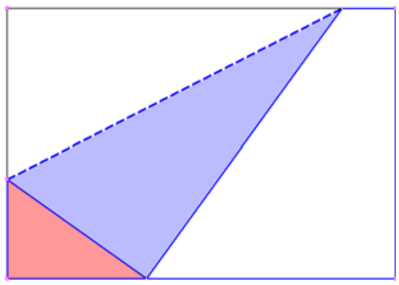
Bijlage hoofdstuk 18: Hoek van een A4 omvouwen

opgave driehoek
Geef elke leerling een A4'tje.



instructie:
- Neem een blanco A4'tje en leg het dwars voor je op tafel.
- Vouw het hoekpunt linksboven naar een punt op de onderrand.
  Er ontstaat nu links onder de omgevouwen rand een (roze) driehoekje.
- Meet de zijden van dit driehoekje in mm en bereken de oppervlakte ervan. Schrijf je antwoord op.

Wie de grootste oppervlakte heeft is winnaar.

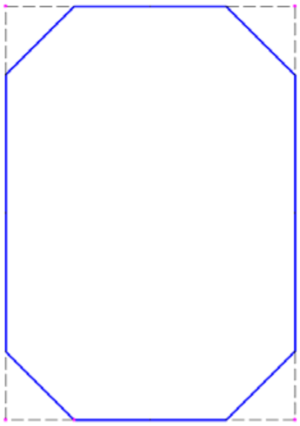
Na het bespreken van wat er gebeurt als je dit omgevouwen punt over de onderrand schuift, n.l. dat de oppervlakte eerst groter en dan weer kleiner wordt, zet ik de klas in groepjes aan het werk om de plaats van het optimale punt te berekenen.
Ik zeg dat ze mogen uitgaan van afmetingen van een A4'tje van 30 cm bij 21 cm.

opgave LIJST [een variant op een opgave NIEUW in de toets 4v wis A G&R H6]
Van een rechthoekig stuk karton van 14 bij 20 cm wordt een lijst gemaakt.
Van de vier hoekpunten wordt een gelijkbenig rechthoekige driehoek afgeknipt. Zie figuur 1.
Vervolgens worden de randen naar binnen gevouwen. Zo ontstaat er een lijst (grijs gearceerd) rondom een rechthoek. Zie figuur 2.
De oppervlakte van de "lijst" is 88 cm^2 als je driehoeken afknipt met korte zijden van 4 cm.
a Laat met een berekening zien dat dit klopt.
Neem de lengte x van de korte zijden van de driehoekjes die worden afgeknipt. Er geldt $0 \leq x \leq 7$.
In de tabel zie je de oppervlakte van de lijst voor verschillende waarden van x.

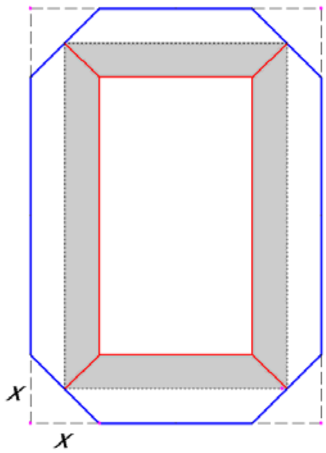
x	4	5	6	7
oppervlakte lijst	88	95	96	91

Je ziet dat de waarde van de oppervlakte eerst toeneemt en dan weer afneemt.
Er zal voor een zekere waarde van x dus een maximale waarde van de oppervlakte van de lijst zijn.
b Stel een formule van de oppervlakte van de lijst op, uitgedrukt in x, en bereken voor welke (exacte) waarde van x deze oppervlakte maximaal is. Hoe groot is dit maximum?

figuur 1



figuur 2



antwoorden:
a $(14-4)(20-4)-(14-8)(20-8) = 160-72 = 88$
[$(14-5)(20-5)-(14-10)(20-10) = 135-40 = 95$, enzovoorts]
b $(14-x)(20-x)-(14-2x)(20-2x) = -3x^2+34x = -3x(x-{}^{34}/_{3})$; heeft max als $x = ½\cdot{}^{34}/_{3} = 5^2/_3$. $L_{max} = 96⅓$.

Misschien is voor leerlingen nieuw dat ze moeten kunnen staartdelen met algebraïsche uitdrukkingen.
Dat moet eventueel eerst aangeleerd worden.
Bijv. door $\frac{x^3-8}{x-2}$ (als voorbeeld te doen), dan oefenen met $\frac{x^3-5x+12}{x+3}$ of $\frac{x^4-3x^2+2}{x-1}$ of $\frac{x^4-3x^2+2}{x+1}$. Zie hieronder.
Dan nog de hoofdstelling van de algebra erbij: als een veelterm 0 wordt als je $x = a$ invult, dan is de veelterm deelbaar door $x - a$.

Staartdeling met veeltermen

Omdat $2^3 - 8 = 0$ is $x^3 - 8$ deelbaar door $x - 2$.

$$\frac{x^3-8}{x-2} = x^2 + 2x + 4$$

Eerste stap

$$\begin{array}{rl} & x-2 \,/\, x^3 - 8 \,\backslash\, x^2 \\ [x^2(x-2) =] & \underline{x^3 - 2x^2 \;\; -} \\ & \qquad 2x^2 - 8 \end{array}$$

Tweede stap

$$\begin{array}{rl} & x-2 \,/\, x^3 - 8 \,\backslash\, x^2 + 2x \\ & \underline{x^3 - 2x^2 \;\; -} \\ [2x(x-2) =] & 2x^2 - 8 \\ & \underline{2x^2 - 4x \;\; -} \\ & \qquad 4x - 8 \end{array}$$

Derde stap

$$\begin{array}{rl} & x-2 \,/\, x^3 - 8 \,\backslash\, x^2 + 2x + 4 \\ & \underline{x^3 - 2x^2 \;\; -} \\ & 2x^2 - 8 \\ & \underline{2x^2 - 4x \;\; -} \\ [4(x-2) =] & \quad 4x - 8 \\ & \quad \underline{4x - 8 \;\; -} \\ & \qquad 0 \end{array}$$

Controle: $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8 = x^3 - 8$

Omdat $(-3)^3 - 5\cdot(-3) + 12 = 0$ is $x^3 - 5x + 12$ deelbaar door $x + 3$.

$$\frac{x^3-5x+12}{x+3} = x^2 - 3x + 4$$

$$\begin{array}{rl} & x+3 \,/\, x^3 - 5x + 12 \,\backslash\, x^2 \\ [x^2(x+3) =] & \underline{x^3 + 3x^2 \qquad\qquad -} \\ & \quad -3x^2 - 5x + 12 \end{array}$$

Tweede stap

$$\begin{array}{rl} & x+3 \,/\, x^3 - 5x + 12 \,\backslash\, x^2 - 3x \\ & \underline{x^3 + 3x^2 \qquad\qquad -} \\ & -3x^2 - 5x + 12 \\ [-3x(x+3) =] & \underline{-3x^2 - 9x \qquad -} \\ & \qquad 4x + 12 \end{array}$$

Derde stap

$$\begin{array}{rl} & x+3 \,/\, x^3 - 5x + 12 \,\backslash\, x^2 - 3x + 4 \\ & \underline{x^3 + 3x^2 \qquad\qquad -} \\ & -3x^2 - 5x + 12 \\ & \underline{-3x^2 - 9x \qquad -} \\ & \qquad 4x + 12 \\ [4(x+3) =] & \underline{4x + 12 \;\; -} \\ & \qquad 0 \end{array}$$

Hoe werkt de hoofdstelling van de algebra?
Waarom is $x^4 - 3x^2 + 2$ deelbaar door $x - 1$? Omdat 1 invullen in $x^4 - 3x^2 + 2$ antwoord $1 - 3 + 2 = 0$ geeft.
Probeer de volgende deling zelf uit te voeren.

$$\frac{x^4-3x^2+2}{x-1} \qquad \text{antwoord} = x^3 + x^2 - 2x - 2$$

Je kunt altijd het antwoord nog controleren met een vermenigvuldiging:
$(x - 1)(x^3 + x^2 - 2x - 2) = \ldots$