

11 Wiskundige denkactiviteiten: digitale bijlage

Suggesties voor opdrachten waarbij de leerlingen uitgedaagd worden wiskundige denkactiviteiten te ontplooiën. De opdrachten hebben de volgende structuur. In de kop staan achtereenvolgend:

- Titel
- Fase in het leerproces (bijvoorbeeld: instappen of toepassen)
- Wiskundige denkactiviteit(en); afhankelijk van de fase in het leerproces
- Voorkennis (bijvoorbeeld: exponentiële functies)
- Leerjaar (bijvoorbeeld: 3, 5/6 of alle leerjaren).

Dan volgt de centrale vraag: wat gaat het leren om? Daarna, op grijze achtergrond, volgt de opdracht voor de leerlingen. Een enkele keer zijn een of meer afsluitende opmerkingen.

1 Formule bij een lineair verband maken

2 Logaritme betekenis geven

3 Formules vergelijken

4 Betekenis geven aan exponentiële functie

5 Vierhoek transformeren

6 Breuken interpreteren

7 Parameters interpreteren

8 Inhoud maximaliseren

9 Vlakke-meetkundefiguren classificeren

10 Gedrag van een functie bij plus- of min-oneindig onderzoeken

11 Inzicht in integralen krijgen

12 Gelijkwaardige algebraïsche expressies herkennen (1)

13 Gelijkwaardige algebraïsche expressies herkennen (2)

14 Lineaire verbanden herkennen

15 Vergelijkingen classificeren

16 Exponentiële functies beheersen

17 Werken met parameters (1)

18 Verband tussen groefactor, groeipercentage en verdubbelingstijd leggen

19 Werken met parameters (2)

20 De afgeleide van $y = \sqrt{x}$ anders bewijzen

21 Een model valideren

22 Een gegeven model toepassen

23 Reclame beoordelen

24 Werken met parameters (3)

25 Algebraïsche uitspraken controleren

26 Stelling van Pythagoras bewijzen

1 Formule bij een lineair verband maken; ontwikkelen; algebraïseren; voorkennis: het gebruiken van letters als gegeneraliseerde getallen, nog geen formules behandeld; leerjaar 2/3

Centrale vraag: hoe maak je een lineaire formule bij een tabel?

Hier zie je een tabel met daarin aangegeven het bedrag dat Rosanne ophaalt bij een sponsorloop: x is het aantal rondjes dat ze gaat lopen en B is het bedrag dat ze daarmee op zal halen.

x	0	1	2	3	4	5	...	13	30
B	20	23	26	29			

- Bedenk hoe je bij 13 rondjes en bij 30 rondjes het bedrag kan berekenen.
- Bedenk hoe je in het algemeen bij n rondjes het bedrag kan berekenen.

2 Logaritme betekenis geven; onderzoeken; abstraheren; voorkennis: exponenten; leerjaar 4/5 VWO

Centrale vraag: Wat doet de operatie ‘log’ (‘logaritme’) met een getal?

Gebruik je GR om de volgende logaritmen uit te rekenen.

$$\log(10) = \dots$$

$$\log(100) = \dots$$

$$\log(2000) = \dots$$

$$\log(70) = \dots$$

Maak eventueel nog extra voorbeelden. Heb je enig idee wat ‘log’ doet met een getal?

Opmerking

Leerlingen gaan zelf experimenteren met de GR en op basis van de antwoorden formuleren zij een vermoeden dat getest moet worden met verdere voorbeelden. Hierna volgt het formaliseren: $\log(a) = b$ als $10^b = a$.

3 Formules vergelijken; ontwikkelen; formules manipuleren; voorkennis: tweedegraads functies en hun grafieken, haakjes wegwerken; leerjaar 3

Centrale vraag: Hoe kun je nagaan of verschillende formules dezelfde grafiek hebben?

Controleer dat de volgende formules bij dezelfde parabool horen en zeg welke kenmerken van de parabool je eenvoudig kunt aflezen uit de verschillende formules. Gebruik hiervoor de GR of Geogebra en kies zelf vergelijkbare formules om je vermoedens te verifiëren.

$$y = 2(x - 2)(x + 6)$$

$$y = 2x^2 + 8x - 24$$

$$y = 2(x + 2)^2 - 32$$

$$y = 2x(x + 4) - 24$$

Opmerking

Leerlingen gaan zelf op onderzoek uit. Bij klassikale nabespreking komen de karakteristieken zoals nulpunten, top, symmetrie, y -intercept aan bod.

4 Betekenis geven aan exponentiële functie; consolideren; abstraheren; voorkennis: groeifactor en exponentiële functie; leerjaar 3/4

Centrale vraag: Wat is de groeifactor in de volgende voorbeelden en hoe ziet de formule voor de bijbehorende exponentiële functie eruit?

Hieronder zie je voorbeelden van exponentiële functies:

- We vouwen een stuk papier steeds dubbel en kijken naar het aantal lagen. x is het aantal keren vouwen en y het aantal lagen.
- Een zeker soort bacteriën verdrievoudigt ieder uur. Op tijdstip 0 zijn er 20 bacteriën.
- Op een spaarrekening krijg je 5% rente per jaar; je zet 2000 euro op de spaarrekening en laat de rente ieder jaar bijschrijven. x is het aantal jaren dat je spaart en y is het totale bedrag op je spaarrekening.
- Een A_0 -vel is 2 keer zo groot als een A_1 -vel. Een A_1 -vel is 2 keer zo groot als een A_2 -vel. Enzovoort. De oppervlakte van A_0 -formaat is 1 m^2 .
- In de afgelopen twee eeuwen is de hoeveelheid gedrukt materiaal – boeken, tijdschriften etc. – enorm toegenomen. Niet alleen werden er steeds meer exemplaren gedrukt, maar ook het aantal (verschillende) publicaties is enorm toegenomen. Zo is sinds 1820 wereldwijd het aantal tijdschriften elke 18 jaar verdubbeld.
- Hoe dieper je onder water komt des te donkerder het wordt. Iedere meter die je dieper gaat neemt de hoeveelheid licht met ongeveer 25% af. Zeg dat de hoeveelheid licht op het wateroppervlak 100 is.

Wat is de groeifactor in elk van deze voorbeelden?

Vul voor voorbeeld c onderstaand schema in.

In de *situatie* van de spaarrekening is de groeifactor per jaar: ...

Daarbij hoort de volgende *tabel* (invullen):

x	0	1	2	3	4	...	8
y							

In deze tabel is x ... en y ...

Leg uit hoe je in de tabel de groeifactor ziet.

Geef een *formule* bij de tabel: ...

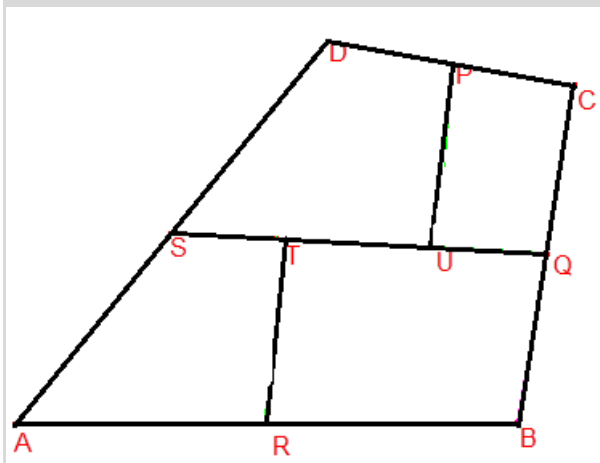
Schets de grafiek.

5 Vierhoek transformeren; instappen; logisch redeneren en bewijzen; voorkennis: eigenschappen van vierhoeken en driehoeken, met name van rechthoeken en parallellogrammen en van de middenparallel in een driehoek; leerjaar: 4/5 VWO, wiskunde B

Centrale vraag: Hoe weet je zeker dat dat een eigenschap die hier aan een voorbeeld wordt ontdekt algemeen geldt?

In deze vierhoek zijn P , Q , R en S de middens van de zijden. De lijnstukken PU en RT staan loodrecht op SQ .

- Knip de vierhoek uit. Knip deze vervolgens in vier stukken langs SQ , TR en PU . Kun je deze in een rechthoek leggen?
- De punten P , Q , R en S worden verbonden en zo ontstaat vierhoek $PQRS$. Wat kun je vertellen over deze vierhoek?



6 Breuken interpreteren; afsluiten; structureren en abstraheren; voorkennis: breuken, rekenen met breuken, verhoudingen; leerjaar 1/2

Centrale vraag: Hoe kun je een breuk als $\frac{3}{4}$ interpreteren?

Geef een voorbeeld waarbij je $\frac{3}{4}$ interpreteert als:

- de verhouding 3:4
- $\frac{1}{4}$ van 3
- 3 keer $\frac{1}{4}$
- 0,75

7 Parameters interpreteren; consolideren; structureren; voorkennis: verschillende functies uit de onderbouw; leerjaar: 3

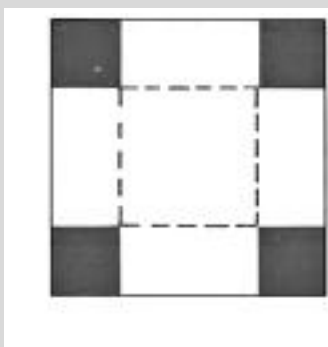
Centrale vraag: Wat is de betekenis van parameters?

Leg uit wat in de grafiek en in een tabel de betekenis is van de letters a en b in de drie volgende formules: $y = a \cdot x + b$; $y = a \cdot x^b$; $y = a \cdot x^2 + b$.

8 Inhoud maximaliseren; toepassen; modelleren en algebraïseren; voorkennis: gebruik grafische rekenmachine, gebruik variabelen; leerjaar: 4

Centrale vraag: Hoe leer je een probleem via modelleren en algebraïseren oplossen?

Er is een vierkant stuk papier van bijvoorbeeld 16 cm bij 16 cm.



De vier zwarte vierkantjes worden weggeknipt. Vervolgens wordt er een bakje van gevouwen. De instapvraag is: *Maakt het voor de inhoud wat uit hoog het bakje wordt?*

De vraag waar het eigenlijk omgaat is: *Bij welke verhouding tussen de zijde Z van het gehele stuk papier en de zijde h van de uitgeknipte vierkantjes is de inhoud van het bakje maximaal?*

Opmerkingen

De instapvraag is bedoeld om de leerlingen het idee te geven dat de inhoud wel degelijk varieert en dat er een grootste inhoud is.

Beheerst de klas de differentiaalrekening dan is dat het wiskundig gereedschap om tot de algemene oplossing (hoogte is een zesde deel van de zijde) te komen. Explorerend met de grafische rekenmachine lukt het ook.

9 Vlakke-meetkundefiguren classificeren; instappen; ordenen en structureren; voorkennis: geen; leerjaar: 1

Centrale vraag: Hoe leer je gemeenschappelijke kenmerken /eigenschappen van figuren te onderscheiden?

- a In het prille begin van de meetkunde krijgen leerlingen de vraag voorgelegd of zij in groepjes driehoeken (thuis uitgeknipt of aangeleverd) willen onderverdelen in groepjes met eenzelfde kenmerk.

Opmerking

Daarna klassikaal rapporteren, toespitsen op de kenmerken (hoeken, lengten, symmetrieën) en dat in een overzicht vastleggen.

- b Tegen het einde van het eerste leerjaar nog zo'n les, maar nu voor vierhoeken, bijvoorbeeld met een focus op 'vouwen', dus op symmetrie.
- c Bijvoorbeeld in de laatste week van het schooljaar een vuilniszak vol verpakkingen meenemen en laten ordenen.

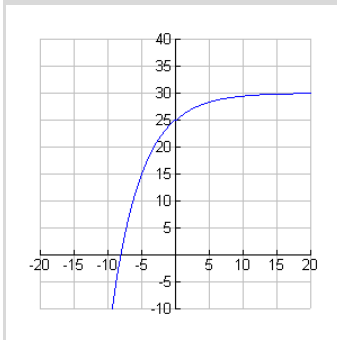
Opmerkingen

Als vanzelf ontstaat dan een discussie over het criterium of de criteria.

10 Gedrag van een functie bij plus- of min-oneindig onderzoeken; consolideren; formules manipuleren; voorkennis: alle behandelde functies; leerjaar 5/6

Centrale vraag: Hoe leer je het gedrag van functies bij plus- of min-oneindig onderzoeken?

Een voorbeeld: we nemen de functie $y = 30 - 5 \cdot 0,8^x$



Aan de hand van de formule kun je beredeneren dat, als x naar oneindig nadert, de y -waarde naar een vaste waarde nadert. Immers als x heel groot wordt, nadert $0,8^x$ naar 0 en y dus naar $30 - 5 \cdot 0 = 30$. Aan de hand van de formule kun je ook beredeneren dat, als x nadert naar min-oneindig, de y -waarde willekeurig klein (negatief) wordt. Immers als $x \rightarrow -\infty$, dan zal $0,8^x$ willekeurig groot worden en dat moet je aftrekken van 30.

Geef bij de volgende functies steeds eerst een redenering aan de hand van de formule en controleer je antwoord eventueel met een grafiek op de GR.

$$y = \frac{50}{x^2 + 2}$$

$$y = \frac{100}{2 + 3 \cdot 0,95^x}$$

$$y = -3 \cdot x^5 + 400 \cdot x^2$$

$$y = \frac{4}{x} + 3$$

$$y = 100 \cdot 0,97^x + 6$$

$$y = 3(e^{-x} + e^x)$$

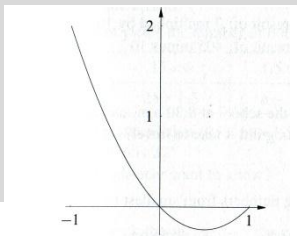
$$y = -3x^4 + 9x^2$$

$$y = 2x + \frac{3}{x+5}$$

11 Inzicht in integralen krijgen; consolideren; ordenen en structureren, abstraheren, logisch redeneren; voorkennis: integralen; leerjaar: 6 VWO

Centrale vraag: Hoe leer je te redeneren bij integralen?

Hieronder staat de grafiek van de functie g .



waar zijn.

a $\int_{-1}^1 g'(x) dx = 0$

Beredeneer waarom de volgende uitspraken al dan niet behoren

$$b \quad \int_{-1}^1 g(x) dx \geq -\frac{1}{2}$$

12 Gelijkwaardige algebraïsche expressies herkennen (1); consolideren; formules manipuleren; voorkennis: algebra; leerjaar 4/5

Centrale vraag: Hoe leer je gelijkwaardige algebraïsche expressies herkennen?

Welke expressies zijn niet gelijkwaardig met $y = 3x^{-2}$; x is steeds positief.

a $y = \frac{3}{x^2}$

b $y = \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{x}$

c $y = (3x^{-1})^2$

d $y = \frac{6x}{2x^3}$

e $y = 3\left(\frac{x^4}{x^5}\right)^2$

f $y = 4x^{-2} - x^{-2}$

g $y = 2x^{-1} + x^{-1}$

13 Gelijkwaardige algebraïsche expressies herkennen (2); consolideren; formules manipuleren; voorkennis: algebra; leerjaar 4/5

Centrale vraag: Hoe leer je gelijkwaardige algebraïsche expressies herkennen?

Welke expressies horen bij elkaar (matchen); x steeds positief

$\frac{4x^{0,25}}{x}$	$4x^{1,25}$
$4x^{0,25} \cdot x$	$4x^{\frac{1}{2}}$
$(4x)^2$	$16x$
$x^{0,25} \cdot 4x^2$	$4x^{2,25}$
$4\sqrt{x}$	$4x^{4\frac{1}{2}}$
$\frac{4x}{x^4}$	$4x^{-\frac{1}{2}}$
$\frac{4\sqrt{x}}{x}$	$4x^{-0,75}$
$(4\sqrt{x})^2$	$4x^{-3}$
$\sqrt{16x^9}$	$16x^2$

14 Lineaire verbanden herkennen; consolideren; formules manipuleren; voorkennis: lineaire verbanden, algebra; leerjaar: 3

Centrale vraag: Hoe leer je lineaire verbanden herkennen?

Welke van de volgende formules horen bij een lineaire functie en hoe bepaal je dat?

$$y = 3(x-4) + 4$$

$$y = 1 - 3x(x-1)$$

$$y = 1 - 3x$$

$$y = 3 + 3x + 2x$$

$$y = \frac{x+8}{4}$$

$$y = \frac{4}{x+2}$$

15 Vergelijkingen classificeren; consolideren; formules manipuleren, analytisch denken en probleemoplossen; voorkennis: vergelijkingen oplossen, algebra; leerjaar: 5/6 VWO

Centrale vraag: Hoe leer vlot niet in standaardvorm gegeven vergelijkingen aanpakken en oplossen?

Maak verschillende categorieën van vergelijkingen die overeenkomstige oplossingsmethoden hebben. Geef een naam aan iedere categorie en illustreer de oplossingsmethode aan de hand van een prototype vergelijking uit de categorie.

$${}^2\log(x) + 2 = {}^2\log(x-1)$$

$$2x^2 = 6x + 7$$

$$\frac{\frac{1}{x} + x}{2x+4} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} = 4$$

$$x^3 - 12x^2 + a \cdot x = 0$$

$${}^3\log(ax) + 4 = 6$$

$$\sqrt{x+6} + x = 6$$

$$b = 2(x-a)^2$$

$$3(x-1) \cdot (x^2+1) = 0$$

$$\ln(x) + 2 = \ln(x+e)$$

$$(6-2x)^4 = 0$$

$$\sqrt{e^x - 2} = 0$$

$$6 = (x^2 + 1)^3 \quad a \cdot x - \frac{b}{x} = 0$$

$$2(x^2 + 3) = 6x + 2$$

$$2(x+1) + 3(x-1) = 4(x-1)$$

$$2\sqrt{2x-6} = x-9$$

$$(\sin(x))^2 - \frac{1}{2} \cdot \sin(x) = 0$$

$$2x^2 = bx$$

$$\cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = -1$$

$$(e^x)^2 - b \cdot e^x = 0$$

$$(a-2x)^4 = 0 \quad (x^2+2)^{-0.5} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(2x) = \sin(x)$$

$${}^2\log(x) = {}^2\log(x-a)$$

$$4 \cdot (e^x + 1)^2 = 40$$

$$4(x-a) \cdot (x^2-b) = 0 \quad e^{3x-1} = e^{-2x+10} \quad \frac{3x+8}{-3x+p} = 2$$

$$\frac{\sin(x)-1}{e^x} = 0$$

$$\frac{x^2-4}{x+2} = -4$$

$$4(\sin(x))^3 + 1 = 12(\sin(x))^3$$

$$x^3 - 12x^2 + 20x = 0$$

$$4^3 \cdot 4^x = 4^{-x+6}$$

$$6(x^2+a) = 2x \cdot (x^2+a)$$

$$e^{3x} = 6$$

$${}^3\log(4x) + 4 = 6$$

$$\sqrt{3x} = \sqrt{-x+16}$$

$$(x-4)^2 - 3(x-4) = 10$$

$$\frac{2x+8}{-3x+10} = 3$$

$$(6x)^4 = (x+3)^4 \quad \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 40$$

$$\sqrt{x} = 6\sqrt[6]{x}$$

$$-2(x-p)^2 + 12 = 8$$

$$2x^2 = 6x$$

$$2x+6 = 6x-18$$

$$x^3 + 9x^2 + 18x + 8 = 0$$

16 Exponentiële functies beheersen; afsluiten; ordenen en structureren; voorkennis: exponentiële functies, hun formule en bijbehorende tabel, groeifactor, groeipercentage, halveringstijd; leerjaar: 4/5

Centrale vraag: hoe leer je ‘alle’ aspecten van exponentiële functies overzien?

Leg alle kaartjes op tafel en zoek steeds een viertal kaartjes bij elkaar, die horen bij dezelfde exponentiële functie (kwartetten; er is slechts een deel van alle kaartjes hier opgenomen).

Formule is $y = 240 \cdot 0,81^x$, met x in weken	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>3</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>127,5</td> <td>67,8</td> </tr> </tbody> </table>	x	3	6	y	127,5	67,8	Per week neemt hoeveelheid met 19% af	De halveringstijd is 3,3 weken
x	3	6							
y	127,5	67,8							
Formule is $y = 200 \cdot 0,95^x$, met x in weken	Bij $x = 1$ hoort $y = 190$ Bij $x = 2$ hoort $y = 180,5$	De halveringstijd is 13,5 weken	Het afnamepercentage per 4 weken is 19%						
Groeifactor per 10 weken is 5,23	Groeifactor per week is 1,18	Groeipercentage per week is 18%	Groeipercentage per 2 weken is 39,2%						

17 Werken met parameters (1); toepassen; analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren; voorkennis: afhankelijk van het voorbeeld; leerjaar: bovenbouw HAVO-VWO (sommige voorbeelden alleen VWO)

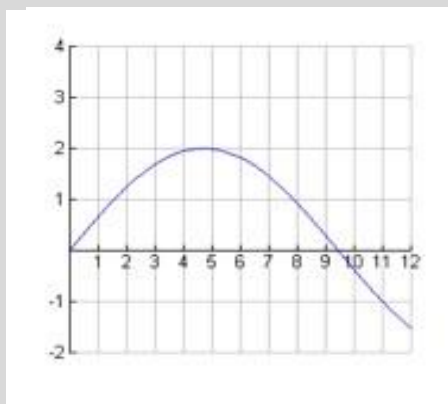
Centrale vraag: Hoe leer je de betekenis en functie van parameters in functievoorschriften?

a Gegeven is de functiefamilie $f_p(x) = 2 \cdot \sin(p \cdot x)$.

De grafiek van $f_{\frac{1}{3}}$ (dus $p = \frac{1}{3}$) op het interval $[0; 12]$ staat hier weergegeven.

De grafiek van f_p snijdt de x -as in O . Het volgende snijpunt van de grafiek f_p met de x -as noemen we B .

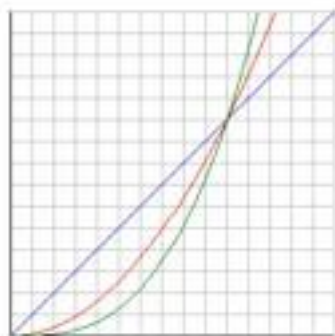
V is het gebied tussen de grafiek van f_p en de x -as.



Bereken voor welke exacte waarde van p geldt dat de oppervlakte van V gelijk is aan 20.

b Gegeven zijn de functies $f_k(x) = 10^{1-k} \cdot x^k$ voor $k = 1, 2, 3, 4, \dots$

Voor enkele waarden van k is de grafiek getekend.



- 1 Bewijs dat de grafieken van deze functies behalve door punt $(0, 0)$ ook nog door een tweede vast punt P gaan.
- 2 Punt Q is de projectie van P op de x -as; dit betekent dat Q het punt $(10, 0)$ is.

We bekijken $\triangle OPQ$. De grafieken van f_k verdelen $\triangle OPQ$ in twee delen.

- 3 Onderzoek of er een waarde van k is waarvoor de grafiek van f_k de $\triangle OPQ$ in twee delen met gelijke oppervlakte verdeelt.

c De grafiek van $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ raakt de lijn $y = x$ in de oorsprong $(0, 0)$.

Bereken a en b .

d Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 30$

- 1 Toon aan dat de x -coördinaat van het buigpunt van f precies tussen de x -coördinaten van het maximum en minimum ligt.
- 2 De functie $f(x)$ is een familielid van de familie functies $f_p(x) = x^3 - 3x^2 + p \cdot x + 30$.

Zoals je hebt gezien geldt bij $p = -9$ dat $f_p(x)$ twee extremen heeft.

Als p groter wordt, dan komt er een situatie dat $f_p(x)$ geen extremen meer heeft.

Bereken vanaf welke waarde van p dat het geval is.

Opmerking

Het leren werken met en interpreteren van formules met parameters bevordert de symbol sense en de bekwaamheid in het manipuleren met formules.

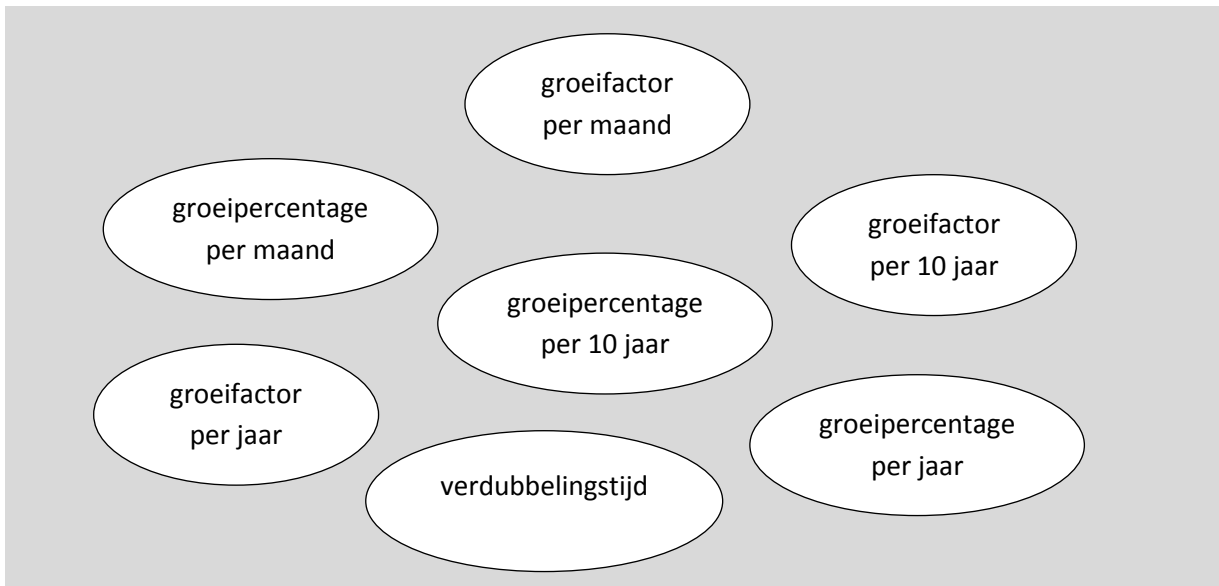
18 Verband tussen groeifactor, groeipercentage en verdubbelingstijd leggen;

consolideren; abstraheren; voorkennis: exponentiële functies; leerjaar: 4/5

Centrale vraag: Hoe kun je de centrale concepten en de relaties bij exponentiele functies in beeld brengen?

Geef door middel van pijlen aan of je rechtstreeks uit het ene het andere kan berekenen.

Voorbeeld: als je rechtstreeks vanuit het 'groeipercentage per jaar' het 'groeipercentage per maand' kan berekenen, dan trek je een pijl van 'groeipercentage per jaar' naar 'groeipercentage per maand'. Geef ook steeds een illustratieve voorbeeldberekening.



19 Werken met parameters (2); consolideren; analytisch denken en probleemoplossen; voorkennis: differentiaal- en integraalrekening; leerjaar: 5/6 VWO, wiskunde B

Centrale vraag: Hoe leer je werken met een functiefamilie/parameters?

Gegeven is de functiefamilie $f_a(x) = x \cdot e^{ax}$ met $a \neq 0$.

Alle grafieken van deze functiefamiliegaan door $(0, 0)$.

- Toon aan dat de grafiek van alle functies f_a in $(0, 0)$ dezelfde helling hebben en bereken deze helling.
- Toon aan dat iedere grafiek van f_a precies één extreem (minimum of maximum) heeft. Druk de x -coördinaat van dit extreem uit in a .
- Toon aan dat $F(x) = \frac{1}{a} \cdot x \cdot e^{ax} - \frac{1}{a^2} \cdot e^{ax}$ een primitieve van f_a is.

20 De afgeleide van $y = \sqrt{x}$ anders bewijzen; afsluiten; logisch redeneren en bewijzen; voorkennis: afgeleide; de afgeleide van $y = \sqrt{x}$ met een van de differentieerregels berekenen, inverse functie, de grafieken van een functie en diens inverse zijn elkaars gespiegelde in de lijn $y = x$; leerjaar: 5 VWO wiskunde A

Centrale vraag: Hier zie je het bewijs dat de afgeleide van $y = \sqrt{x}$ gelijk is aan $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

In de linker kolom staan iedere keer uitspraken; in de rechter kolom geef je een argument waarom deze uitspraak waar is. Het is niet de bedoeling dat je deze bewijsstappen uit je hoofd leert, het gaat hier om de argumentatie.

We zoeken de groeisnelheid van $y = \sqrt{x}$ in $x = a$.

1. De functies $y = x^2$ en $y = \sqrt{x}$ zijn elkaars inverse.	
2. De grafieken van $y = x^2$ en $y = \sqrt{x}$ zijn elkaars gespiegelde in de lijn $y = x$ (45° lijn)	

<p>3. We zoeken de groeisnelheid van $y = \sqrt{x}$ in $x = a$. We maken eerst een getallenvoorbeeld en kiezen voorlopig even $x = 9$.</p>		
<p>4. Als punt $(9,3)$ op de grafiek van $y = \sqrt{x}$ ligt dan ligt het overeenkomstige punt $(3,9)$ op de grafiek van $y = x^2$</p>		
<p>5. De groeisnelheid van $y = x^2$ in punt $(3,9)$ is 6.</p>		
<p>6. Dus de groeisnelheid van $y = \sqrt{x}$ in punt $(9,3)$ is $\frac{1}{6}$</p>		
<p>7. We kijken nu naar het algemene geval en We zoeken dus de groeisnelheid van $y = \sqrt{x}$ in $x = a$</p>		
<p>8. Als punt (a, \sqrt{a}) op de grafiek van $y = \sqrt{x}$ ligt dan ligt het overeenkomstige punt (\sqrt{a}, a) op de grafiek van $y = x^2$</p>		
<p>9. De groeisnelheid van $y = x^2$ in punt (\sqrt{a}, a) is $2\sqrt{a}$</p>		
<p>10. Dus de groeisnelheid van $y = \sqrt{x}$ in punt (a, \sqrt{a}) is $\frac{1}{2\sqrt{a}}$</p>		

21 Een model valideren; onderzoeken; modelleren en algebraïseren; voorkennis: natuurlijke logaritme, differentiëren; leerjaar: 5/6 VWO wiskunde A

Centrale vraag: Hoe kan een gegeven model gevalideerd worden?

In een onderzoek kijkt men hoe het verkeerslawaai L (in dB) op een plaats afhangt van de snelheid v (in km/u) van het verkeer en de afstand tot een weg a (in m).

Bij een bepaalde weg vindt men de volgende formule:

$$L = 89,5 - 2,1 \cdot \ln(a \cdot v) + 0,16 \cdot v - 0,03 \cdot a$$

a Vermoeden 1: Je mag verwachten dat, bij constante snelheid, geldt: als de afstand tot de weg groter wordt dat het verkeerslawaai minder wordt.

Toon aan dat, voor een vaste waarde van v , volgens deze formule geldt: als a groter wordt dan L kleiner.

b Vermoeden 2: Misschien zou je ook verwachten dat, op een vaste afstand tot de weg, volgens deze formule geldt: als de snelheid groter wordt dat dan het verkeerslawaai toeneemt.

Onderzoek vermoeden 2.

22 Een gegeven model toepassen; toepassen; modelleren en algebraïseren, logisch redeneren en bewijzen; voorkennis: e-machten, differentiëren; leerjaar: 5/6 VWO, wiskunde A

Centrale vraag: hoe leer je je kennis bij een gegeven model gebruiken?

Bij het ontwerpen van een weg moet er rekening gehouden worden met het schoon regenen van de weg.

Tijdens regenbuien wordt het vuil van de weg gespoeld. Het percentage vuil dat weggespoeld wordt (P) is afhankelijk van de tijd dat het regent (t in uren): $P = 100 \cdot (1 - e^{-c \cdot t})$.

In deze formule geldt dat c , een positieve constante, afhankelijk is van het soort wegdek. Voor beton geldt $c = 0,05$ terwijl voor asfalt geldt $c = 0,025$.

- Teken de grafieken voor beide wegen en zeg welke weg sneller schoongespoeld wordt.
- Onderzoek met behulp van de afgeleide voor beide wegen welke van de twee wegen bij een hele korte regenbui het snelste schoonspoelt.

Voor een vaste, positieve waarde van c geldt altijd: P is een stijgend functie van t (als t groter wordt dan stijgt P).

- Toon dit aan met een redenering aan de hand van de gegeven formule.
- Toon dit aan met behulp van de afgeleide.

23 Reclame beoordelen; toepassen; analytisch denken en probleemoplossen, eventueel modelleren en algebraïseren; voorkennis: exponentiële functies; leerjaar 4, wiskunde A

Centrale vraag: hoe leer je je kennis in een praktijksituatie toepassen?

Uit verschillende brochures van banken haalt iemand de volgende 3 aanbiedingen:

Bank A: Bij een storting van 10 000 euro garanderen wij een hoog rendement: uw geld is in 20 jaar verdubbeld.

Bank B: Bij een storting van 10 000 euro krijgt u per jaar maar liefst 4,5% rente.

Bank C: Bij een storting van 10 000 euro krijgt u iedere 5 jaar 25% rente bijgeschreven.

Stel dat deze persoon van plan is zijn 10 000 euro voor langere tijd weg te zetten op de bank, welke bank moet hij dan kiezen voor het hoogste rendement? Licht je werkwijze toe.

24 Werken met parameters (3); afsluiten; analytisch denken en probleemoplossen, logisch redeneren en bewijzen; voorkennis: goniometrische functies, differentiëren; leerjaar: 6 VWO, wiskunde B

Centrale vraag: Hoe leer je met parameters werken?

Gegeven is een functie $f(x) = a + b \cdot \sin(c \cdot x)$.

Het minimum van $f(x)$ is gelijk aan 5 en het maximum is gelijk aan 9.

De grafiek van f gaat door het punt $(3, 7)$

- Bereken (exacte) waarden van a , b en c waarvoor dit klopt.
- Zijn dit alle mogelijke waarden? Zo nee, geef alle mogelijke (exacte) waarden.

25 Algebraïsche uitspraken controleren; consolideren; formules manipuleren; voorkennis: eenvoudige algebraïsche gelijkheden; leerjaar: 3/4/5

Centrale vraag: hoe leer je vlot algebraïsche gelijkheden?

Zijn de volgende uitspraken waar; geef aan waarom wel of niet

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$$

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\frac{a+b}{a} = 1+b$$

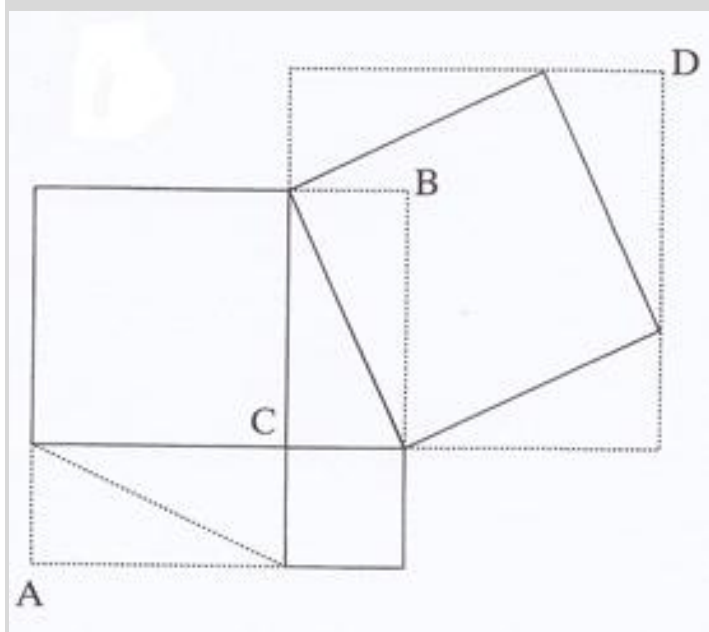
$$(2.p)^3 = 8p^3$$

26 Stelling van Pythagoras bewijzen; ontwikkelen; logisch redeneren en bewijzen; voorkennis: oppervlakte van rechthoeken; leerjaar: 3/4/5

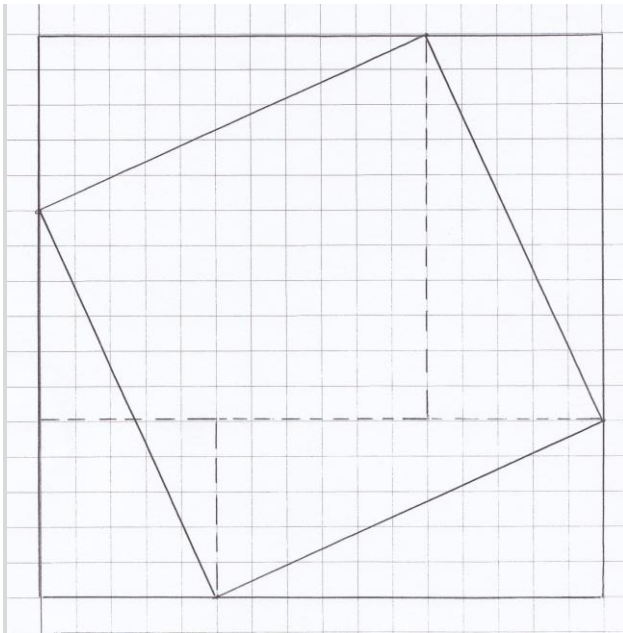
Centrale vraag: Hoe leer je bewijzen?

Hier zie je drie plaatjes met een bewijs van stelling van Pythagoras. Hoe weet je zeker dat die stelling van Pythagoras juist is? Welke bewijs vind je het mooiste?

1



2



3

