2 Variabelen en vergelijkingen: digitale bijlage

Een voorbeeld van zes categorieën standaardvergelijkingen:

En verder:

Een voorbeeld van een categorisering uit de praktijk van een docent met zijn leerlingen en sluit aan bij paragraaf 2.5.4.

Categorie 1: *f*(*A*) = *f*(*B*)
Zoals een 'expertleerling' het formuleerde: ik denk links en rechts dezelfde (laatste) bewerking weg. In gevallen van monotoon stijgende of dalende functies zal dat eenvoudig zijn, zoals bij $3^{2x-6} = 3^{-x+6}$ en $\log(2x) = \log(-x+8)$. Als dat niet het geval is dan moet het oplossingsalgoritme uitgebreid worden, zoals bij $(x+3)^2 = (2x-8)^2$ en $\sin(3x) = \sin(x-\pi)$ en $2x^2 \cdot (3x+8) = 6 \cdot (3x+8)$.

Categorie 1 met oplossingsalgoritmen

	oplossingsalgoritme
a) $g^A = g^B$	$g^A = g^B \to A = B$
$\log(A) = \log(B)$	${}^g\log(A) = {}^g\log(B) \to A = B$
$\sqrt{A} = \sqrt{B}$	$\sqrt{A} = \sqrt{B} \to A = B$
$A^n = B^n$, met n oneven	$A^n = B^n \to A = B$, als n oneven
b) $\sin(A) = \sin(B)$	$\sin(A) = \sin(B) \to A = B + k\cdot 2\pi, A = \pi - B + k \cdot 2\pi$
$A^n = B^n$, met n even	$A^n = B^n \to A = B, A = -B$
c) $A \cdot B^n = C \cdot B^n$	$A = C$ of $B = 0$

Categorie 2: pijlenketting omkeren
De vergelijking kan worden opgelost door een pijlenketting om te keren.
Voorbeelden van vergelijkingen die tot deze categorie behoren zijn:
$3(x-4)^2 = 18$, $4 + 5x^3 = 40$, $\sqrt{2x+6} = 8$ en $\sin(2x) = 0{,}5$. Ook nu speelt het monotone karakter van de functie een belangrijke rol bij het oplossen van de vergelijkingen.

Categorie 2 met oplossingsalgoritmen

	oplossingsalgoritme
$g^A = getal$	$g^A = p \to A = {}^g\log(p)$

${}^{g}\log(A) = getal$ $A^n = getal$ $\sin(A) = getal$ $\sqrt{A} = getal$	${}^{g}\log(A) = p \rightarrow g^p = A$ $A^n = p \rightarrow A = \sqrt[n]{p}$, als n oneven $A^n = p \rightarrow A = \sqrt[n]{p}, A = -\sqrt[n]{p}$, als n even $\sin(A) = p \rightarrow A = \sin^{-1}(p) + k.2\pi, A = \pi - \sin^{-1}(p) + k.2\pi$ $\sqrt{A} = p \rightarrow A = p^2$ en controleren oplossing

Categorie 3: vervangen van een deelexpressie door een nieuwe variabele
De vergelijkingen kunnen vereenvoudigd worden door meerdere dezelfde 'bordjes' te vervangen door een nieuwe variabele. Voorbeelden: $(x-3)^2 - 5(x-3) - 14 = 0$, $(e^x)^2 - 4.e^x - 12 = 0$ en $\dfrac{3.\log(x) - (\log(x))^3}{\log(x)} = 0$.

Categorie 4: *A·B* = 0, dan *A* = 0 of *B* = 0
De vergelijkingen bestaan uit het product van een aantal factoren die gelijk zijn aan 0. Voorbeelden: $4(x-9)(x^2-8)(3x+9) = 0$ en $x^2.(4x-9) = 0$. Bij deze categorie rekenen we ook vergelijkingen die opgelost kunnen worden door een eenvoudige ontbinding in factoren. Voorbeelden: $6x^3 - 4x^2 = 0$ en $x^2 - 2x - 8 = 0$.

Categorie 5: tweedegraads vergelijkingen met de *abc*-formule

Categorie 6: vergelijkingen 'gedomineerd' door breuken, logaritmen, sinus/cosinus en wortels
In deze categorie vallen vergelijkingen die, volgens 'expertleerlingen', gedomineerd worden door breuken, logaritmen, sinus/cosinus en wortels. Deze eye-catchers roepen bij leerlingen direct associaties op met de bijzondere rekenregels die vaak nodig zijn om vergelijkingen op te lossen. Voorbeelden zijn: $\dfrac{2x-7}{5x} = 3$, $\dfrac{2x-6}{x} = \dfrac{3x-8}{x+1}$ ${}^{2}\log(x) + {}^{2}\log(x+4) = {}^{2}\log(4x+8)$, $\sqrt{2x+6} = x-1$, $\sin(2x) = \cos(x)$.

Categorie 6 met oplossingsalgoritmen

Breuken	*oplossingsalgoritme*
$\dfrac{A}{B} = C$	$\dfrac{A}{B} = C \rightarrow A = B.C$
$\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$	$\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \rightarrow A.D = B.C$
Logaritme	
${}^{g}\log(A) + {}^{g}\log(B) = {}^{g}\log(C)$	${}^{g}\log(A) + {}^{g}\log(B) = {}^{g}\log(C) \rightarrow A.B = C$
$n.{}^{g}\log(A) = {}^{g}\log(C)$	$n.{}^{g}\log(A) = {}^{g}\log(C) \rightarrow A^n = C$
${}^{g}\log(A) = {}^{g}\log(B)$	${}^{g}\log(A) = {}^{g}\log(B) \rightarrow A = B$
${}^{g}\log(A) = getal$	${}^{g}\log(A) = p \rightarrow A = g^p$

Sinus	
sin(2*A*) = cos(*A*)	$\sin(A)=\cos(\frac{1}{2}\pi - A)$
(sin(*A*))^2 = cos(*A*)	$(\sin(A))^2 = 1-(\cos(A))^2$
sin(*A*) = cos(*B*)	$\sin(A)=\cos(B) \rightarrow \cos(\frac{1}{2}\pi - A) = \cos(B)$
sin(*A*) = sin(*B*)	$\sin(A)=\sin(B) \rightarrow A = B + k.2\pi, A = \pi - B + k.2\pi$
sin(*A*) = *getal*	$\sin(A) = p \rightarrow A = \sin^{-1}(p) + k\cdot 2\pi, A = \pi - \sin^{-1}(p) + k \cdot 2\pi$
Wortels $\sqrt{A} = B$	$\sqrt{A} = B \rightarrow A = B^2$ en uitkomst controleren

Opdrachten voor de lezer

1. Kijk terug naar de kennisgraaf die je bij dit hoofdstuk 2 hebt gemaakt. Verbeter die en breid die uit op basis van je eigen bevindingen en de inhoud van het hoofdstuk die later aan de orde is gekomen.
   Een expert kan bij symbolen (meerdere) beelden oproepen. Wiskundestudenten geven aan dat zij graag een beeld hebben (krijgen of maken) als zij wiskundige concepten leren. Welke beelden kunnen bij de volgende vergelijkingen van pas komen? Onderzoek welke beelden leerlingen hierbij hebben.
   a. $3 \cdot (x+4) - 2x = -2x$
   b. $(x-3)^2 = 0$
2. Toepassen
   Natuurlijk is het ook van belang om te kijken naar de toepassingen van de typen vergelijkingen waarvoor leerlingen oplossingsschema's ontwikkelen. Je kunt denken aan een aantal toepassingsopdrachten waarin vergelijkingen in authentieke contexten van binnen en buiten de wiskunde aan de orde komen. Deze contexten kunnen afkomstig zijn uit natuurkunde, economie of kunst, maar ook uit meetkundige situaties waarin algebraïsering tot bekende vergelijkingen leidt.
3. Zoek voorbeelden van impliciet gebruik van (reken)regels in de wiskundemethoden.
4. Ontwerp werkbladen bij applets waarmee bepaalde facetten die in het katern genoemd zijn worden geoefend. Neem bijvoorbeeld AlgebraPijlen en/of AlgebraExpressies op www.wisweb.nl.
5. Het idee van categorieën van problemen met een beperkt aantal standaardalgoritmen kan misschien ook voor andere delen van het (algebra)programma gelden. Daarnaast zullen we echter steeds heuristieken nodig hebben om tot een indeling in categorieën te komen (identificatiealgoritmen). Overweeg voor welke delen van het (algebra)programma een zelfde werkwijze mogelijk is.

Websites
http:// www.wisweb.nl, ga naar Applets en dan naar AlgebraPijlen