8 Modelleren: digitale bijlage

Ideeën voor modelleeropdrachten

Deze digitale bijlage sluit aan bij paragraaf 8.5.2.

Afstand houden

Op een weg is niet lang geleden steenslag aangebracht die nog niet in het asfalt eronder is vast gereden. De vraag is: hoever moet je bij een bepaalde snelheid achter je voorganger blijven om te voorkomen dat je een steen tegen je auto krijgt?

Opmerking
Uiteraard moeten er bij deze opdracht allerlei gegevens verzameld worden.

Hoeveelheid verf voor een nieuw te spuiten auto

Kinderen van 10 tot 12 moesten bepalen hoeveel verf er nodig is om een nieuw ontworpen auto te spuiten. De enige gegevens waarover de kinderen beschikten was een soort van ontwerptekening met afmetingen van de auto en de dikte van aan te brengen verflagen. Bij het begin van het conceptualiseren waren ze het er snel over eens dat het gaat om de te spuiten oppervlakte. Het vervolg van de conceptualisering was veel moeilijker: hoe bepaal je die?

Opmerking
De kinderen werkten in groepjes verschillende aanpakken uit. Een van de groepjes besloot de oppervlakte te benaderen met rechthoeken en driehoeken, waarvan het vervolgens de oppervlakte berekende, die samenvoegde en na vermenigvuldiging met de laagdikte de hoeveelheid verf bij benadering vaststelde. Het aardige hierbij was dat bij navraag bij de autofabrikant bleek dat die een computerprogramma gebruikt dat op een zelfde aanpak, opdelen in rechthoeken en driehoeken, is gebaseerd.

Remweg bij een ongeluk

Graham (1994) beschrijft hoe zijn eerstejaars studenten met het volgende probleem omgingen, zonder dat hun eerst de modelleercyclus was uitgelegd. Het probleem was afkomstig van een advocaat die de belangen van autobestuurder behartigde die op een kruispunt buiten de bebouwde kom door een motor omlaag komend van een helling was aangereden: had de motorrijder te hard gereden bij een remspoor van 2,10 m?

Opmerking
De studenten brainstormden over mogelijke relevante factoren en maakten vervolgens een aantal aannames. Cruciaal in het vervolg was de wrijvingscoëfficiënt tussen banden en weg. Na raadpleging van een aantal bronnen besloten ze tot een compromis van 0,8. De eerste aanname was dat er geen helling was en dat de snelheid waarmee de motor tegen de auto aankwam 0 m/s was. De snelheid op moment van remmen bleek 19,4 m/s = 69,9 km/u. In een verbeterde versie van het model handhaafden ze de eerste aanname en veronderstelden dat de motor met een lage snelheid tegen de auto gebotst was, namelijk 32 km/u = 8,9 m/s. De snelheid op moment van remmen bleek nauwelijks groter, namelijk 21,3 m/s = 76,7 km/u. Tenslotte lieten ze ook de

eerste aanname vallen en veronderstelde dat de helling 5^o was. Nu vonden ze bij een botsingssnelheid van dezelfde 32 km/u voor de snelheid op moment van remmen 72 km/u = 20,0 m/s. Alles leek zich dus binnen de ter plaatse voorgeschreven maximumsnelheid te hebben afgespeeld. Uiteindelijk kwam de rechter er niet aan te pas, want de verzekeringsmaatschappijen besloten de schades te delen. Pas nadat het probleem was opgelost zoals beschreven, werd de modelleercyclus gepresenteerd en de verschillende activiteiten van de studenten in de cyclus geplaatst.

Gewichtheffen

Bij gewichtheffen komen twee onderdelen voor: trekken en stoten. Bij stoten gaat het erom het gewicht eerst tot borsthoogte op te tillen en het vervolgens omhoog te drukken. Bij trekken moet dat in een keer gebeuren. De gewichtheffers zijn in verschillende gewichtsklassen ingedeeld. Hieronder staan een aantal tabellen met informatie: tabel 1 met wereldrecords (uit die tijd) en tabel 2 met de winnende prestaties op de Olympische Spelen van 1976 van Montreal.

Tabel 1 Wereldrecord gewichtheffen tot en met 31 juli 1977 voor trekken; ook het maximumgewicht van de gewichtsklassen is vermeld

gewichtsklasse	*maximum-gewicht* (kg)	*prestatie* (kg)	*naam en land*	*datum*
Vlieggewicht	52	109	A. Voronin (USSR)	18-03-1977
Bantamgewicht	56	120,5	K. Miki (Japan)	25-10-1976
Vedergewicht	60	130	G. Todorov (Bulgarije)	25-05-1976
Lichtgewicht	67,5	141,5	A. Aibazian (USSR)	15-07-1977
Middelgewicht	75	157,5	Y. Vardanyan (USSR)	07-05-1977
Lichtzwaargewicht	82,5	170	B. Blagoyev (Bulgarije)	25-05-1976
Middelzwaargewicht	90	180	D. Rigert (USSR)	14-05-1976
Zwaargewicht	110	185	V. Khristov (Bulgarije)	10-04-1976
Superzwaargewicht	> 110	200	K. Planchkov (Bulgarije)	25-05-1976

Tabel 2 Winnende prestaties trekken bij de Olympische Spelen van 1976 te Montreal

Gewichtsklasse	*Prestatie* (kg)

Vlieggewicht	105
Bantamgewicht	117,5
Vedergewicht	125
Lichtgewicht	135
Middelgewicht	145
Lichtzwaargewicht	162,5
Middelzwaargewicht	170
Zwaargewicht	175

In de praktijk, bijvoorbeeld bij studentenspelen, zijn er niet in alle gewichtsklassen voldoende deelnemers om per gewichtsklasse een winnaar aan te wijzen. Hoe kunnen we nu tot een winnaar komen waarbij de invloed van het lichaamsgewicht op de prestatie als het ware geneutraliseerd wordt? Anders geformuleerd: hoe moet de gemeten prestatie, zeg L_m, gecorrigeerd worden met het lichaamsgewicht B? Om deze vraag wat concreter te maken: wie wijzen we aan als de overall winnaar over de acht gewichtsklassen bij de Olympische Spelen van 1976?

Mogelijke uitwerking van het gewichthefferprobleem
Hieronder volgt een mogelijke aanpak. Neem hiervan pas kennis nadat je zelf een oplossing hebt bedacht en uitgeprobeerd. Bij de hier te geven beschrijving worden vanwege de overzichtelijkheid allerlei op zich relevante overwegingen weggelaten. De kern van de aanpak komt op het volgende neer. Eerst wordt een verband tussen het lichaamsgewicht en de prestatie bepaald. Vervolgens wordt dit verband zo aangepast dat er gecorrigeerd wordt voor het lichaamsgewicht en de resultaten over de gewichtsklassen heen vergelijkbaar worden.

Het verband tussen L en B: conceptualiseren en mathematiseren
Neem aan dat het lichaamsgewicht van de beste presteerder van een gewichtsklasse het grootse maximumgewicht van die klasse is en dat de wereldrecordhouders dat maximale lichaamsgewicht hebben. Neem verder aan dat er, idealiter, een eenduidig verband bestaat tussen de prestatie L en het lichaamsgewicht B: $L = f(B)$ (de letters L en B zijn aan het Engels ontleend, namelijk L voor het *liftweight* en B voor *bodyweight*; het is overigens sterk aan te raden letters te kiezen die iets over de betekenis in de praktijksituatie zegt). Zet, om een indruk van het verband te krijgen, de gegevens van tabel 1 grafisch uit. We baseren het ‘ideale’ verband tussen B en L dus op de ‘historische’ gegevens van de wereldrecords uit die tijd. De functie f is natuurlijk stijgend. We gaan er in eerste instantie van uit dat er geen (biologische) kennis is om een daarop gebaseerd vermoeden voor f te kiezen. Afgezien van het punt (110, 185) liggen de punten bij benadering op een rechte lijn. Dat punt (110, 185) zal dus wel een uitbijter. We proberen voor f dus een lineaire functie.

Met andere woorden:

$f(B) = a + bB$

Correctie voor het lichaamsgewicht
Op grond van dit model corrigeren we de gemeten prestatie L_m met een term om tot de voor lichaamsgewicht gecorrigeerde prestatie L' te komen:

$$L' = L_m - bB$$

Uiteraard kan aan de formule voor L' een additieve constante worden toegevoegd, die echter niet van invloed is op de bijbehorende volgorde.

Als we het heel mooi zouden doen, dan normeren we beide formules (door wel een additieve constante toe te voegen) zodanig dat bijvoorbeeld voor een gewichtheffer van 75 kg de gemeten en de gecorrigeerde prestatie gelijk zijn: $L' = L_m$. Dit leidt tot de volgende aangepaste formule:

$$L'' = L_m - b(B - 75)$$

Een tweede benadering: valideren
We vinden om twee redenen de aanpak met een lineaire functie f niet goed: we gebruiken geen biologische kennis over het verband tussen L en B en we hebben een meting (110, 85) weggelaten. Uit de biologie weten we dat spierkracht evenredig is met de oppervlakte van de doorsnede van een spier. Als we verder aannemen dat iemands gewicht evenredig is met zijn inhoud en de inhoud benaderen met de derde macht van zijn lengte, dus $L = B^b$ met b (ongeveer) gelijk aan 2/3. We vinden dan voor de correctie van de gemeten prestatie

$$L' = L_m/B^b$$

respectievelijk met positieve, multiplicatieve factor

$$L'' = L_m(75/B)^b$$

Met behulp van de gegevens kan b nu geschat worden.