 (we werken met gemiddelden) van deze gevallen de tweede vraag goed beantwoord zal worden. Enzovoorts. Zie hiervoor Figuur B1.1 waar G staat voor een goed antwoord en F voor een fout antwoord. Uit deze figuur lezen we af dat in (gemiddeld) 0,977 van de 1000 gevallen alle antwoorden goed zijn. Dit kun je zelf berekenen door $1000 \cdot (¼)^5$.



Figuur B1.1 Kansen van de Binomiale verdeling met *n*=5 en *p*=0,25

Opgave B1.1 – *Kansen van de Binomiale verdeling*

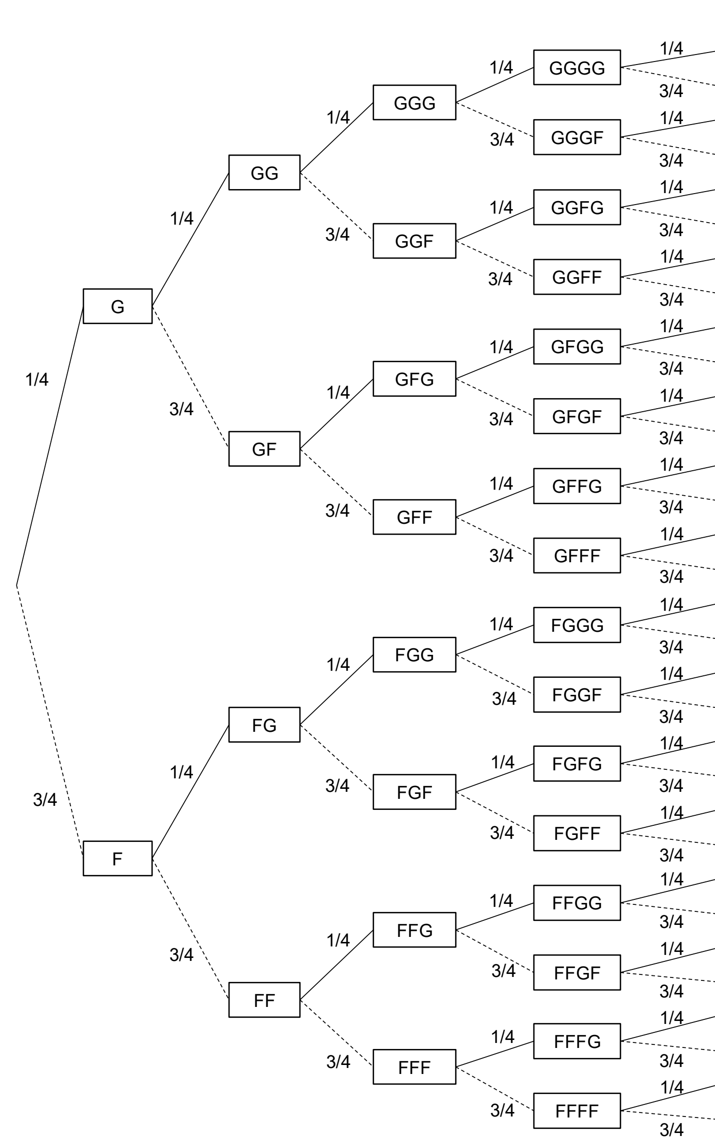
a. Ga in Figuur B1.1 na dat in precies $1000\cdot(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})^1\cdot 5$ gevallen er precies 4 antwoorden goed zijn.

b. Leg uit dat in precies $1000\cdot(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^2\cdot 10$ gevallen er precies 3 antwoorden goed zijn.

c. Leg uit hoe je nu het aantal gevallen met 0 goede antwoorden, met 1 goed antwoord en met twee goede antwoorden kunt vinden (dus P[N = 0], P[N = 1] en P[N = 2]).

Bovenstaande manier van kansen berekenen is inzichtelijk maar niet snel. We proberen de kansen sneller te berekenen.

d. Bekijk onderstaande Figuur B1.2 en controleer dat die vergelijkbare informatie geeft als Figuur B1.1.



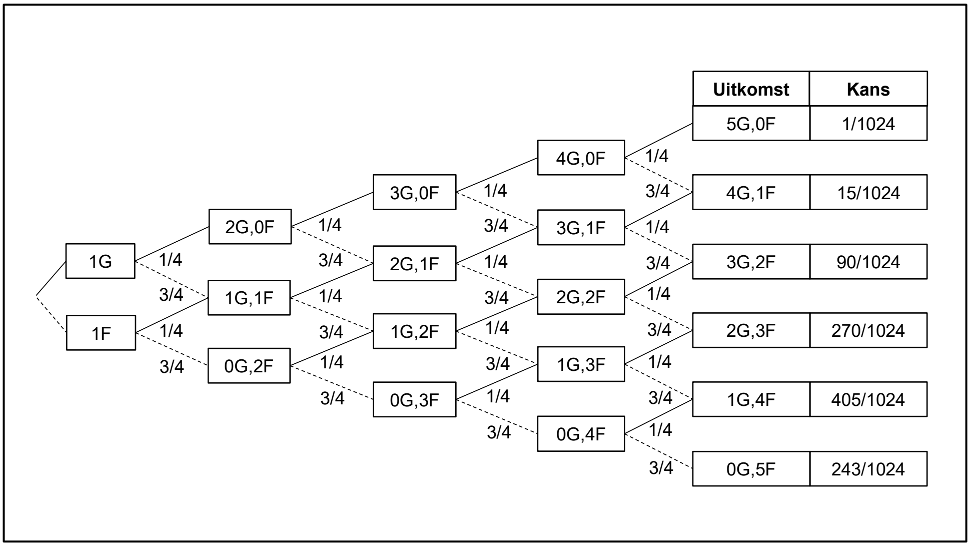
Uitkomst	Kans
GGGGG	1/1024
GGGGF	3/1024
GGGFG	3/1024
GGGFF	9/1024
GGFGG	3/1024
GGFGF	9/1024
GGFFG	9/1024
GGFFF	27/1024
GFGGG	3/1024
GFGGF	9/1024
GFGFG	9/1024
GFGFF	27/1024
GFFGG	9/1024
GFFGF	27/1024
GFFFG	27/1024
GFFFF	81/1024
FGGGG	3/1024
FGGGF	9/1024
FGGFG	9/1024
FGGFF	27/1024
FGFGG	9/1024
FGFGF	27/1024
FGFFG	27/1024
FGFFF	81/1024
FFGGG	9/1024
FFGGF	27/1024
FFGFG	27/1024
FFGFF	81/1024
FFFGG	27/1024
FFFGF	81/1024
FFFFG	81/1024
FFFFF	243/1024

Figuur B1.2 Kansen van de Binomiale verdeling met n = 5 en p = 0,25, alternatieve presentatie.

Hoewel Figuur B1.2 al meer inzicht geeft, heeft deze nog steeds als nadeel dat je zelf telkens moet tellen ‘op hoeveel manieren een uitkomst tot stand kan komen’ (de factoren 5 en 10 bij respectievelijk de kans op 1 goed antwoord en op 2 goede antwoorden). Dat is in Figuur B1.3 al verwerkt. Die factoren kun je berekenen met de formule

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ waarbij } n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1, \text{ (spreek uit “}n\text{ faculteit”)}$$

Als voorbeeld nemen we $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!}$, dat als uitkomst 10 oplevert. Op de de grafische rekenmachine kun je via nCr direct $\binom{n}{r}$ berekenen, probeer dit maar eens.



Figuur B1.3 Kansen van de Binomiale verdeling met *n*=5 en *p*=0,25, 2e alternatieve presentatie.

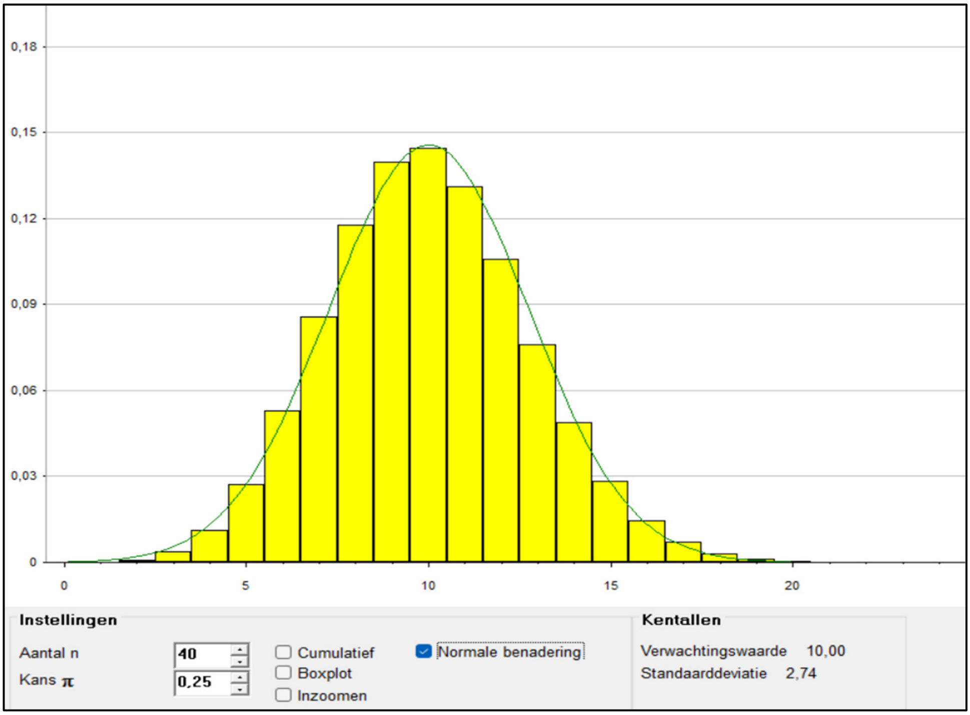
e. Controleer met de formule $P[N = k] = \binom{n}{k} \cdot (\frac{1}{4})^k (\frac{3}{4})^{n-k}$ de kansen $P[N = 3]$, $P[N = 4]$ en $P[N = 5]$ die je in Figuur B1.3 ziet. ◄

In deze opgave hebben we de volgende algemene formule ontdekt: als *N* Binomiaal verdeeld is met *n* herhalingen en succeskans *p* (we korten dit af als Binomiaal(*n*,*p*) verdeeld) dan geldt

$$P[N = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Opgave B1.2 – *De Binomiale verdeling bij aantal autoschaden*
We bekijken het aantal schaden dat een zekere automobilist in een bepaald jaar rijdt. We nemen aan dat voor deze automobilist de kans op schade in ieder kwartaal 0,05 is, en dus een kans van 0,95 op een schadevrij kwartaal. Bereken de kans op 4 schadevrije kwartalen in een jaar, en ook op 3 en 2 schadevrije kwartalen. ◄

In het verzekeringswezen kan het binomiale model gebruikt worden maar vaak geldt dat het aantal herhalingen heel groot is (n is groot) omdat het aantal verzekerden groot is. In die situaties kan een benadering met de normale verdeling handig zijn, zoals we hieronder zien met de kansen van een Binomiale verdeling met n = 40 en p = 0,25. Het staafdiagram is bij benadering 'klokvormig', dat wil zeggen bijna Normaal verdeeld.



Figuur B1.4 De Normale verdeling als benadering van de Binomiale verdeling