Bijlage hoofdstuk 15: Pi-dag

Verschillende benaderingen van pi: hoe kun je pi benaderen en hoe snel gaat het?

1. Expirimenteel:

Verzamel 20 ronde voorwerpen, neem niet alleen kleine maar vooral ook grote. Maak een tabel van omtrek tegen diameter van 20 ronde voorwerpen. Gebruik het Gamma-metermeetlint en het 30 m lint.

Bereken $\frac{omtrek}{diameter}$ in 3 decimalen per voorwerp.

Bereken het gemiddelde van deze ex**PI**rimentele waarden.

Schrijf de tabel met de 20 voorwerpen, met de daarbij gevonden waarden van omtrek, diameter en $\frac{omtrek}{diameter}$ op een A3 vel.
Geef een benadering van pi met de gemiddelde waarde van al je uitkomsten.
Laat de twee hoogste en de twee laagste uitkomsten weg. Waarom is dit een goed idee?
Vertel erbij tot hoeveel decimalen nauwkeurig nu pi benaderd is.

2. Reeks van Leibniz, ook wel reeks van James Gregory genoemd:

$$\pi = 4\times(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+...)$$

Gebruik MODE SEQ op je rekenmachine.

Neem $u(n)=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n-1}$, voor $n \geq 1$

Bereken π met $4\cdot \mathrm{sum}(\mathrm{seq}(u(n),n,1,getal)$ voor verschillende waarden van *getal*: 5, 10, 50, 100, 150, 200 (dit duurt lang). Gebruik de opties LIST MATH en LIST OPS.

[n = 100 geeft 3,1**3**1592904 en n = 101 geeft 3,1**5**1493401 dus erg trage convergentie!!]

Maak op een A3-vel een tabel met de waarden van n, de erbij berekende benadering van pi en het aantal decimalen dat juist is.

3. Formule van Wallis:

$\pi = 2\times\frac{2\times2}{1\times3}\times\frac{4\times4}{3\times5}\times\frac{6\times6}{5\times7}\times\frac{8\times8}{7\times9}\times...$ is een erg langzame convergentie. Het eerste blokje noem ik $\frac{2\times2}{1\times3}$

Bereken de benadering van pi op deze manier tot het 10^{e} en 11^{e} blokje.
Schrijf op een A3-vel de tabel van 1^{e} t/m 11^{e} blokje en de bijbehorende benadering van pi.
Hoeveel decimalen zijn na het berekenen van het 11^{e} blokje al goed?

4. Reeks van Newton:

$$\pi = 6\cdot(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2^5}+\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{2^7}+\frac{1\times3\times5\times7}{2\times4\times6\times8}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{2^9}+...)$$

Gebruik MODE seq op je rekenmachine.

Neem $u(n)=u(n-1)\times\frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n-1}{2n+1}\times\frac{1}{2^2}$ met n_{Min}=0 $u(nMin) = \frac{1}{2}$

Bereken π met $6\cdot \mathrm{sum}(\mathrm{seq}(u(n),n,0,getal)$ voor verschillende waarden van *getal*: 5,10, 20,50, 75, 100 (dit duurt lang). Gebruik de opties LIST MATH en LIST OPS.

Maak op een A3-vel een tabel met de waarden van n, de erbij berekende benadering van pi en het aantal decimalen dat juist is.

[n = 100 geeft 3,1415926536.. is in 9 decimalen al goed]

5. Formule van Vieta:

$$\pi = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\cdot\ldots = 2\cdot\frac{2}{u(1)}\cdot\frac{2}{u(2)}\cdot\frac{2}{u(3)}\cdot\frac{2}{u(4)}\ldots.$$

Gebruik MODE seq op je rekenmachine.

Neem $u(n)=\frac{\sqrt{2+u(n-1)}}{2}$, met *n*Min=1 en *u*(*n*Min)=√2.

Bereken π met $\frac{2^{getal+1}}{\prod_{k=1}^{getal} u(k)} = \frac{2^{getal+1}}{prod(seq(u(k),k,1,getal))}$

Neem voor $getal$ de waarden: 5, 10, 20, 50, 75, 100 (duurt lang).Gebruik de opties LIST MATH en LIST OPS.

[n = 100 geeft 3,1415926536.. is in 9 decimalen goed]

Maak op een A3-vel een tabel met waarden van n, de berekende $u(n)$, de benadering van pi, en hoeveel decimalen er juist zijn.

6. Met kettingbreuken

Veel formules stoelen op de invTAN-formule op de GR helaas $\tan^{-1}$ genoemd; invTAN (1) = $\frac{\pi}{4}$ ofwel $\frac{1}{4}\pi$.

$$\frac{4}{\pi} = 1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\ldots}}}}$$

Neem $u(n)=2n-1+\frac{n^2}{2n+1}$ en probeer handig uit te rekenen: $u(1)$, $1+\frac{1}{u(2)}$, $1+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{u(3)}}$, $1+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{9}{u(4)}}}$, enz.

Maak op een A3-vel een tabel met waarden van n, de berekende $u(n)$, de benadering van pi, en hoeveel decimalen er juist zijn.

7. Methode van Ramanujan – Chudnovsky

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}}\cdot\frac{1}{sum(seq(\frac{(4k)!}{(k!)^4}\cdot\frac{1103+26390k}{396^{4k}},k,0,getal)}$$, voor verschillende waarden van *getal*.

Neem voor *getal* de waarden: 1, 2, 5, 10, 20. Maak op een A3-vel een tabel met waarden van *getal*, de benadering van pi, en hoeveel decimalen er juist zijn.

8. De formule van Simon Plouffe

$$\pi = sum(seq(\frac{1}{16^k}(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6}),k,0,getal)$$, voor verschillende waarden van *getal*.

Neem voor *getal* de waarden: 1, 2, 5, 10, 20. Maak op een A3-vel een tabel met waarden van *getal*, de benadering van pi, en hoeveel decimalen er juist zijn.

Veel **PI**ezier