Getallen, 2e druk, extra opgaven

Frans Keune

november 2010

De tweede druk bevat 74 nieuwe opgaven. De nummering van de opgaven van de eerste druk is in de tweede druk dezelfde: nieuwe opgaven staan in ieder hoofdstuk aan het eind van de lijst van opgaven.

2 De natuurlijke getallen

12. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $2^{n+1} \geq n^2 + n + 2$.

3 Tellen

16. Laten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ aftelbare verzamelingen zijn met bijecties $f_0 \colon \mathbb{N} \to A_0$, $f_1 \colon \mathbb{N} \to A_1$, $f_2 \colon \mathbb{N} \to A_2$, ...
    (i) Toon aan dat de afbeelding
    $$F \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (n, m) \mapsto f_n(m)$$
    surjectief is.
    (ii) De verzameling $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ is dus aftelbaar. Waarom?
    (iii) Laat zien dat de afbeelding F uit onderdeel (i) bijectief is dan en slechts dan als $A_i \cap A_j = \emptyset$ voor $i \neq j$.

4 Iteratie

10. We definiëren de natuurlijke getallen $n?$ voor $n \in \mathbb{N}$ door:
    $$\begin{cases} 0? = 1, \\ (n+1)? = (2n+1) \cdot n? \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
    Bewijs dat $2^n \cdot n! \cdot (n+1)? = (2n+1)!$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

11. De transformatie g van $\mathbb{N}^2$ is gedefinieerd door

$$g(a,b) = (2b+1, 3a+2) \qquad \text{(voor alle } a, b \in \mathbb{N}).$$

(i) Is g injectief? Is g surjectief?
(ii) Toon aan dat $g^{2n}(0,0) = (6^n - 1, 6^n - 1)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

12. De transformatie τ van $\mathbb{N}$ is gedefinieerd door

$$\tau(n) = \begin{cases} n-1 & \text{als } n \geq 1, \\ 0 & \text{als } n = 0. \end{cases}$$

(i) Toon aan dat $\tau\sigma = 1_{\mathbb{N}}$ en $\sigma\tau \neq 1_{\mathbb{N}}$. (Hierbij is $\sigma(n)$ de opvolger van n.)
(ii) Geef een transformatie τ' van $\mathbb{N}$ met $\tau'\sigma = 1_{\mathbb{N}}$ en $\tau' \neq \tau$.
(iii) Bewijs dat $\tau^k\sigma^k = 1_{\mathbb{N}}$ voor alle $k \in \mathbb{N}$.
(iv) Bewijs dat er bij iedere $n \in \mathbb{N}$ een $k \in \mathbb{N}$ is zo dat $\sigma^k\tau^k(n) \neq n$.

13. Laat f_n het n-de Fibonaccigetal zijn. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$\sum_{k=0}^{n} {f_k}^2 = f_n f_{n+1}.$$

14. Laat $f_0, f_1, \ldots$ de rij van Fibonaccigetallen zijn.
(i) Bewijs dat voor alle $n, k \in \mathbb{N}$ met $n \geq k$ geldt

$$f_{n+1} = f_{k+1}f_{n+1-k} + f_k f_{n-k}.$$

(ii) Bewijs dat voor alle $m \in \mathbb{N}$ geldt $f_{2m+1} = f_{m+1}^2 + f_m^2$.

15. De transformatie $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ is gedefinieerd door

$$f = \begin{cases} n+2 & \text{als } n \text{ niet deelbaar door 3} \\ \frac{n}{3} & \text{als } n \text{ deelbaar door 3.} \end{cases}$$

(i) Bewijs dat voor iedere $n \in \mathbb{N}^*$ er een $k \in \mathbb{N}$ is zo dat $f^k(n) \leq 2$.
(ii) Is er een $k \in \mathbb{N}$ zo dat $f^k(n) \leq 2$ voor iedere $n \in \mathbb{N}^*$?

5 De gehele getallen

16. Zij X een eindige niet-lege verzameling. Voor $A, B \in \mathcal{P}(X)$ definiëren we

$$A \sim B \iff \#(A \div B) \text{ is even.}$$

(i) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie in $\mathcal{P}(X)$ is.
(ii) Hoeveel equivalentieklassen zijn er?

17. Zij $(A, \preceq)$ een geordende verzameling. Gegeven is de afbeelding

$$f\colon A \to \mathcal{P}(A), \quad a \mapsto \{\, x \in A \mid x \preceq a \,\}.$$

(i) Bewijs dat f injectief is.
(ii) Bewijs dat f niet surjectief is.

18. Zij A een verzameling en zij B een deelverzameling van A. In $\mathcal{P}(A)$, de machtsverzameling van A, is de relatie $\doteq$ gedefinieerd door

$$U \doteq V \iff U \cup B = V \cup B \quad \text{(voor alle } U, V \subseteq A\text{)}.$$

(i) Laat zien dat $\doteq$ een equivalentierelatie is.
(ii) Zij $U \subseteq A$. Laat gegeven zijn dat B niet leeg is. Toon aan dat de equivalentieklasse van U meer dan één element heeft.
(iii) Bewijs dat

$$\{\, U \in \mathcal{P}(A) \mid U \supseteq B \,\}$$

een representantensysteem van $\mathcal{P}(A)/\doteq$ is.

6 Talstelsels

17. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot k^2 = (-1)^n \cdot \sum_{k=0}^{n} k.$$

18. Laat $a_0, a_1, a_2, \ldots$ een rij van gehele getallen zijn. De somrij (s_n) van deze rij is gegeven door $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. Gegeven is dat

$$s_1 = 1 \quad \text{en} \quad s_{100} = 100.$$

(i) Bewijs dat er een $m \in \mathbb{N}$ is zo dat s_m oneven en s_{m+1} even is.
(ii) Bewijs dat er een $k \in \mathbb{N}$ is zo dat a_k oneven en a_{k+1} even is.

7 De rationale getallen

19. We bepalen rechthoeken met geheeltallige breedte x en geheeltallige lengte y waarvoor de omtrek gelijk is aan de oppervlakte:

$$2x + 2y = xy.$$

(i) Zeker één van de twee getallen x en y is even. Waarom? Laten we aannemen dat y even is: $y = 2z$ met $z \in \mathbb{N}^*$. Vereenvoudig de vergelijking tot

$$x(z - 1) = 2z.$$

(ii) Toon aan dat $z-1 \mid 2$. Gebruik dit voor het bepalen van alle oplossingen.

20. Zij d de grootste gemene deler van de gehele getallen a en b.
    (i) Laten de gehele getallen u en v voldoen aan $ua+vb=d$. Bepaal gehele getallen x en y (afhankelijk van a,b,u,v) zo dat $xa^2+yb=d^2$.
    (ii) Leid uit het vorige onderdeel af dat $\text{ggd}(a^2,b) \mid d^2$.

21. (i) Bepaal $\text{ggd}(2^{120}-1, 2^{75}-1)$.
    (ii) Bepaal $\text{ggd}(2^{1120}-2^{1000}, 2^{175}-2^{100})$.

22. (i) Bepaal alle $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ waarvoor geldt

$$\frac{x}{8}+\frac{y}{125}=\frac{1}{1000}.$$

    (ii) Toon aan dat voor al deze paren (x,y) geldt $\text{ggd}(x,y)=1$.

23. Welke van de rationale getallen

$$\langle 4,1,2,7,3,8,2\rangle, \quad \langle 4,1,2,7,3,8,3\rangle \quad \text{en} \quad \langle 4,1,2,7,3,8,2,3\rangle$$

is het grootst? Welke het kleinst?

24. (i) Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$\text{ggd}(2^{n+2}-1, 2^n-1) \mid 3.$$

    (ii) Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$\text{ggd}(2^{n+2}-1, 2^n-1) = 3 \iff n \text{ is even.}$$

25. De relatie $\equiv$ in $\mathbb{Q}$ is gedefinieerd door

$$r \equiv s \iff r-s \in \mathbb{Z} \qquad \text{(voor alle } r,s \in \mathbb{Q}\text{)}.$$

    (i) Toon aan dat $\equiv$ een equivalentierelatie is.
    (ii) Beschrijf de equivalentieklasse $[\frac{1}{2}]_{\equiv}$.
    (iii) Geef een representantensysteem van de partitie $\mathbb{Q}/\equiv$.
    (iv) Laat zien dat onder de afbeelding $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\equiv, r \mapsto [2r]_{\equiv}$ elementen hetzelfde beeld hebben als ze tot dezelfde equivalentieklasse behoren.

26. De rij $d_0, d_1, d_2, \ldots$ is gegeven door

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_1 = 1 \\ d_{n+2} = \frac{d_n d_{n+1}}{d_n + d_{n+1}} \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Vind een verband tussen de getallen d_n en de Fibonaccigetallen.

8 De hoofdstelling van de rekenkunde

19. (i) Zij $n \in \mathbb{Z}$. Bepaal (afhankelijk van n)

$$\mathrm{ggd}(n^2+n, 41) \quad \text{en} \quad \mathrm{ggd}(41n^2, n+1).$$

(ii) Toon aan dat er oneindig veel $n \in \mathbb{N}$ zijn waarvoor geen van de getallen

$$n, \quad n^2+n+41 \quad \text{en} \quad 41n^2+n+1$$

een priemgetal is.

20. (i) Voor $x, y \in \mathbb{N}^*$ met $\mathrm{ggd}(x, y) = 1$ geldt dat $4xy$ een kwadraat van een natuurlijk getal is. Toon aan dat x en y beide een kwadraat van een natuurlijk getal zijn.

(ii) Voor $x, y \in \mathbb{N}^*$ met $\mathrm{ggd}(x, y) = 1$ geldt dat $2xy$ een kwadraat van een natuurlijk getal is. Toon aan dat precies één van de getallen x en y een kwadraat van een natuurlijk getal is.

21. (i) De rekenkundige functie f is gedefinieerd door $f(n) = \mu(n)n$. Toon aan dat f multiplicatief is.

(ii) Laat zien dat f uit onderdeel (i) voldoet aan $f * \mathrm{id} = \mathbf{1}$.

22. Een rekenkundige functie $g\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ heet inverteerbaar als er een $h\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ bestaat met $g * h = \mathbf{1}$. Bewijs:

$$g \text{ is inverteerbaar} \iff g(1) \neq 0.$$

23. Een ander bewijs van Stelling 8.17. Laat (x, y, z) een primitief Pythagoreïsch drietal zijn met y even. Zij $d = \mathrm{ggd}(x+z, y)$, $u = \frac{x+z}{d}$ en $v = \frac{y}{d}$.

(i) Toon aan dat $\frac{2uv}{u^2+v^2} = \frac{y}{z}$ en $\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2} = \frac{x}{z}$.

(ii) Laat zien dat $\mathrm{ggd}(u, v) = 1$ en dat uit $\frac{2uv}{u^2+v^2} = \frac{y}{z}$ volgt dat u en v niet beide oneven zijn.

(iii) Bewijs dat $\mathrm{ggd}(u^2-v^2, u^2+v^2) = 1$.

(iv) Toon aan dat $x = u^2-v^2$, $z = u^2+v^2$ en $y = 2uv$.

24. Het natuurlijke getal a is oneven en $\frac{a^2-1}{8}$ is een priemgetal. Bepaal a.

25. (i) Toon aan dat er geen geheel getal x is zodat $(x^2-18)x = 9$.

(ii) Toon aan dat er geen rationaal getal x is zodat $x^3 = 18x+9$.

26. Van een natuurlijk getal N is gegeven dat het in de tientallige schrijfwijze op een 3 eindigt. Toon aan dat er geen natuurlijke getallen c en n zijn zodat

$$\frac{1}{N} = \frac{c}{10^n}.$$

27. (i) Bewijs dat er voor alle $n \in \mathbb{N}^*$ een $k \in \mathbb{N}$ is zo dat $\varphi^k(n) = 1$.

(ii) Bewijs dat er voor alle $k \in \mathbb{N}$ een $n \in \mathbb{N}^*$ is zo dat $\varphi^k(n) \neq 1$.

9 Combinaties

21. Zij $n \in \mathbb{N}^*$. Gegeven zijn de getallen

$$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \quad \text{en} \quad B = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

Bepaal A en B. (Aanwijzing: bepaal eerst $A + B$ en $A - B$.)

22. Zij $n \in \mathbb{N}^*$. Bewijs dat

$$\sum_{I \in \mathcal{P}(\underline{n})} \#(\mathcal{P}(I)) = 3^n.$$

10 Permutaties

10. Zij σ een permutatie van $A = \underline{15}$ met $\sigma^5 = 1_A$ en $\sigma(i) \neq i$ voor alle $i \in A$.
    (i) Toon aan dat σ een product van drie disjuncte 5-cykels is.
    (ii) Bepaal het teken van σ.
    (iii) Toon aan dat er verwisselingen τ_1 en τ_2 zijn zodat $\tau_2\tau_1\sigma$ een 15-cykel is.
11. Zij $n \in \mathbb{N}^*$. Hoeveel permutaties van $\underline{n}$ hebben precies één baan?
12. Laten σ en τ permutaties zijn van een eindige verzameling A. Laat zien dat het aantal banen van σ in A gelijk is aan het aantal banen van $\tau\sigma\tau^{-1}$.
13. Laten σ en τ permutaties zijn van een eindige verzameling A. Laat zien dat $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ een even permutatie is.
14. Gegeven zijn de verzamelingen $V_1 = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, $V_2 = \{101, 102, 103, \ldots, 200\}$ en $V = V_1 \cup V_2$. Laat σ een permutatie van V zijn. Toon aan dat

$$\#\{\, i \in V_1 \mid \sigma(i) \in V_2 \,\} = \#\{\, j \in V_2 \mid \sigma(j) \in V_1 \,\}.$$

15. Hoeveel permutaties σ van $\underline{100}$ zijn er met $\sigma(a)$ een even natuurlijk getal voor alle $a \leq 50$?
16. De getallen in $\mathbb{N}_{1000000}$ noteren we met 6 cijfers door zonodig aan te vullen met nullen. Het zijn dus de getallen 000000, 000001, 000002 t/m 999999. De permutatie σ van $\mathbb{N}_{1000000}$ beeldt een getal af op het getal dat in deze notatie wordt verkregen door de cijfers 1 plaats naar rechts op te schuiven en het laatste cijfer vooraan te zetten, dus bijvoorbeeld $\sigma(123456) = 612345$ en $\sigma(000562) = 200056$.
    (i) Beschrijf de baan van σ die het element 264264 bevat.
    (ii) Toon aan dat de banen van deze permutatie uit 1, 2, 3 of 6 elementen bestaan. Geef voor elk aantal een voorbeeld van zo'n baan.
    (iii) Hoeveel banen van σ hebben 6 elementen?
    (iv) Bepaal het teken van deze permutatie.

17. Laten σ en τ permutaties zijn van een eindige verzameling.
    (i) Bewijs dat σ en $\tau\sigma\tau^{-1}$ evenveel banen hebben.
    (ii) Bewijs dat $\sigma\tau$ en $\tau\sigma$ evenveel banen hebben.

18. Is de schuifpuzzel met de hiernaast afgebeelde beginstand oplosbaar?

13	2	7	11
15	1		3
8	6	4	12
5	14	10	9

11 Modulorekenen

19. (i) Bepaal de rest van $5^{72727272}$ bij deling door 72.
    (ii) Bepaal de rest van $2^{72727272}$ bij deling door 72.

20. Laten p en q verschillende oneven priemgetallen zijn. Bewijs dat $2^{\frac{(p-1)(q-1)}{2}} \equiv 1 \pmod{pq}$.

21. (i) Toon aan dat $2^{5^{36}} \equiv 2 \pmod{109}$.
    (ii) Bepaal de rest van $2^{6^{36}}$ bij deling door 109.

22. Laten p en q verschillende priemgetallen zijn. Bewijs dat

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}.$$

23. Zij p een priemgetal en zij $k \in \mathbb{N}$ met $k \leq p$. Bewijs dat

$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}.$$

24. Voor $a, b \in \mathbb{Z}$ definiëren we een transformatie

$$\tau_{a,b} \colon \mathbb{F}_5 \to \mathbb{F}_5$$

door $\tau_{a,b}(x) = \bar{a}x + \bar{b}$.
    (i) Bewijs dat $\tau_{a,b}$ een permutatie is dan en slechts dan als $5 \nmid a$. Hoeveel permutaties van $\mathbb{F}_5$ zijn van deze vorm?
    (ii) Laat G de verzameling zijn van de permutaties $\tau_{a,b}$ van $\mathbb{F}_5$ met $a, b \in \mathbb{Z}$ en $5 \nmid a$. Zij $\sigma \in G$. Toon aan dat $\sigma^{-1} \in G$.
    (iii) Bewijs dat voor alle $m \in \mathbb{N}$ geldt

$$\tau_{2,1}^m = 1 \iff 4 \mid m.$$

25. Zij $a \in \mathbb{N}^*$ en zij p een priemgetal. De transformatie σ van de verzameling $\underline{a}^p$ is gedefinieerd door

$$\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_p) = (a_2, \ldots, a_p, a_1) \qquad (\text{voor } a_1, \ldots, a_p \in \underline{a}).$$

(i) Toon aan dat σ een permutatie is met banen van lengte 1 en p.
(ii) Hoeveel elementen van $\underline{a}^p$ zijn element van een baan van lengte p?
(iii) Bewijs de Kleine Stelling van Fermat met behulp van het vorige onderdeel.

26. We beschouwen de rij $f_0, f_1, f_2, \ldots$ der Fibonaccigetallen (met $f_0 = 0$ en $f_1 = 1$). Gegeven is een $m \in \mathbb{N}^*$.

(i) Bewijs dat voor alle $k \in \mathbb{N}$ geldt:

$$f_{m+k} \equiv f_{m-1} f_k \pmod{f_m}.$$

(ii) Bewijs dat voor alle $l \in \mathbb{N}^*$ geldt:

$$f_{lm} \equiv f_{m-1} f_{(l-1)m} \pmod{f_m}.$$

(iii) Bewijs dat voor alle $l \in \mathbb{N}$ geldt $f_m \mid f_{lm}$.

12 Kwadraatresten

17. (i) Voor welke priemgetallen p is er een $x \in \mathbb{Z}$ zodat $p \mid x^2 + x - 2$?
(ii) Voor welke priemgetallen p is er een $x \in \mathbb{Z}$ zodat $p \mid x^2 + x + 2$?

18. Zij p een oneven priemgetal van de vorm $x^2 + 2y^2$ met $x, y \in \mathbb{N}$.

(i) Zijn er dan ook $u, v \in \mathbb{N}$ met $u^2 + 2v^2 = 2p$?
(ii) Toon aan dat $\left(\frac{-2}{p}\right) = 1$.
(iii) Voor welke oneven priemgetallen q geldt dat $q - 2$ een kwadraatrest is modulo q?

19. (i) Voor welke priemgetallen p is er een $x \in \mathbb{N}$ zodat $p \mid x^2 + 7$?
(ii) Voor welke priemgetallen p is er een $x \in \mathbb{N}$ zodat $p \mid x^2 - 7$?

13 Priemtesten en factorisatie

20. 641 is een priemgetal. Toon aan dat de afbeelding

$$\mathbb{F}_{641} \to \mathbb{F}_{641}, \quad x \mapsto x^{427}$$

de inverse is van de afbeelding

$$\mathbb{F}_{641} \to \mathbb{F}_{641}, \quad x \mapsto x^3.$$

21. Zij n een Carmichaelgetal en zij $n = pm$ met p een priemgetal en $m \in \mathbb{N}^*$. Gegeven is dat $p \equiv n \equiv 5 \pmod 8$. Zij $a \in \mathbb{N}^*$ met $a \equiv 2 \pmod p$ en $a \equiv 1 \pmod m$.

(i) Bereken $\left(\frac{a}{n}\right)$.

(ii) Bewijs dat n geen Eulerpseudopriemgetal is voor de basis a.

(iii) Toon aan dat $n - 1 = c(p - 1)$ voor een oneven $c \in \mathbb{N}^*$.

(iv) Bewijs dat $a^{\frac{n-1}{2}} \not\equiv \pm 1 \pmod n$.

(v) Bewijs dat n geen sterk pseudopriemgetal is voor de basis a. (Voorbeeld: $n = 8719309$ en $p = 37$.)

15 De reëele getallen

19. Geldt voor iedere convergente rij (a_n) in $\mathbb{R}$, met $a_n \neq 0$ voor alle n, dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \ ?$$

Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

20. (i) Geef een voorbeeld van een rij (a_n) in $\mathbb{R}$ waarvoor geldt: (a_n) convergeert en de rij van de entiers $(\lfloor a_n \rfloor)$ convergeert niet.

(ii) Laat (a_n) een convergente rij in $\mathbb{R}$ zijn. Toon aan dat er een $m \in \mathbb{Z}$ en een $N \in \mathbb{N}^*$ zijn zodat $m - 1 < a_n < m + 1$ voor alle $n \geq N$.

(iii) Laat (a_n) een Cauchyrij in $\mathbb{Q}$ zijn waarvoor de rij $(\lfloor a_n \rfloor)$ niet convergeert. Bewijs dat (a_n) convergeert naar een geheel getal.

21. Het reëele getal α is gegeven met een oneindige kettingbreuk:

$$\alpha = \langle \overline{3} \rangle \ (= \langle 3, 3, 3, \dots \rangle).$$

(i) Toon aan dat $\alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

(ii) Bepaal natuurlijke getallen p en q zodat

$$q < 100 \quad \text{en} \quad |\alpha - \tfrac{p}{q}| < \tfrac{1}{1000}.$$

22. Ga van elk van de volgende uitspraken na of hij waar is. Geef een bewijs of anders een tegenvoorbeeld.

(i) Als α een irrationaal getal is met $\alpha > 0$, dan is $\sqrt{\alpha}$ een irrationaal getal.

(ii) Als α een irrationaal getal is met $\alpha > 1$, dan is $\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}$ een irrationaal getal.

(iii) Als α een irrationaal getal is, dan is $\sqrt{\alpha^2 + 1}$ een irrationaal getal.

23. Op de verzameling $\mathcal{R}(\{0, 1\})$ (bestaande uit alle oneindige rijen enen en nullen) is de relatie $\sim$ gedefinieerd door

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \sim (b_0, b_1, b_2, \dots) \iff a_n \neq b_n \text{ voor slechts eindig veel } n \in \mathbb{N}.$$

(i) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

(ii) Toon aan dat iedere equivalentieklasse aftelbaar is.

(iii) Bewijs dat er overaftelbaar veel equivalentieklassen zijn.

24. (i) Laat B de verzameling zijn van alle rijen $a_0, a_1, a_2, \dots$ in $\{0, 1, 2\}$ met de eigenschap
$$a_{n+1} \neq a_n \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}.$$
Is B eindig, aftelbaar of overaftelbaar?

(ii) Laat C de verzameling zijn van alle rijen $a_0, a_1, a_2, \dots$ in $\{0, 1, 2\}$ met de eigenschap
$$\#(\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}\}) \neq 2 \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}.$$
Is C eindig, aftelbaar of overaftelbaar?

25. (i) Zij $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Bewijs dat
$$g \text{ is injectief} \iff g(n+1) \notin \{g(0), g(1), \dots, g(n)\} \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Bewijs dat de verzameling $\{\, f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ is injectief} \,\}$ overaftelbaar is.

26. Bij iedere rij $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ in $\{1, 2, 3\}$ hebben we reële getallen
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n} \quad \text{en} \quad z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{2^n},$$
waarbij
$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{als } a_n = 1 \\ 0 & \text{anders,} \end{cases} \qquad y_n = \begin{cases} 1 & \text{als } a_n = 2 \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \qquad \text{en} \qquad z_n = \begin{cases} 1 & \text{als } a_n = 3 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

(i) Laat $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ een rij in $\{1, 2, 3\}$ zijn. Toon aan dat $x + y + z = 1$.

(ii) Laat gegeven zijn dat de rij (a_n) repeteert. Toon aan dat $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

(iii) Laat (a_n) een rij in $\{1, 2, 3\}$ zijn met $x \in \mathbb{Q}$. Volgt daaruit dat de rij (a_n) repeteert?

(iv) Laat (a_n) de rij $(1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots) = (\overline{1, 2, 3})$ zijn. Bereken voor deze rij de getallen x, y en z. Schrijf ze als een gewone breuk.

27. Laat A de verzameling zijn van alle rekenkundige rijen van reële getallen en laat B de verzameling zijn van alle rijen $r_0, r_1, r_2, \dots$ van reële getallen met $r_{n+2} = 2r_{n+1} - r_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat $A = B$.

28. De rij (a_n) in $\mathbb{Q}$ is gegeven door
$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \qquad (\text{voor alle } n \in \mathbb{N}).$$

(i) Toon aan dat de rij (a_n) convergeert in $\mathbb{Q}$.

(ii) Geef een $N \in \mathbb{N}$ zodat $|a_n - \lim_{n\to\infty} a_n| < 10^{-100}$ voor alle $n \geq N$.

29. Ga van elk van de volgende reële getallen na of ze rationaal zijn:

$$\sqrt[3]{189}, \quad \sqrt[3]{\frac{189}{56}}, \quad \sqrt{3+2\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}.$$

30. De rij natuurlijke getallen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ is gedefinieerd door

$$\begin{cases} a_0 = 4, \\ a_{n+1} = a_n^2 - 2 \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bewijs dat

$$a_n = (2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$.

16 De p-adische getallen

10. Is er een rij in $\mathbb{Q}$, die m.b.t. de gewone absolute waarde een nulrij is en m.b.t. de 3-adische absolute waarde naar 1 convergeert?

17 De complexe getallen

14. Geef de modulus en het argument van elk van de zeven complexe oplossingen van de vergelijking $z^7 - 5 = 0$. En ook van de vergelijking $z^7 + 5i = 0$.
15. Los op: $z^5 + \frac{1}{z^5} = 1$. Zijn de oplossingen eenheidswortels?

18 Kwadratische getallen

16. (i) Bepaal de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{13}$.
    (ii) Bepaal de kleinste $y \in \mathbb{N}^*$ waarvoor $13y^2 - 1$ een kwadraat is. Bepaal ook de op één na kleinste y met deze eigenschap.
    (iii) Hoeveel gereduceerde kwadratische getallen bevat de verzameling

$$A = \{\, \varphi^n(\sqrt{13}) \mid n \in \mathbb{N} \,\}?$$

    (iv) Zijn er gereduceerde kwadratische getallen α met $\mathrm{disc}(\alpha) = \mathrm{disc}(\sqrt{13})$ en $\alpha \notin A$?
17. (i) Vind natuurlijke getallen x, y zo dat $x^2 - 29y^2 = \pm 1$.
    (ii) Bepaal alle natuurlijke getallen x, y waarvoor $x^2 - 25y^2 = \pm 1$.
18. Zij $\alpha = \langle \overline{1,1,2,1} \rangle$.
    (i) Bepaal de kettingbreukontwikkeling van $3 + \alpha$ en ook van $\frac{1}{\alpha - 1}$.

(ii) Bereken α.

19. Bewijs dat er bij iedere niet-kwadraat $d \in \mathbb{N}^*$ er een uniek gereduceerd reëel-kwadratisch getal γ is met $\operatorname{disc}(\gamma) = 4d$ en $\lfloor \gamma \rfloor = 2 \cdot \lfloor \sqrt{d} \rfloor$.