Bijlage hoofdstuk 46: Praktische Opdracht met parabolen

- **Voorbereidende opdracht** ***de jacht van een cheetah op een zebra*** [1]

De snelste sprinter ter wereld is de cheetah. Hij kan in 17 seconden op een topsnelheid van meer dan 110 km per uur komen en die volhouden over een afstand van ruim 450 meter. De cheetah wordt echter gauw moe, terwijl een zebra die een topsnelheid van 70 km per uur haalt, over ruim 6 km een snelheid van 50 km per uur kan handhaven. Wanneer kan een cheetah een rennende zebra nog inhalen? Van een zebra en van een cheetah die start met sprinten zijn de posities om de 5 seconde gemeten. De afstanden (in meters) tussen die posities staan in de tabel hieronder.

cheetah	76	116	133	134	132	100	55	36
zebra	95	97	96	94	95	94	98	96

De vraag: Bij welke voorsprong van de zebra kan de cheetah de zebra nog inhalen?

Teken deze afstanden in een grafiek waarbij je de achterstand van de cheetah bijv. met 500 m achterstand.
Je ziet dat de grafiek van de cheetah harder stijgt tot ongeveer 20 seconden. Dan is het verschil ongeveer 300 m.
Beredeneer bij welke afstand aan het begin van de jacht de cheetah de zebra nog kan inhalen.
Schrijf je antwoorden netjes in een verslag.

(1) Zie https://webspace.science.uu.nl/~doorm101/bugee opdracht 4.

- **Oefenen met grafieken op de computer**

Je kunt kiezen uit werkblad Geocadabra of werkblad VU-grafiek of zelf een werkblad voor GeGebra maken

werkblad Geocadabra *gratis te downloaden van internet*

Klik op >> Nieuwe tekening >> Platte vlak >> Leeg ruitjesblad OK >> Tik de naam b.v. $\boxed{\text{f1}}$ OK
>> Assenstelsel [Pas de kleur van de assen aan (zwart OK)]; neem x-as van -10 tot 10, idem y-as van -10 tot 10;
vink aan: Getallen op assen (de getallen van de primaire lijnen worden gegeven, met een schuifbalk onder de kleuren kun je de letters en getallen groter en kleiner maken), en vink aan: Toon asnamen OK
Tik nu het voorschrift in van y: a – x Er verschijnt een nieuw schermpje!
Kies voor * variabele x en parameter a OK
Klik nogmaals op
>> Bewerken >> Functies en krommen >> Toevoegen
Tik nu het voorschrift in van y: 2x
Herhaal dit voor de productfunctie y: 2x * (a – x) [* = keer-teken]
Kies voor:
>> Bewerken >> Functies en krommen >> Bewegend onderzoek >> Onderzoek van meervoudige parameter
Nu kun je door op de handjes te klikken de parameter, de letter a, groter of kleiner maken.
Met de bovenste handjes maak je de stapgrootte kleiner of groter (neem 0.1); met de onderste handjes kun je naar een bepaalde grafiek gaan (in dit geval 1 of 3, neem 3)

Wil je een (andere) functie met een parameter onderzoeken, ga met de muis op de grafiek staan; rechtermuisklik; daarna muisklik op grafiek; rechtermuisklik: kies >> Analyse Zoek de top bij a=1, a=2, a=3, a=4;
Maak een tabel met a en de coördinaten van de toppen; teken ze in één figuur in je schrift; geef de formule van de grafiek waarop alle toppen liggen. Verklaar deze formule ook exact.

Antwoord: de toppen liggen op $y = 2x^2$; snptn x-as bij x=0 en x=a, dus top bij x=½a; a=2x invullen geeft y=2x(2x – x)

werkblad VU-grafiek

Start VU-grafiek op je computer. Kies >> Grafieken tekenen

1 a Teken in één figuur de grafieken van
$f(x) = {}^1/_3x^3 + x$ // $f(x) = {}^1/_3x^3 - x$ // $f(x) = {}^1/_3x^3 - 5x$

b Probeer eens uit wat er gebeurt als je de waarden van x laat lopen van x = -10 tot x = 10
en de waarden van y van y = -400 tot y = 400

c Zet x weer terug naar x = -5 tot x = 5 en y naar y = -5 tot y = 5.

2 a Je kunt de grafieken ook vinden met een parameter (variabele) a in de formule.
Neem de (nieuwe) $f(x) = {}^1/_3x^3 + ax$, waarbij je $\boldsymbol{a}$ de waarden 1, -1 en 5 geeft.
Zoek uit hoe dit gaat.

b Spoor met schuiven over de grafieken de coördinaten op van de toppen van de grafiek
als die er zijn, en vul de gevonden coördinaten in 2 decimalen in:
bij a = -5, top: (… , …) en top: (… , …)
bij a = -1, top: (… , …) en top: (… , …)
merk op dat er bij a = 1 geen toppen zijn.

3 a Je kunt ook een rij grafieken laten tekenen door voor a een startwaarde te nemen, en daarna
met b.v. stapgrootte 1 en aantal b.v. 10, tien opeenvolgende grafieken te laten tekenen.
Neem de functie $f(x) = (x^2 + a)\cdot(x - 1)$, met startwaarde a = -9 (deze wordt dan het eerst getekend),
Neem stapgrootte 1, en aantal 10 stappen. Er worden nu 10 grafieken getekend.

b Wijs met je vinger over het scherm aan op welke grafiek de toppen liggen.
In dit geval liggen ze op de grafiek van $f(x) = -2x\cdot(x - \dots)^2$, probeer een getal en laat de grafiek met dat getal
in de figuur erbij tekenen! Zo kun je zien of het getal klopt.
Welk getal op de … geeft een grafiek precies door de toppen?

4 a Neem weer de functie $f(x) = {}^(/_3x^3 + ax$, met a = -5.
Kies nu >> Toenamediagrammen, en laat die tekenen voor h=1, vervolgens voor h=0,1 en tenslotte voor h=0,01.
Welke vorm heeft de rand van het toenamediagram?
Zoek uit waar deze grafiek ongeveer door de x-as gaat. Vul in: door de x-as bij (… , 0) en (… , 0).

b Het toenamediagram met kleine waarden van h wordt ook *hellinggrafiek* genoemd.
We zeggen dan dat bij de gevonden waarden van x de helling (nagenoeg) 0 is.
In welke punten gaat de hellinggrafiek van de functie met a = -1 door de x-as? In (… , 0) en (… , 0).

c Wat zie je aan de hellinggrafiek voor positieve waarden (probeer dit uit) van a?

5 Wat valt je op als je de antwoorden van vraag 2b met die van 4a en 4b vergelijkt?
Kun je dit verklaren?

Later leer je met behulp van *differentiëren* de exacte waarden te vinden van de x-coördinaten van de toppen.

Antwoorden werkblad VU-grafiek:
Toppen op $y = {}^{-2}/_3x^3$
Toppen op $y = -2x(x - 1)^2$

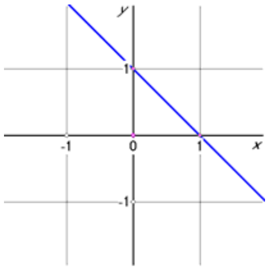
$2x(a - x)$ heeft toppen bij x = ½ a; a=2x invullen geeft $2x(2x - x) = 2x^2$

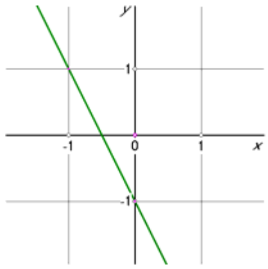
$y = {}^1/_3x^3 - ax$ heeft $y' = x^2 - a = 0$; geeft toppen bij $x^2 = a$; invullen geeft toppen op $y = {}^1/_3x^3 - x^3 = {}^{-2}/_3x^3$

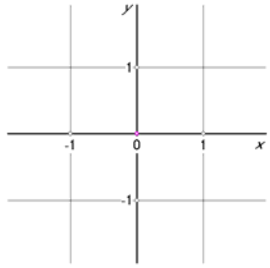
$y = (x^2 + a)(x - 1)$ heeft $y' = 2x(x - 1) + x^2 + a = 0$; geeft toppen bij $a = 2x - 3x^2$; invullen geeft toppen op
$y = (x^2 + 2x - 3x^2)(x - 1) = (-2x^2 + 2x)(x - 1) = -2x(x - 1)(x - 1) = -2x(x - 1)^2$

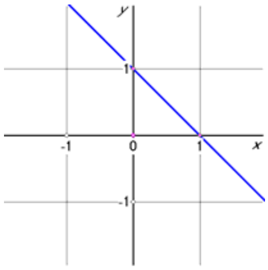
Praktische opdracht parabolen ***vijf beeldverhalen***

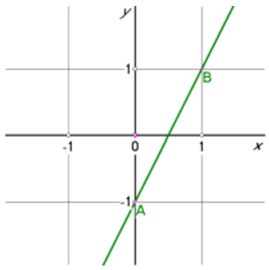
Neem de tekeningen over in je schrift; geef van alle drie de grafieken een formule

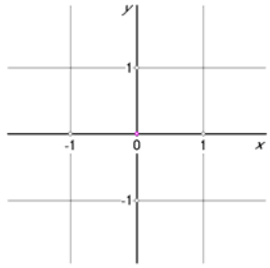

formule: y_1 =

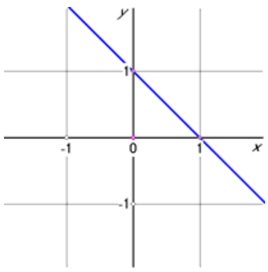

formule: y_2 =

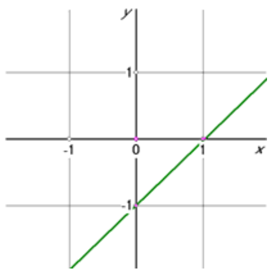

formule: y_3 = $y_1 \times y_2$ =

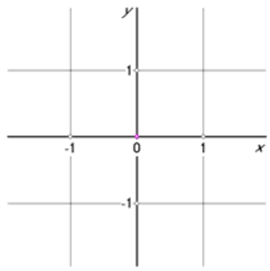

formule: y_1 =

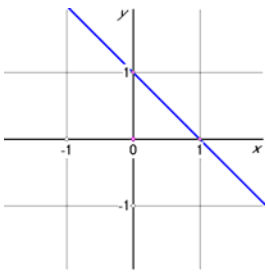

formule: y_2 =

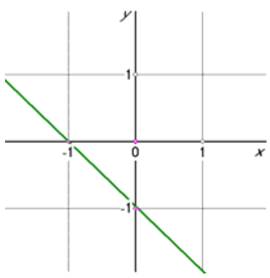

formule: y_3 = $y_1 \times y_2$ =

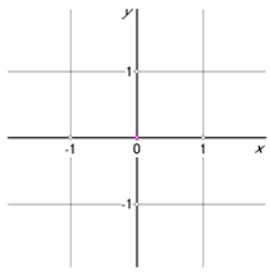

formule: y_1 =

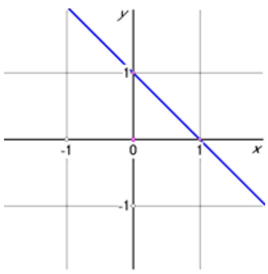

formule: y_2 =

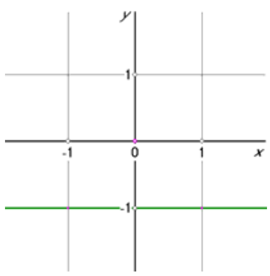

formule: y_3 = $y_1 \times y_2$ =

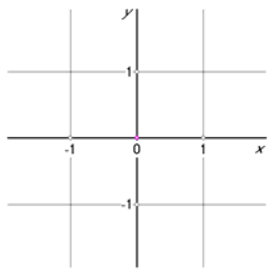

formule: y_1 =


formule: y_2 =


formule: y_3 = $y_1 \times y_2$ =


formule: y_1 =


formule: y_2 =


formule: y_3 = $y_1 \times y_2$ =

4 vwo Praktische opdracht Parabolen

Instructieblad

0 Heb je de voorbereidende opdrachten over de jacht van de cheeta op de zebra uitgevoerd en laten controleren? (laten aftekenen bij de docent) ☐
Dan kun je starten met deze PO

1 Voer de opdrachten van het werkblad VU-grafiek uit.
Heb je die laten controleren? (laten aftekenen bij de docent) ☐

optioneel

2 Voer de opdrachten van het werkblad Geocadabra uit.
Heb je die laten controleren? (laten aftekenen bij de docent) ☐

3 Voer de opdrachten Vijf beeldverhalen m.b.v de GR uit.
Heb je die laten controleren? (laten aftekenen bij de docent) ☐

4 Voer de eindopdracht uit die speciaal voor jullie is geselecteerd.

Bij de eindopdracht:

- Houd in je schrift een logboek bij! Vermeld telkens datum // aantal minuten // wat je gedaan hebt

- Neem bij de keuze van de parameter(s) a (b, c, d) allerlei waarden:
  positieve, negatieve gehele getallen maar ook breuken (evt. in decimalen)

Vanaf opdracht 5

- Let bij de vorm van de grafieken op toppen en asymptoten.
  Geef zo mogelijk (voor bonuspunten) formules uitgedrukt in a.

- Kijk bij de grafieken naar snijpunten met de x-as. Met welke berekeningen kun je die exact vinden?
  Druk de x-coördinaten zo mogelijk uit in a.

- Probeer m.b.v. getallen in een tabel de coördinaten van de toppen uit te drukken in a.

- Lukt het je om bij de grafiek van de hellingfunctie een formule te vinden?
  Daarmee kun je de exacte waarden van de x-coördinaten van de toppen vinden.

- Zoek een formule voor de grafiek waarop de toppen liggen! Dit is het eind van de opdracht.

Beoordeling:

Maak een schriftelijk verslag van je onderzoek.
De punten voor je cijfer worden als volgt verdeeld:

* indeling / lay-out / leesbaarheid		2 punten
* beschrijving van het probleem dat je hebt onderzocht		½ punt
* hoe je de programma's uit de voorbereidende delen hebt gebruikt		1 punt
* gebruik van overzichtelijke tabellen / verduidelijkende grafieken		2 punten
* wiskundige berekeningen / theorie van grafieken / formules		2 punten
* originele / speciale onderdelen in je onderzoek		1 punt
* de conclusies van je onderzoek		½ punt
* wat je ervan geleerd hebt	(ieder voor zichzelf)	½ punt
* wat je van dit onderzoek vond	(ieder voor zich)	½ punt

Vijf beeldverhalen met behulp van de GR (de TI)

1. Familie van functies *kromme door de toppen*

Door getallen tussen { en } te zetten kun je meer grafieken achter elkaar laten tekenen.
Stel je WINDOW in op Xmin = -10, Xmax = 10, Ymin = -7, Ymax = 7; ga naar Y=

a Tik achter \Y1 = {4,3,2,1,0,-1,-2} X en GRAPH
Het lijkt op het eerste gezicht of er maar zes (en geen zeven) lijnen worden getekend. Hoe komt dat?

b Tik achter \Y1 = {4,3,2,1,0,-1,-2} – X en GRAPH // gebruik 2nd INS(ERT) om tekens in te voegen
(in dit geval het – - teken tussen } en X) , dan hoef je niet alles opnieuw in te tikken
Waarom lopen alle grafieken evenwijdig?

c Tik achter \Y1 = X × ({4,3,2,1,0,-1,-2} – X) en GRAPH
Van welke zes parabolen heb je nu de grafiek laten tekenen? Schrijf van elke parabool de formule op.
Schrijf de formules met en zonder haakjes.

d Maak een tabel met daarin in de 1^e kolom de waarden van de parameter van 4 t/m -2, daarachter de formules en daarachter de coördinaten van de top. Zoek de coördinaten van de top op de GR en door ze exact te berekenen zoals je dat geleerd hebt bij parabolen.

e Als je goed naar de tabel kijkt kun je een formule maken die y_{top} uitdrukt in x_{top}. Welke formule klopt, denk je?

2. Productfuncties *handigheidjes met de GR*

Door op VARS ▸ Y-VARS 1: Function ENTER 1: Y1 of 2: Y2 of een andere Y. (welke je wilt) te tikken kun je eerder gemaakte formules gebruiken zonder ze helemaal opnieuw te hoeven intikken.

a Neem \Y1 = X + 3 en \Y2 = X – 3 en \Y3 = Y1 × Y2 en GRAPH
Probeer met een 2^e-graads functie in \Y4 = … dezelfde parabool te krijgen als die je bij \Y3 ziet.
Ga met de cursor bij \Y4 helemaal naar links zodat \ knippert. Druk dan 5 keer op ENTER. Telkens verschijnt een ander tekentje dat knippert. Als je een -o ziet knipperen dan tekent de GR straks de grafiek van Y4 als -o over het scherm. Als je GR dan precies dezelfde grafiek zou moeten tekenen als die er al staat dan zie je normaal gesproken niets, de grafiek staat er al, maar nu zie je dan het bolletje over de al getekende grafiek schuiven. Dan zijn ze dus hetzelfde.
Noem de x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek van Y1 met de x-as $x1$, en die van Y2 met de x-as $x2$.
Noem de x-coördinaten van de snijpunten van de grafiek van Y3 met de x-as $x3$ (linker snijpunt) en $x4$.

b Maak een tabel met de kolommen Y1 Y2 Y3 $x1$ $x2$ $x3$ $x4$ (x_{top}, y_{top}) en meerdere rijen.

Y1	Y2	Y3	$x1$	$x2$	$x3$	$x4$	(x_{top}, y_{top})
…	…	…	…	…	…	…	(… , …)

Vul de eerste rij nu in met de getallen die bij Y1, Y2 en Y3 uit vraag a horen.

c Neem nu \Y1 = X + 2 , \Y2 = X – 2 en \Y3 = Y1 × Y2 en GRAPH
Probeer ook nu een 2^e-graads formule te vinden voor \Y4 = … die met -o dezelfde grafiek heeft als die van Y3.

d Doe hetzelfde met \Y1 = X + 1 en \Y2 = X – 1, en ook met \Y1 = 2X+1 en \Y2 = 2X – 1

e Als je goed naar de tabel kijkt dan valt je iets op bij de x-coördinaten in elke rij in de tabel. Kun je dit verklaren?

3. Vijf beeldverhalen

Zie de vijf beeldverhalen en pagina's hiervoor. Maak ze af. Bedenk bij elk verhaal het volgende:

a Welke formules behoren bij Y1 en Y2? Schrijf ze in de figuur erbij.

b Zet van de grafieken van Y1 en Y2 de coördinaten van het snijpunt met de x-as in de tabel.

c Y3 = Y1 × Y2; schrijf de formule van Y3 mét en zonder haakjes op.

d Welke coördinaten hebben de snijpunten met de x-as en de top van de grafiek van Y3?

e Teken van elk tweetal Y1 en Y2 in het derde assenstelsel van de rij de grafiek van Y3.
Let daarbij op de exacte plaatsen van de snijpunten met de x-as en de top.

f Bereken van elke parabool de exacte waarden van de top.

g Bereken bij elk beeldverhaal het getal dat het gemiddelde is van de x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken van Y1 en Y2 met de x-as. Schrijf in de tabel ook het product op van de bijbehorende y-coördinaten.

verhaal	Y1	snijpunt met x-as	Y2	snijpunt met x-as	Y3 met ( )	zonder ( )	snijpunt Y3 met x-as links	rechts	Y3 top	gemiddelde x en Y1 × Y2	

h Als je goed naar de tabel kijkt vallen je verschillende zaken op. Welke? Verklaar dit ook m.b.v. de formules.

i Wanneer is het **niet juist** dat lijn × lijn = parabool?

j Wanneer is er sprake van een bergparabool, wanneer van een dalparabool?

Vul in: dalende lijn × dalende lijn = … - parabool
dalende lijn × stijgende lijn = … - parabool

Verzin zelf nog twee van dit soort uitspraken:
. . . .
. . . .

4. Toppen zoeken met nDeriv op de GR

Zie Helpdesk Knoppencursus TI 83 bij 3_5_3 hoe je met \Y2 = nDeriv (Y1,X,X, 0.001) hellinggrafieken kunt tekenen.

a Zoek de x-coördinaten van de toppen van de grafiek van \Y1 = $-{}^{1}/_{3}x^3 + 2x^2$ (op een bij jou bekende manier).
[2nd CALC 4: maximum en 2nd CALC 3: minimum]

b Teken op de GR m.b.v nDeriv de hellinggrafiek Y2 van Y1 en bespreek hoe je in de grafiek van Y2 de x-coördinaten van de toppen van de grafiek van Y1 kunt vinden.