Bijlage 2 bij *Inversie*

Uitwerkingen van alle opgaven

Juni 2015

Uitwerkingen Hoofdstuk 1

1.1 Hoe Spiegel je in een cirkel?

Opgave 1.1.1

a.
- $\angle ROP = \angle P'OR$ (hoeken vallen samen)
- $\angle OPR = \angle ORP' = 90^\circ$
- Dus volgens HH zijn beide driehoeken gelijkvormig.

b. $\dfrac{OP}{OR} = \dfrac{OR}{OP'}$ dus $OP \times OP' = OR^2$

Opgave 1.1.2

a. Hoek staat op middellijn *OP* dus hoek is volgens de Stelling van Thales een rechte hoek.

b. …

c.

$\Delta OP'S \sim \Delta OPS$ dus $\dfrac{OP'}{OS} = \dfrac{OS}{OP}$. Hier uit volgt $OP \times OP' = OS^2$.

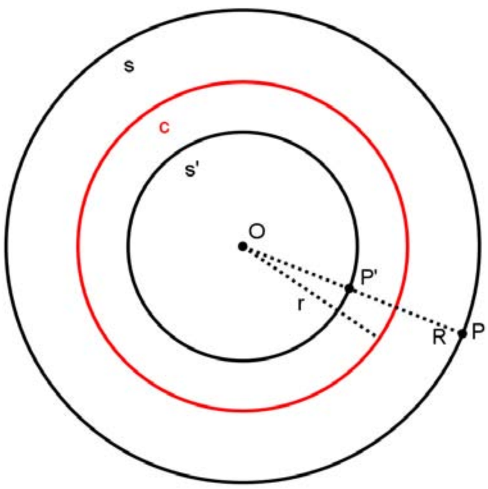
Opgave 1.1.3

a. Neem een punt *P* op de cirkel. Er geldt dan: $OP \cdot OP' = OP \cdot OP = r^2$.

b. Er geldt $OP<r$ dus $OP'>r$. Inversiebeeld ligt dus in buitengebied van inversiecirkel.

c. Bij punt *P* in het buitengebied geldt $OP>r$ en omdat $OP \cdot OP' = r^2$ moet $OP' < r$, inversie punt ligt dus in het binnengebied van de inversiecirkel.

Opgave 1.1.4



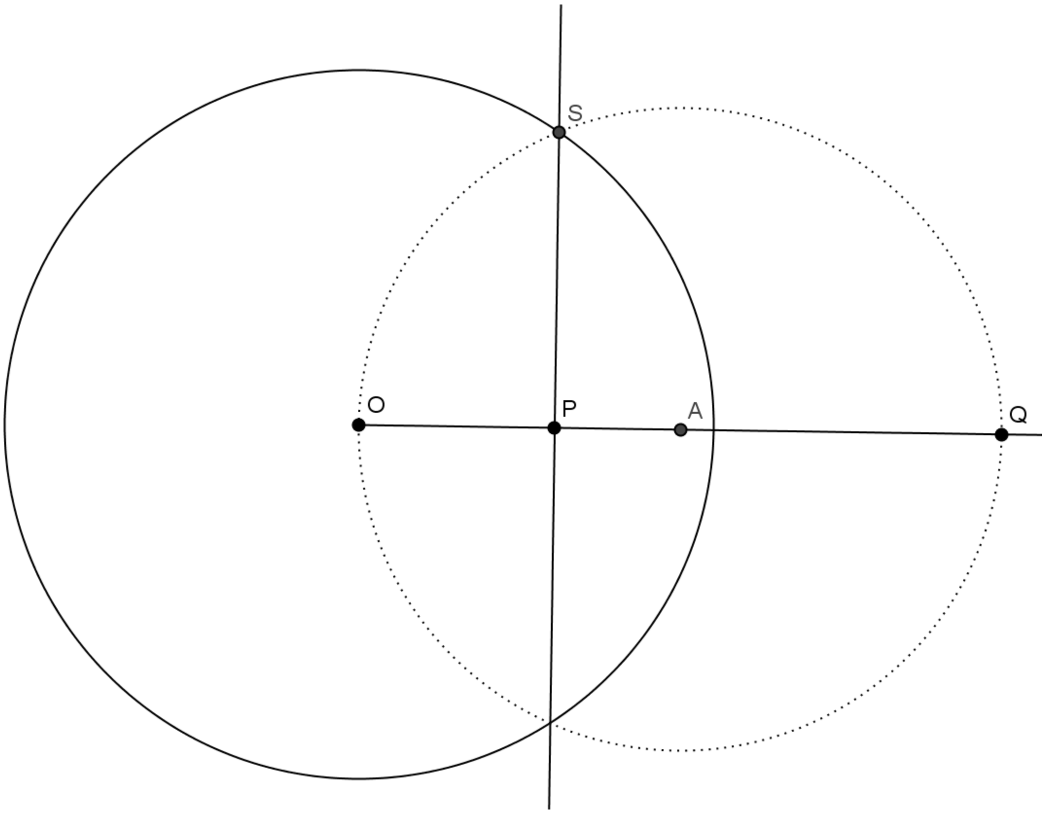
Neem punt *P* op cirkel *s*. Er geldt: $OP \cdot OP' = r^2$ en $OP = R$. Dus $OP' = \dfrac{r^2}{R}$.

Inversiebeeld van cirkel *s* is ook een cirkel met *O* als middelpunt en de straal is gelijk aan $\dfrac{r^2}{R}$.

1.2 Is er een verband tussen spiegelen in een lijn en spiegelen in een cirkel?

Opgave 1.2.1

a.



- Teken een cirkel met *OQ* als diameter.
- Teken een lijn door *P* loodrecht op *OQ*.
- Eén van de snijpunten van de cirkel en de loodlijn noemen we *S*.
- Teken een cirkel met *O* als middelpunt en *OS* als straal.

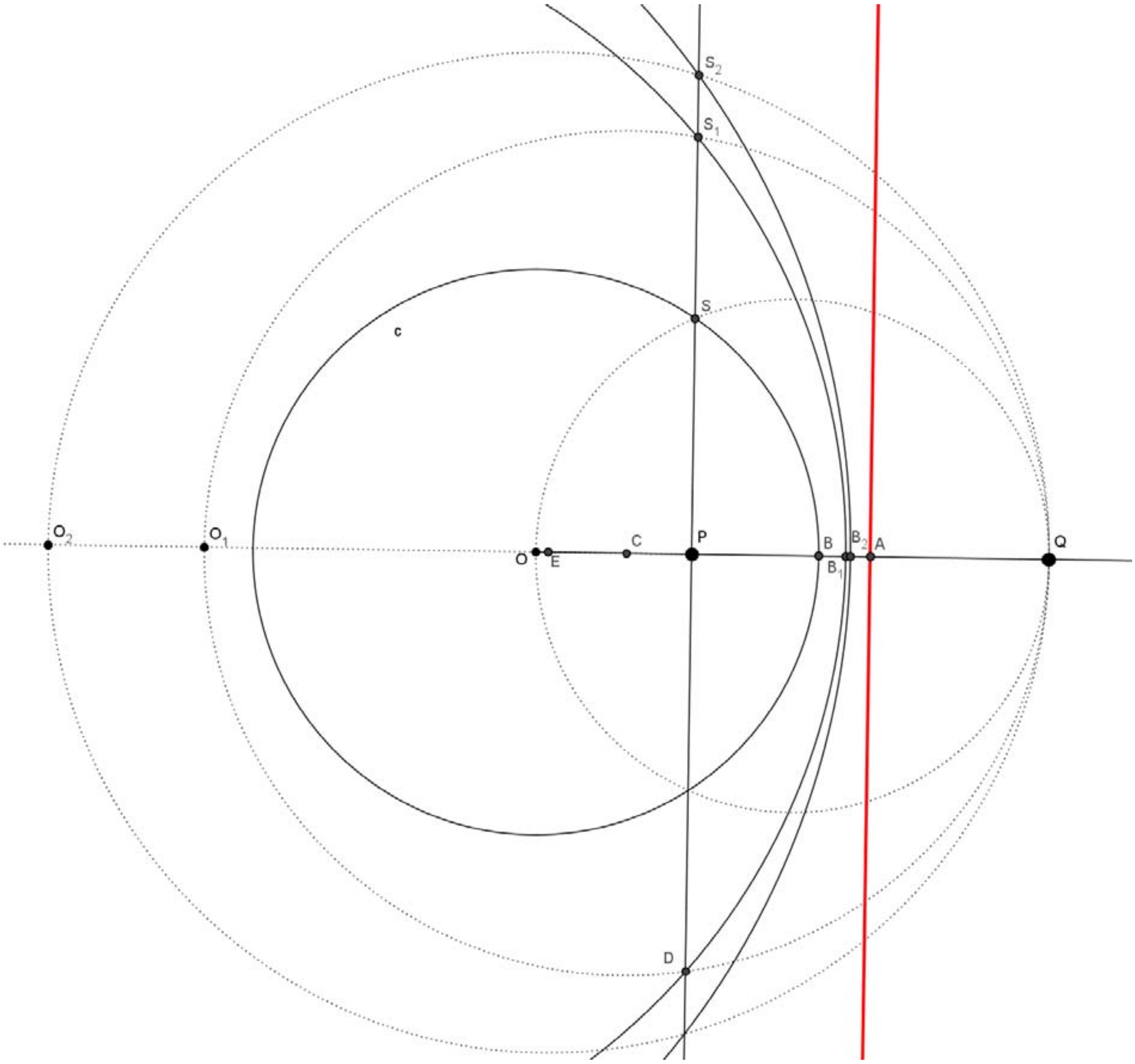
b. Er is één zo'n cirkel.

Opgave 1.2.2

a. $AP=AQ$ en lijn *l* staat loodrecht op lijn *PQ*.

b. B_1 ligt dichter bij punt *A* dan punt *B*.

c.

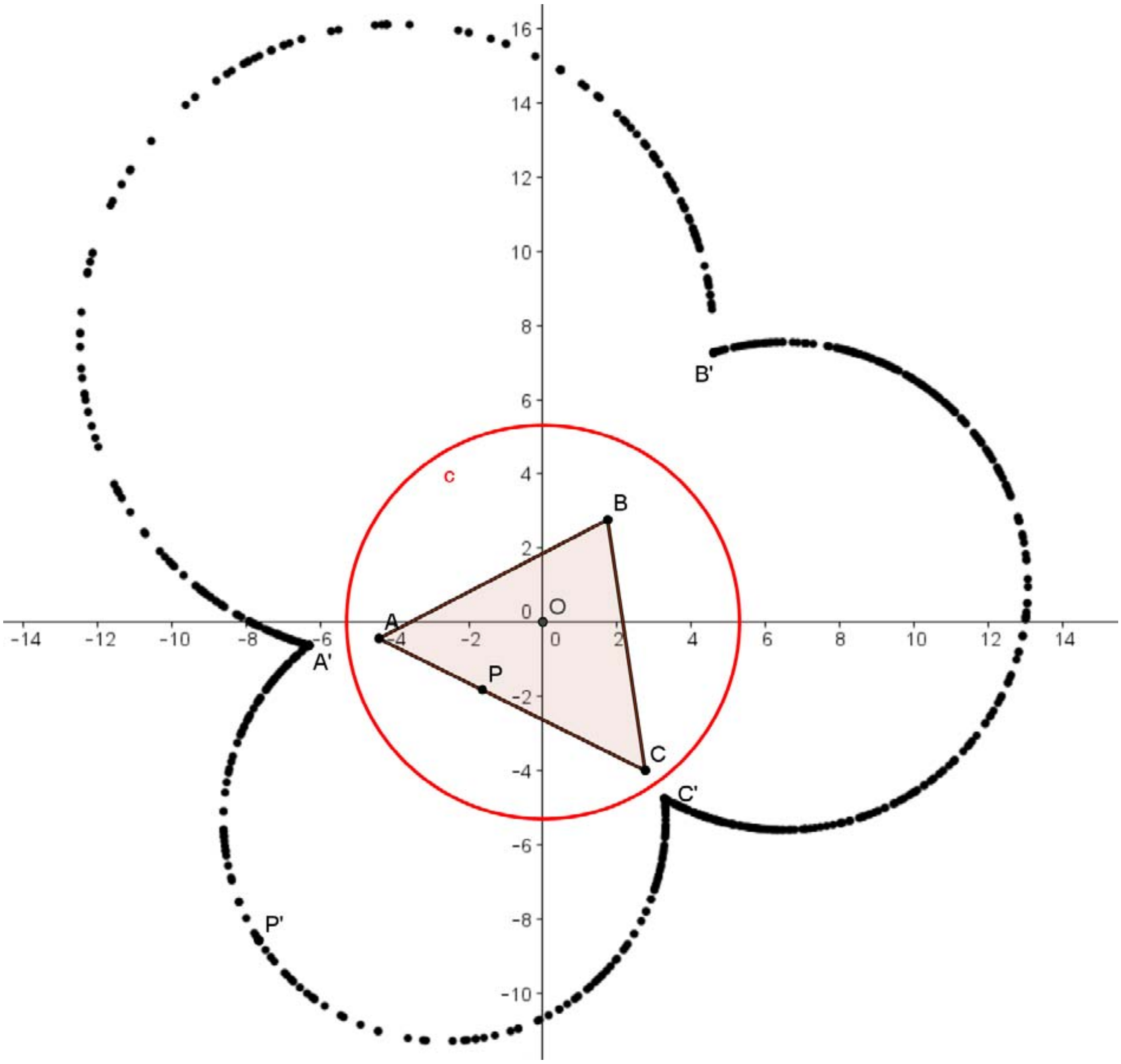


B_2 ligt dichter bij punt *A* dan punt B_1. Hoe verder het inversiecentrum ligt van punt *A* hoe dichter bij de punten *B* bij *A* komen, dus hoe meer de inversiecirkel gaat lijken op spiegellijn *l*.

1.3 Het inzetten van GeoGebra om vermoedens te ontwikkelen

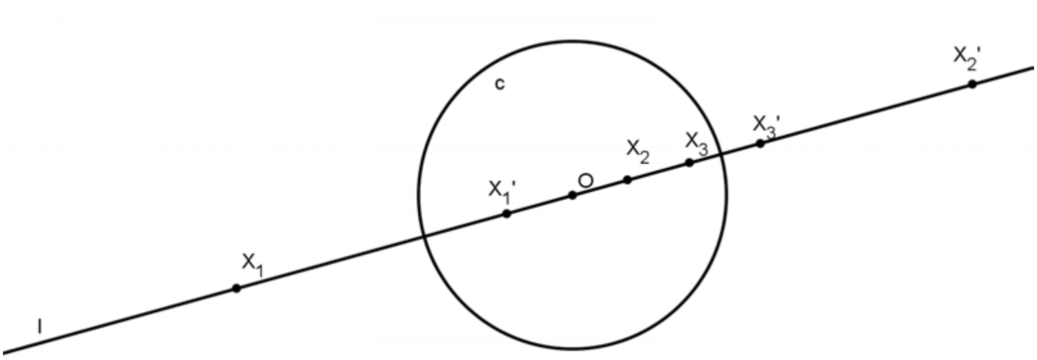
Opgave 1.3.1

Het inversiebeeld bestaat uit delen van cirkels (cirkelbogen) aangevuld met twee halflijnen.



1.4 Wat is er met het schaakbord gebeurd?

Opgave 1.4.1



b. lijn *l* zelf met perforatie *O*.

Opgave 1.4.2

b. Het zijn allemaal rechte hoeken.

c. Cirkel door inversiecentrum met *OC* als middellijn.

d. Punt *C* is het inversiebeeld van punt X_1. Er geldt $OX_1 \cdot OC = r^2$.

Punt *D* is het inversiebeeld van punt X_2. Er geldt $OX_2 \cdot OD = r^2$

$OX_1 \cdot OC = OX_2 \cdot OD$

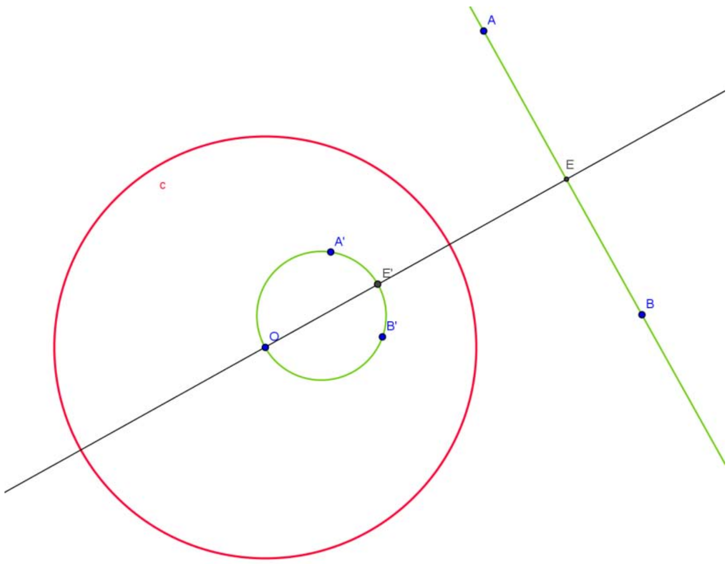
$$\frac{OX_1}{OX_2} = \frac{OD}{OC}$$

Dit betekent dat $\Delta OX_1X_2 \sim \Delta ODC$

Dus $\angle OX_1X_2 = \angle ODC = 90°$

OC is de middellijn van cirkel door *O, D* en *C* (Stelling van Thales)

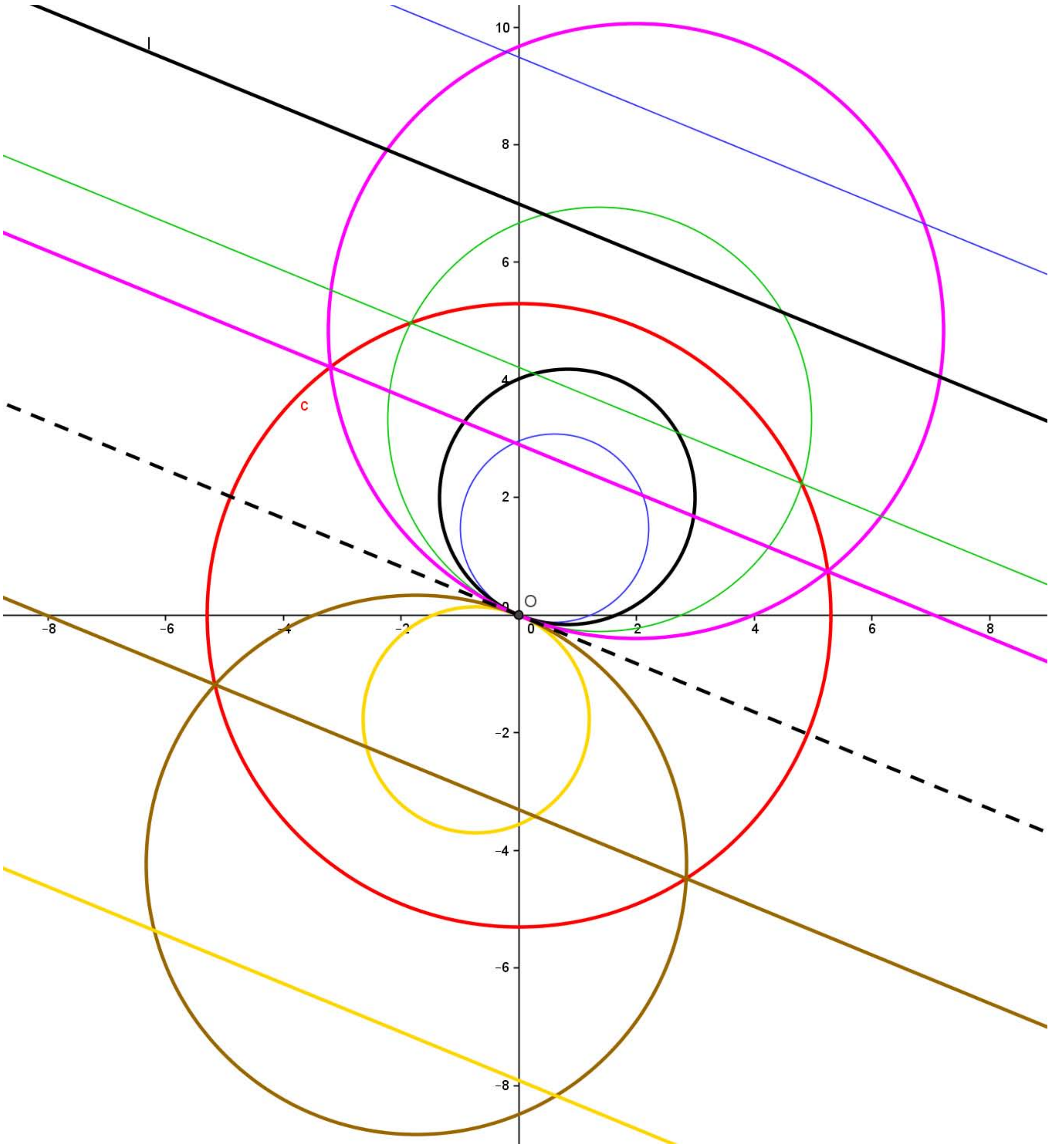
e.



Lijn door *A* en *B* inverteren. *OE* staat loodrecht op *AB*. Punt *E’* inversiebeeld van punt *E*.
Inversiebeelden liggen op een cirkel door inversiecentrum *O* met *OE’* als middellijn.

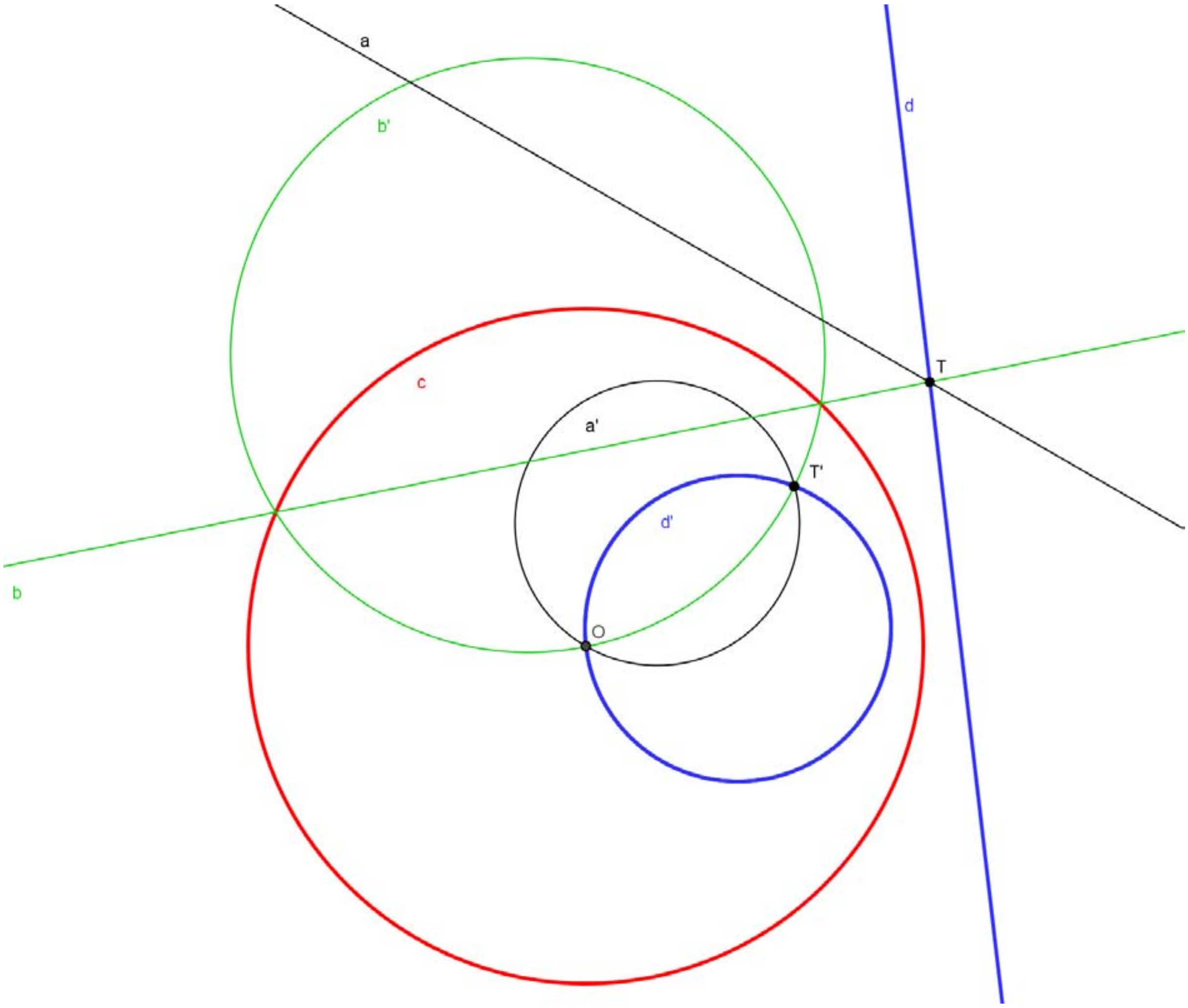
f. Een cirkel door het centrum van de inversiecirkel; lijn zelf.

Opgave 1.4.3



Inversiebeeld van V zijn alle cirkels door *O* en waarvan het middelpunt ligt op de lijn door *O* die loodrecht staat op lijn *l*. Al die cirkels raken elkaar in punt *O*.

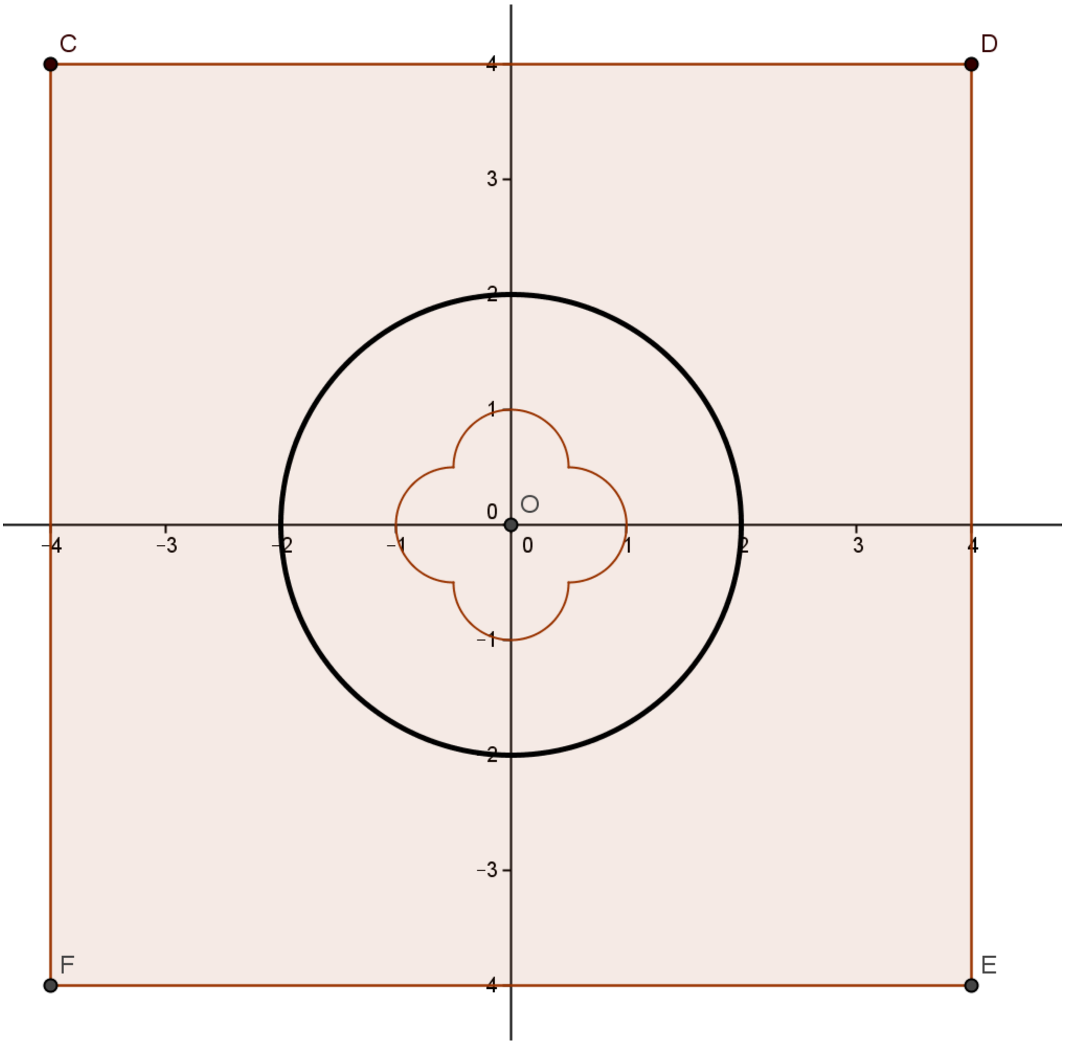
Opgave 1.4.4



Inversie beeld van W zijn alle cirkels door *O* en inversiebeeld van punt *T* aangevuld met lijn *OT*.

d. Alle lijnen door *O*. Dus W wordt op zich zelf afgebeeld.

Opgave 1.4.5



b. Het inversiebeeld bestaat uit vier congruente cirkelbogen. Elke boog is een deel van een cirkel die door O gaat.

c. Het buitengebied van vierkant $CDEF$ is het binnengebied van de vier aansluitende cirkelbogen.

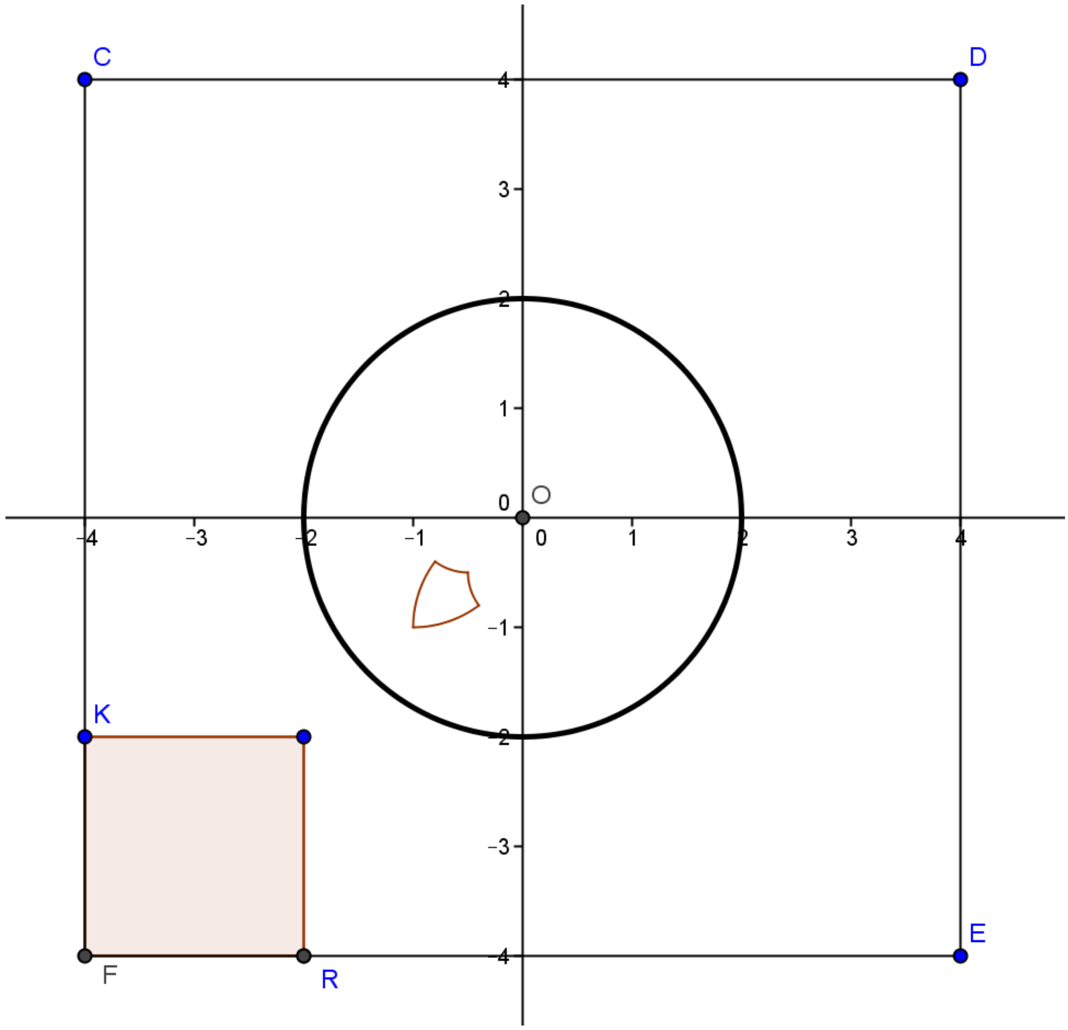
e. Het witte deel van het schaakbord is het inversiebeeld van het buitengebied van het schaakbord van 16 bij 16 velden.

Opgave 1.4.6

a.

- Lijnstuk QR wordt afgebeeld op cirkelboog $Q'R'$ die niet door O gaat.
- Lijnstuk KJ wordt afgebeeld op cirkelboog $K'J'$ die niet door O gaat.
- Lijnstuk UP wordt afgebeeld op cirkelboog $U'P'$ die niet door O gaat.
- Lijnstuk GI wordt afgebeeld op cirkelboog $G'I'$ die niet door O gaat.

b/c



Binnengebied van inversiebeeld is aangegeven maar moet nog zwart worden gekleurd.

Opgave 1.4.7

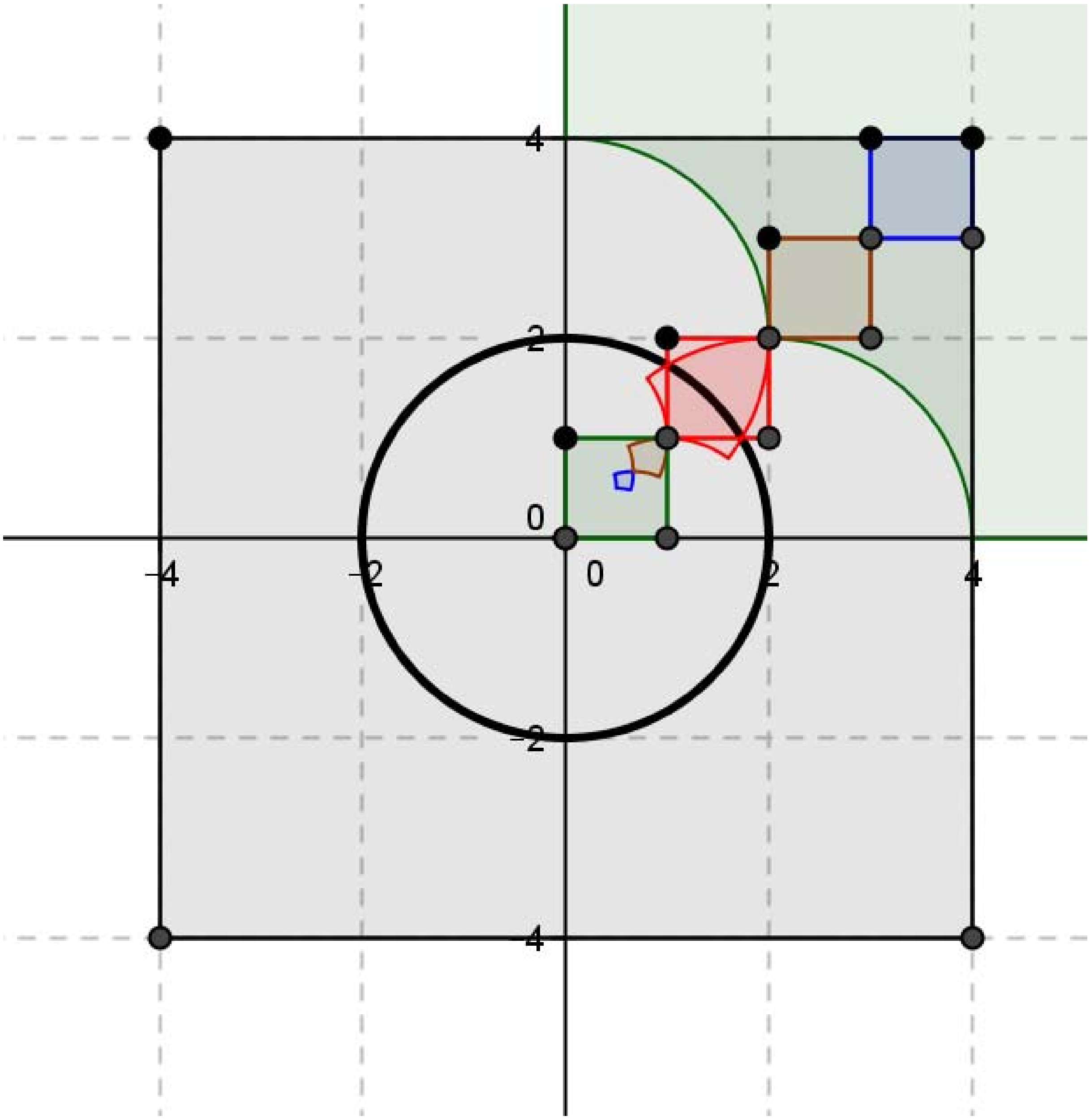
b. Inversiebeeld van lijnstuk *JR* is de grote cirkelboog *J'R'*.
Inversiebeeld van lijnstuk *GN* is de grote cirkelboog *G'N'*.
Inversiebeeld van lijnstuk *IS* is de grote cirkelboog *I'S'*.

c,d. …..

Opgave 1.4.8

a. Het hele normale schaakbord met 64 velden is te zien.

b. Vier velden op de diagonaal (y=x), aangeven met verschillende kleur, zijn gespiegeld in de cirkel met middelpunt in oorsprong en met straal 2. De inversiebeelden hebben dezelfde kleur als de originelen.

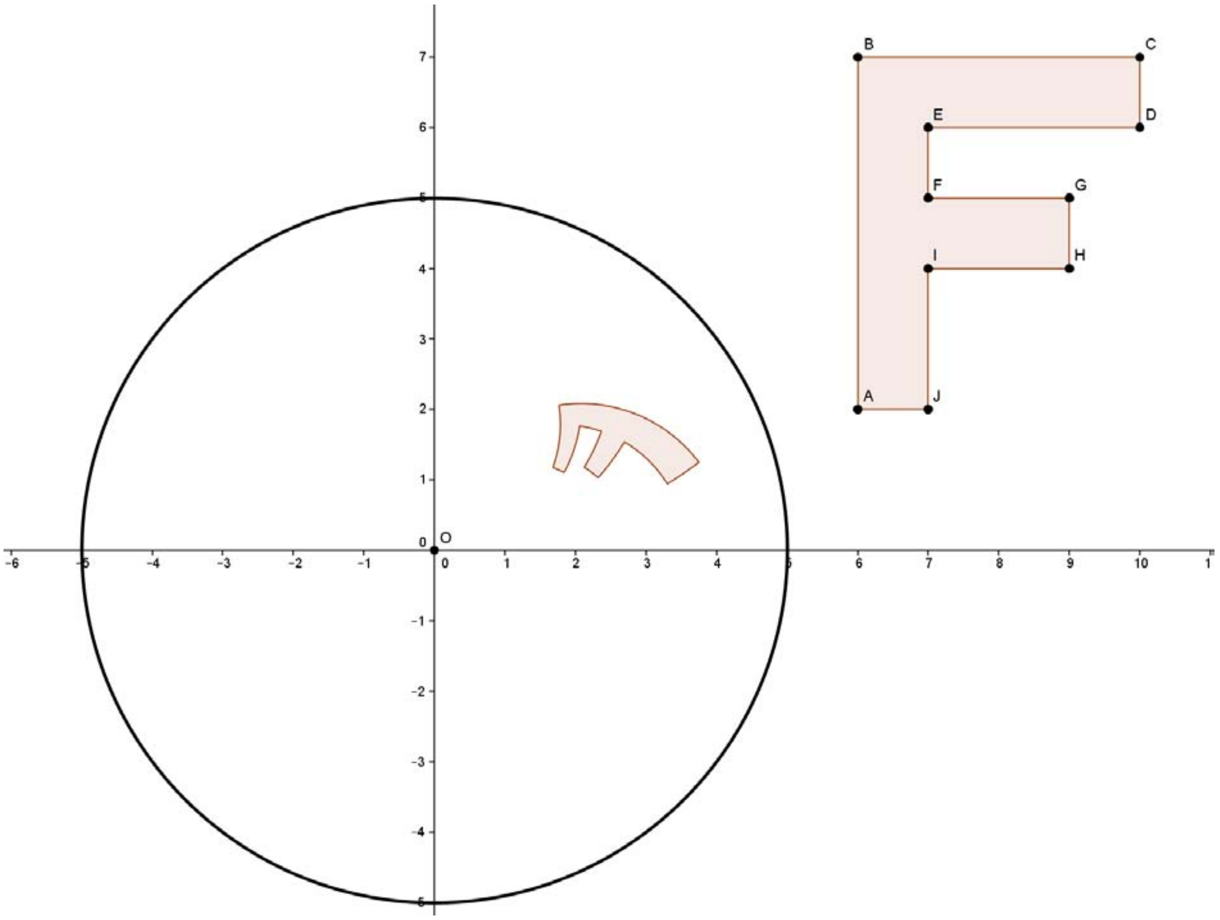


Op de omslag van het tijdschrift zien we op diagonaal veel meer inversiebeelden van velden.

Binnen de inversiecirkel vinden we de beelden van velden van een schaakbord van 16 bij 16 velden die buiten de cirkel liggen. Buiten de cirkel is het binnengebied van het vergrote schaakbord afgebeeld. Echter de velden die de oorsprong tot gemeenschappellijk hoekpunt hebben zijn slechts deels afgebeeld op het normale schaakbord.

1.5 De letter F spiegelen in een cirkel.

Opgave 1.5.1

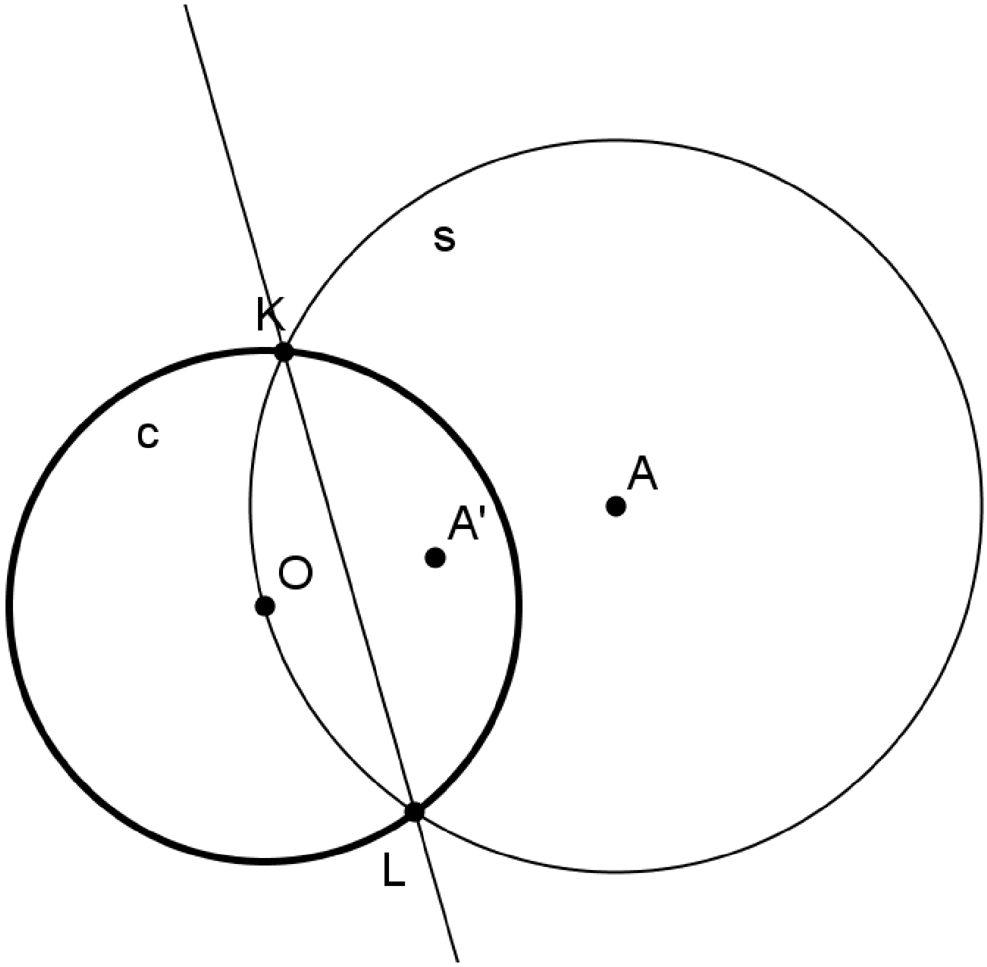


1.6 Wat is het inversiebeeld van een cirkel? En hoe teken je dat?

Opgave 1.6.1

a. Het gaat om de punten K en L, snijpunten van beide cirkels. Deze punten zijn gelijk aan hun inversiebeelden.

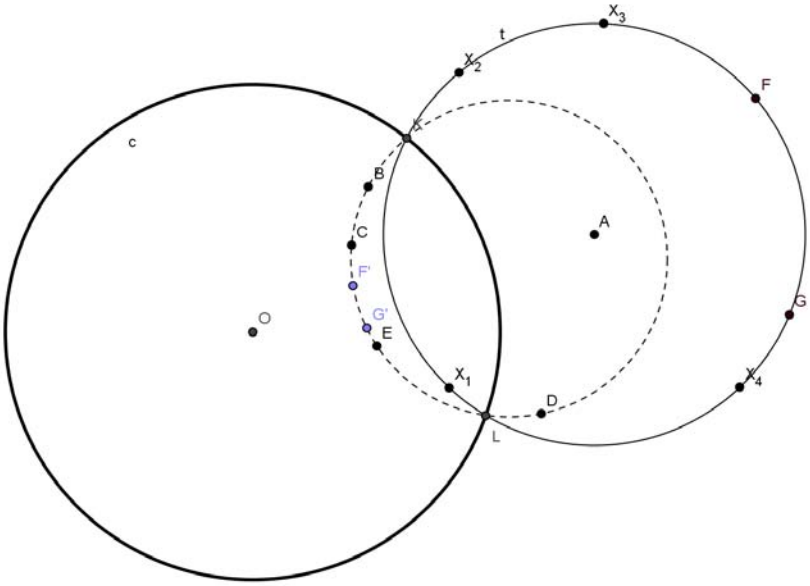
b.



Inversiebeeld van cirkel s is lijn KL.

c. Zie tekening bij vraag b). Merk op dat punt A' niet op lijn KL ligt.

Opgave 1.6.2



c. Het inversiebeeld is een cirkel.

Opgave 1.6.3

Trek lijnstuk *AD* en *BC.*

a. $\angle P$ hebben ze gemeenschappelijk
$\angle PBC = \angle PDA$ (omtrekshoek op koorde AC)
dus ΔPAD *gelijkvormig met* ΔPCB

b. $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ → $PA \; x \; PB = PC \; x \; PD$
$PCxPD = (PM - r)(PM + r) = PM^2 - r^2$

c. Volgens Stelling van Pythagoras, immers $\angle PAM = 90^\circ$,geldt:

$PM^2 = PA^2 + r^2$ dus $PA^2 = PM^2 - r^2$.

Opgave 1.6.4

b. *B* is bij deze vermenigvuldiging beeldpunt van *A*. Q' is beeldpunt van *P*.

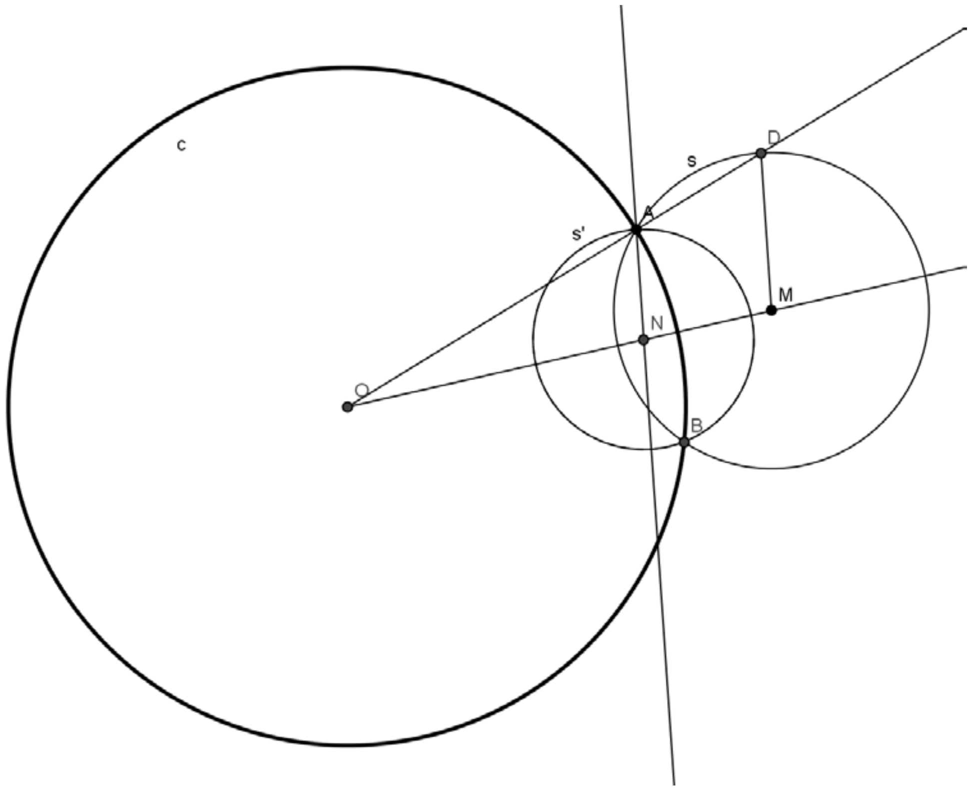
c. Ze zijn allebei beeld van een lijnstuk met lengte van straal *r*.

Opgave 1.6.5

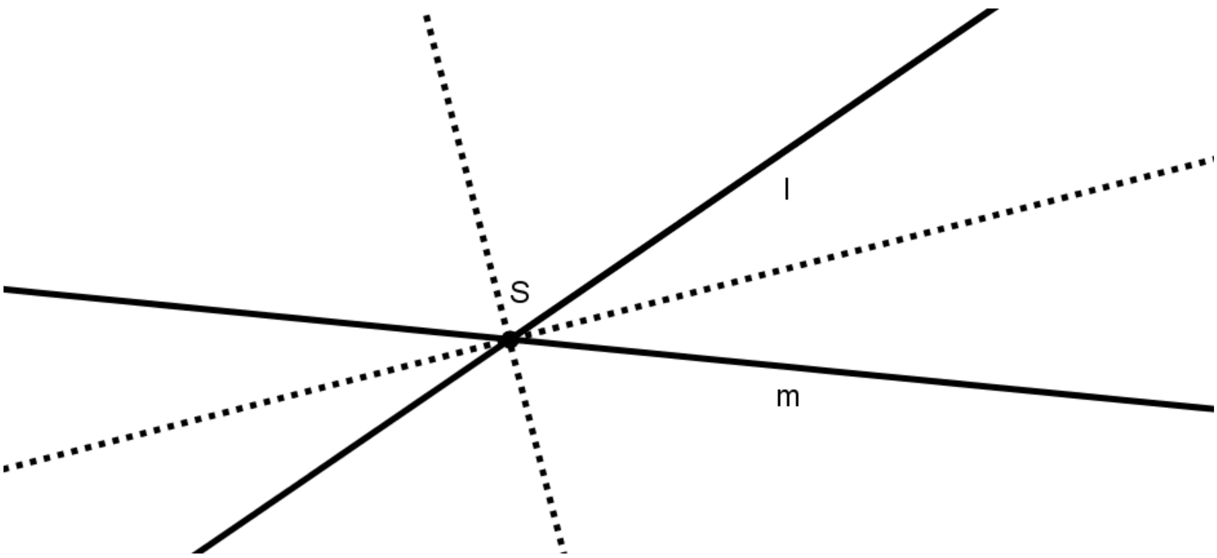
a. De punten *A* en *B* liggen op de inversiecirkel. Ze worden dus op zich zelf afgebeeld.

b. Punt *D* ligt op de halflijn *OA*. Het beeld van *D* bij vermenigvuldiging *V* moet ook op de halflijn *OA* liggen dus moet dat wel punt *A* zijn. Dus *V(D)=A.*

c. Het puntspiegelbeeld van *M* moet op halflijn *OM* liggen. Trek door punt *A* een lijn die evenwijdig is met lijn *DM*. Het snijpunt van deze twee lijnen noemen we *N* en is het gevraagde punt. Er geldt V(*M*)=*N*. De gezochte cirkel verkrijgen we door de passerpunt te zetten in punt *N* en *AN* als straal (passergrootte) te nemen.

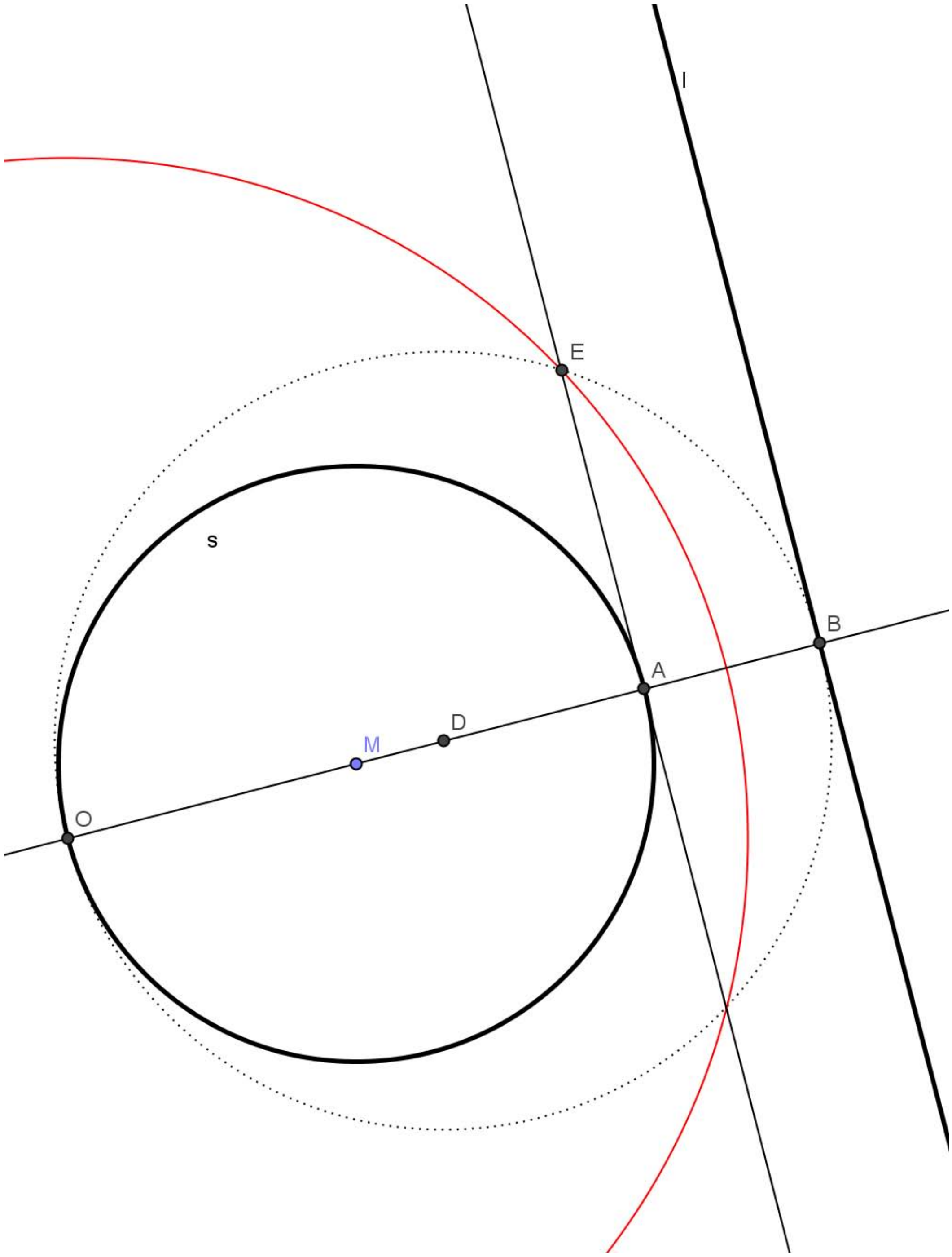


Opgave 1.6.6



Het zijn twee lijnen en wel de bissectrices. Deze zijn gestippeld getekend.

Opgave 1.6.7



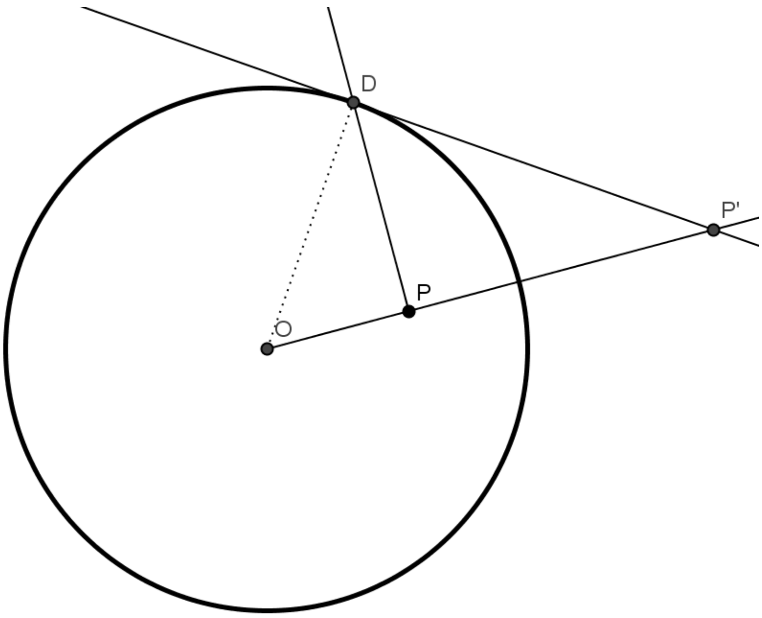
Laat uit middelpunt *M* van cirkel *s* loodlijn neer op lijn *l*. Snijpunt noemen we punt *B*. Snijpunten van loodlijn met cirkel *s* noemen we *O* en *A*. Neem *O* als inversiecentrum en zorg dat *A* en B elkaars inversiebeeld worden.

Teken een hulpcirkel waarvan het middelpunt *D* het midden is van lijnstuk *OB*. Trek een lijn door punt *A* die evenwijdig is met lijn *l*. Eén van de snijpunten met de hulpcirkel noemen we *E*. *OE* nemen we als straal van de inversiecirkel.

c. Er is precies één inversiecirkel.

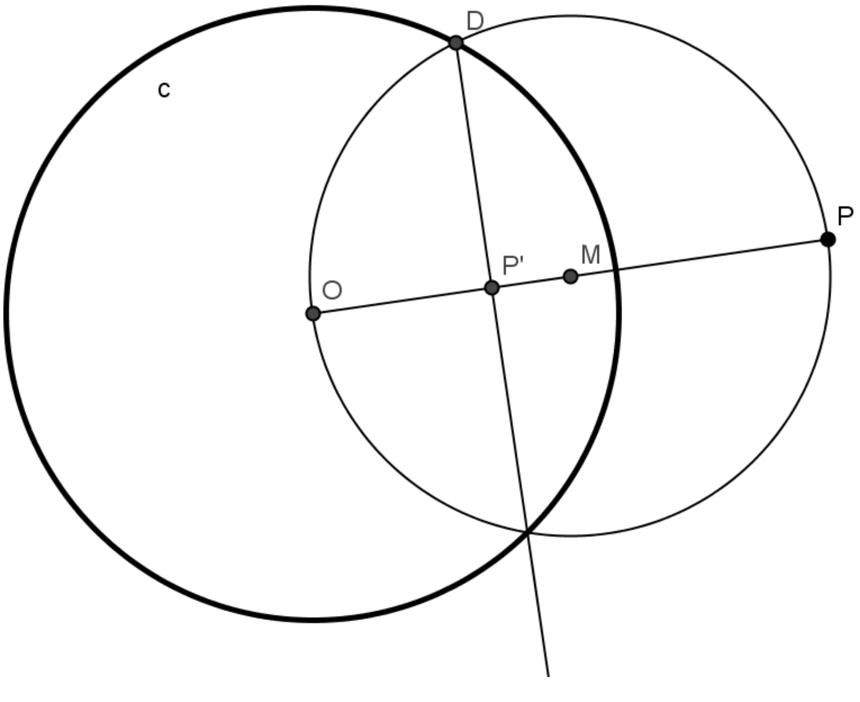
Opgave 1.6.8

- Punt *P* in het binnengebied : Teken halflijn *OP* en loodlijn door *P* op *OP*. Loodlijn snijdt inversiecirkel in punt *D*. Teken raaklijn in punt *D* . Deze snijdt lijn *OP* in *P'*.



- Punt *P* op de cirkel: in dit geval is *P=P'*.

- Punt *P* in het buitengebied: We construeren de cirkel met middellijn *OP* (middelpunt *M*). Deze snijdt de inversiecirkel (o.a.) in *D*. De lijn door *D* loodrecht op *OP* snijdt de lijn *OP* in het punt *P'*.



Uitwerkingen Hoofdstuk 2

Opgave 2.1.1

a. Alle punten op inversiecirkel.

b. Alle lijnen door inversiecentrum.

c. Inversiecirkel zelf.

Opgave 2.1.2

- Punt ligt op inversiecirkel
- Gaat door inversiecentrum

Opgave 2.1.3

a. Het is de macht van punt *O* ten opzichte van cirkel *s*.

b. Er geldt $OP \cdot OQ = r^2$.

c. Dat is *s* zelf.

Opgave 2.1.4

a. Je tekent de middelloodlijn van die twee punten en kiest daarop een punt wat dan middelpunt wordt.

b. Cirkel *c* snijdt koorde PP'. Dus wordt ook cirkel s gesneden.

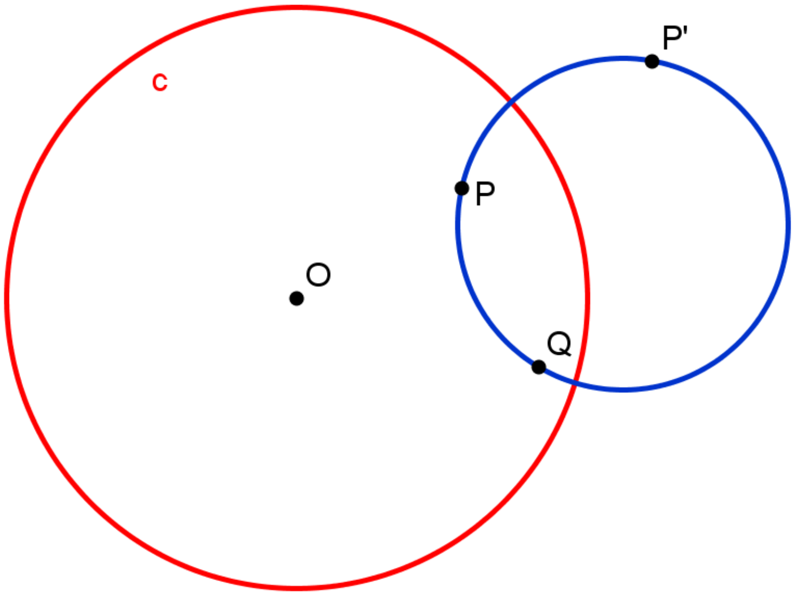
c. $OA^2 = OP \cdot OP'$. Het is de macht van *O* ten opzichte van cirkel *s*. Dus *OA* raakt cirkel *s* in *A*. Dat betekent *OA* staat loodrecht op *AS* dus $\angle OAS = 90^\circ$.

d. Neem een willekeurig punt *X* op cirkel *s* dan levert *OX* nog een snijpunt, noem die X' op met cirkel *s*. Er geldt dat X' inversiebeeld is van *X*. Immers $OX \cdot OX' = r^2 =$ macht van O ten opzichte van s .Dus cirkel *s* wordt op zich zelf afgebeeld.

e. Snijden cirkel *c* loodrecht.

Opgave 2.1.5

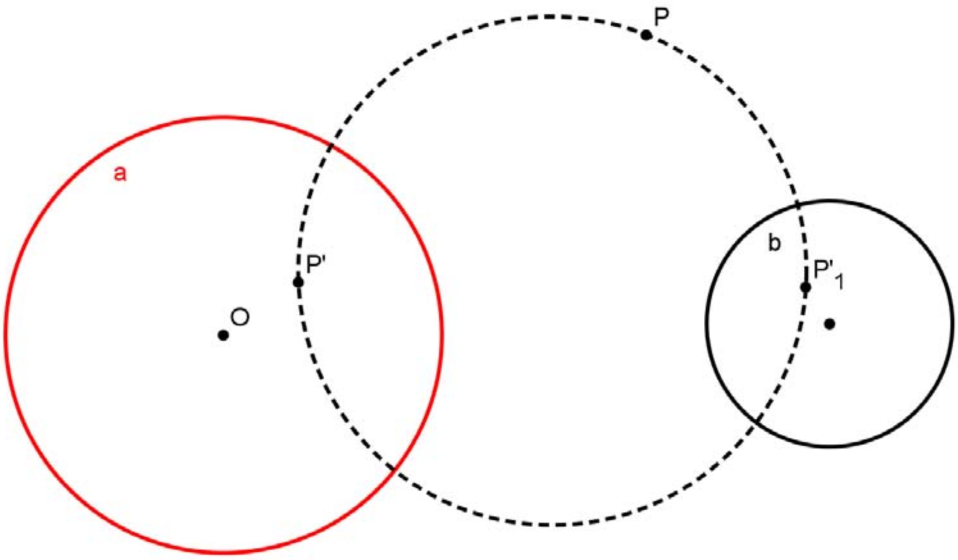
a. Uitvoering op bijlage.



c. Kies een van de punten uit, bijvoorbeeld punt *P* en teken inversiebeeld van *P*.

Met optie “ cirkel door drie punten” kun je de orthogonale cirkel vinden.

Opgave 2.1.6



Inverteer punt *P* in cirkel *a* en in cirkel *b*. Met de optie “ cirkel door drie punten” kun je de cirkel vinden die beide cirkels loodrecht snijdt.

2.2 Hoe zien de inversiebeelden eruit van rakende cirkels?

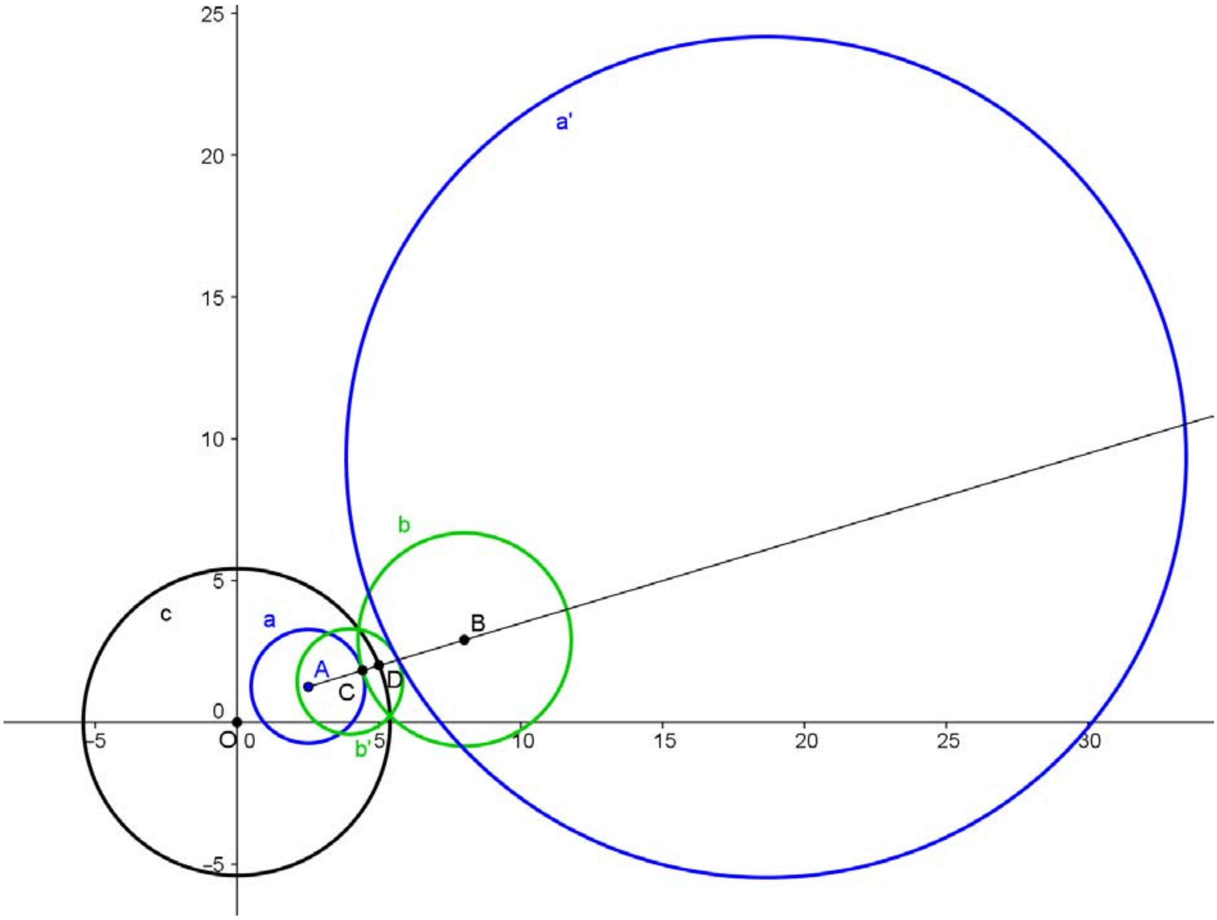
Opgave 2.2.1

a. De drie middelpunten liggen op één rechte lijn.

b. Dat zijn twee evenwijdige lijnen die loodrecht staan op lijn *AB*.

Opgave 2.2.2

a.



b. Zie bovenstaande figuur.

c. Inversiebeelden zijn twee rakende cirkels.

2.3 Wat gebeurt er met hoeken onder inversie? En wat gebeurt er met lengtes van lijnstukken?

Opgave 2.3.1

>> Wegens symmetrie zijn de hoeken bij punt *A* en punt *B* even groot.

Opgave 2.3.2

- **a.** Invoeren.
- **b.** Controle.
- **c.** Dat is niet het geval.
- **d.** Dat hangt af van je plaatje. De hoeken zullen hopelijk even groot zijn.
- **e.** Even groot.
- **f.** Hoekgrootten blijven onder inversie behouden.

Opgave 2.3.3

>> Kies twee punten *P* en *Q* op de inversiecirkel. Er geldt: $P'Q' = PQ$.

Opgave 2.3.4

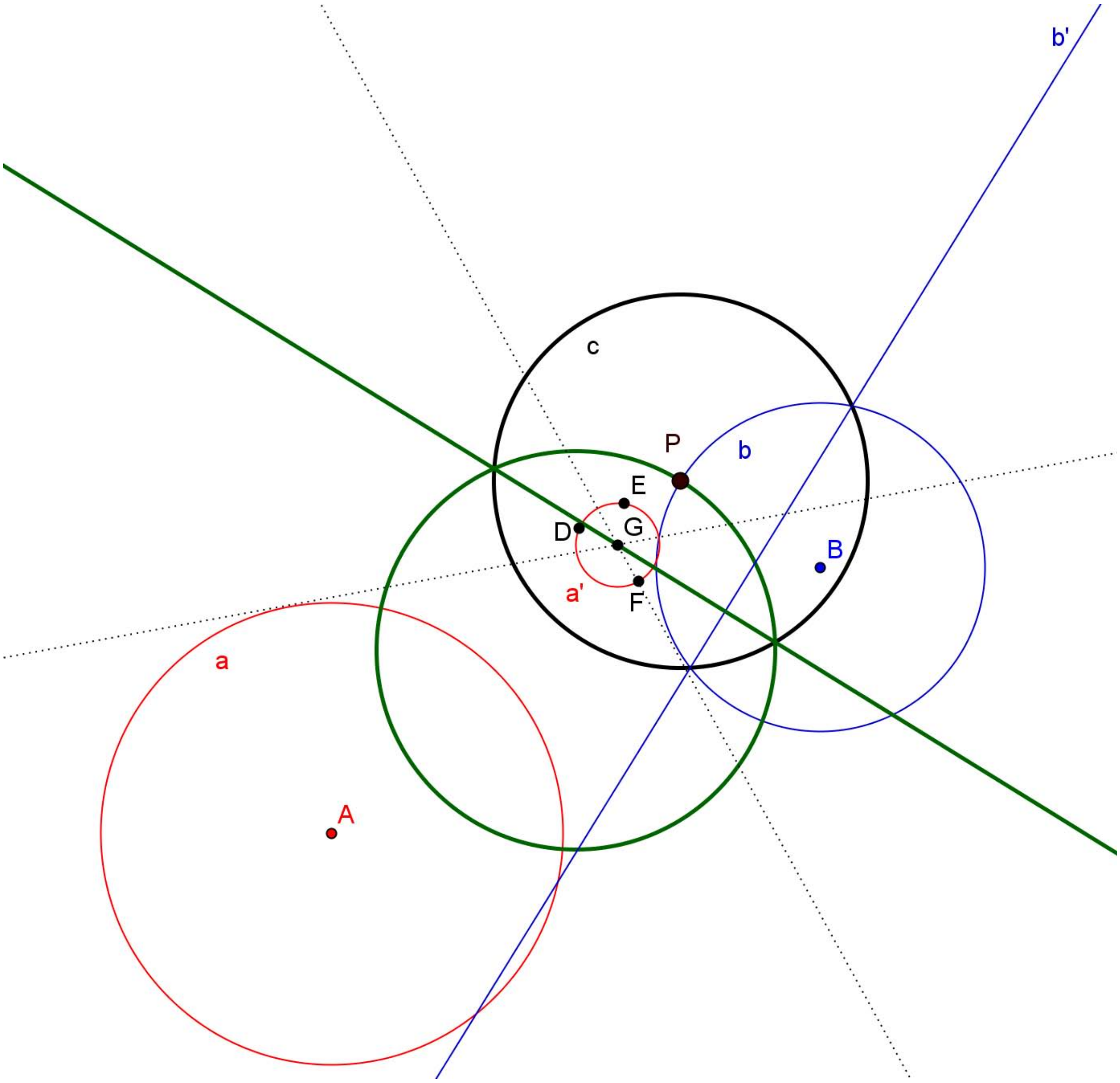
- **a.** Vanwege inversie geldt: $OA \times OA' = OB \times OB'$. Dus $\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{OA'}{OB'}$. Daar uit volgt dat driehoek *OAB* gelijkvormig is met driehoek $OB'A'$.(zhz). Dus $\angle OAB = \angle OB'A'$.
- **b.** Die zijn gelijk aan elkaar.
- **c.** $\angle(k,l) = \angle(r,s) = \left|\angle(r,OA) - \angle(s,OA)\right| = \left|\angle(r',OA) - \angle(s',OA)\right| = \angle(r',s') = \angle(k',l')$

Uitwerkingen Hoofdstuk 3

3.1 Strategieën leren bedenken

Opgave 3.1.1

- **a.** **Zie figuur.**
- **b.** Zie verder.
- **c.** Punt *P* is gekozen op cirkel *b*. Kies inversiecentrum in punt *P*. Kies een willekeurige straal voor de inversiecirkel. Cirkel *b* wordt geïnverteerd in een rechte lijn en cirkel *a* in cirkel a'.
- **d.** De lijn die door het middelpunt gaat van cirkel a' en loodrecht staat op lijn b'.
- **e.** Eerst moet het middelpunt getekend worden van a'. De lijn die bedoeld wordt in vraag d spiegelen we in de inversiecirkel. Het inversiebeeld is de gezochte (groene) cirkel.



Opgave 3.1.2

a. Zie figuur.

b. Noem een van de snijpunten van cirkels *a* en *b* punt *D.* Als je inversiecentrum kiest in punt *D* dan worden de cirkels *a* en *b* geïnverteerd in twee snijdende lijnen.

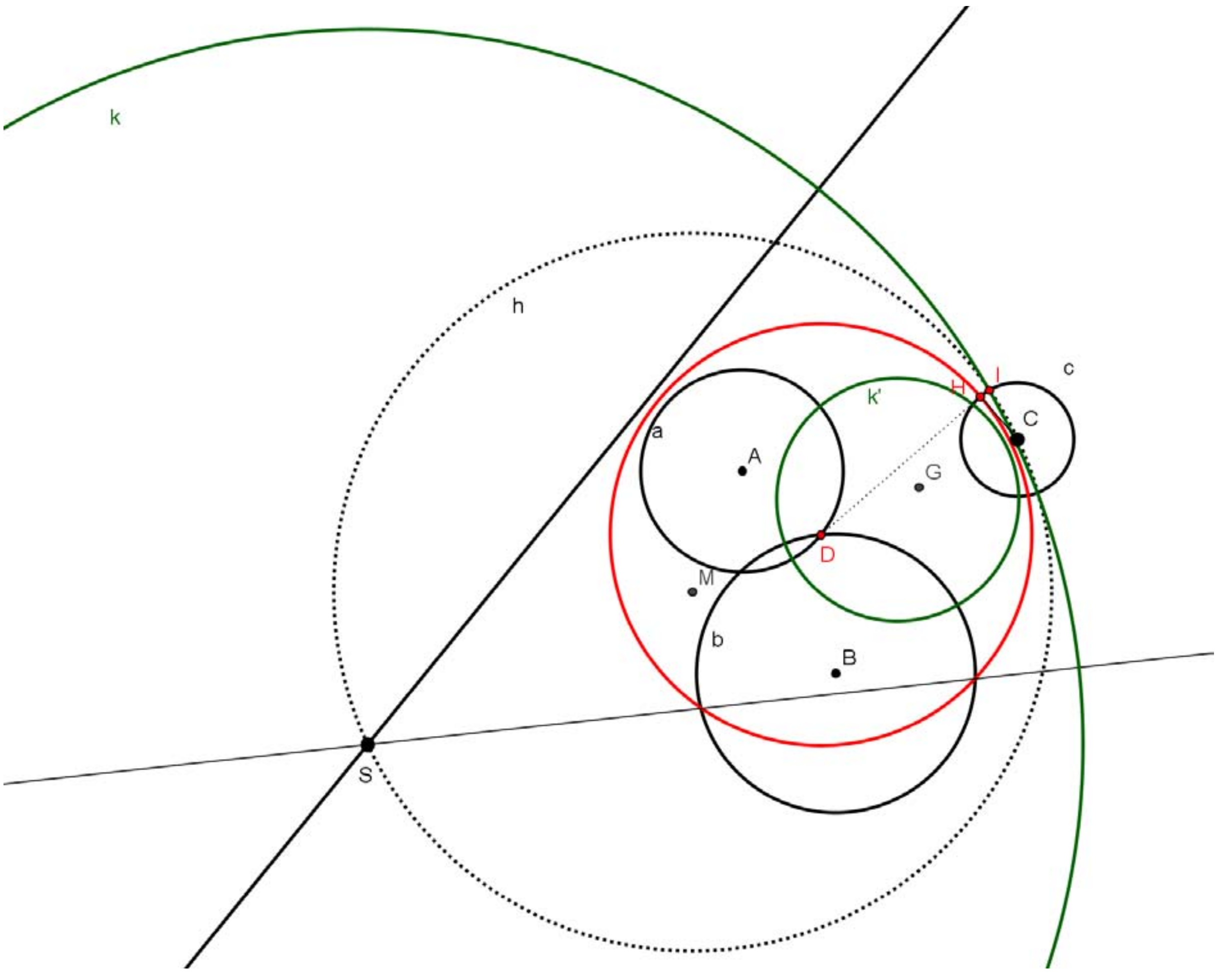
c. Kies de straal van de inversiecirkel zo dat cirkel *c* invariant blijft.

Construeer een cirkel met *DC* als diameter. Snij deze hulpcirkel met cirkel *c* en noem een van de snijpunten punt *H.* Neem als straal van de inversiecirkel *DH.* Noem snijpunt van de inversiebeelden van *a* en *b* punt *S.*

d. Zie figuur.

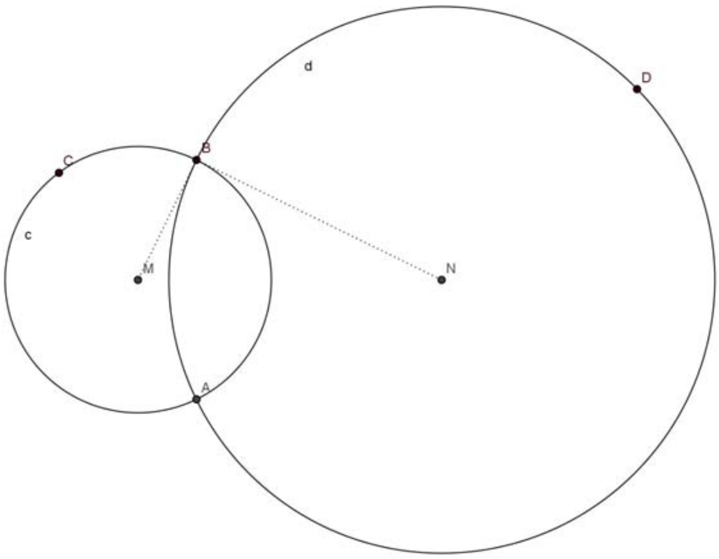
e. We moeten nu een cirkel *k* vinden die cirkel *c* loodrecht snijdt maar ook de inversiebeelden van *a* en *b.* Deze lijnen moeten dus middellijnen zijn van deze cirkel. Het middelpunt van deze cirkel *k* is dus punt *S*. De straal van deze cirkel *k* kun je zo kiezen dat cirkel *k* , cirkel *c* loodrecht snijdt. Zie voor deze werkwijze de uitwerking bij vraag c.

f. Tenslotte inverteren we cirkel *k.* Cirkel k' is de gezochte cirkel.



Opgave 3.1.3

a.



b. Punten *A* en *B*.

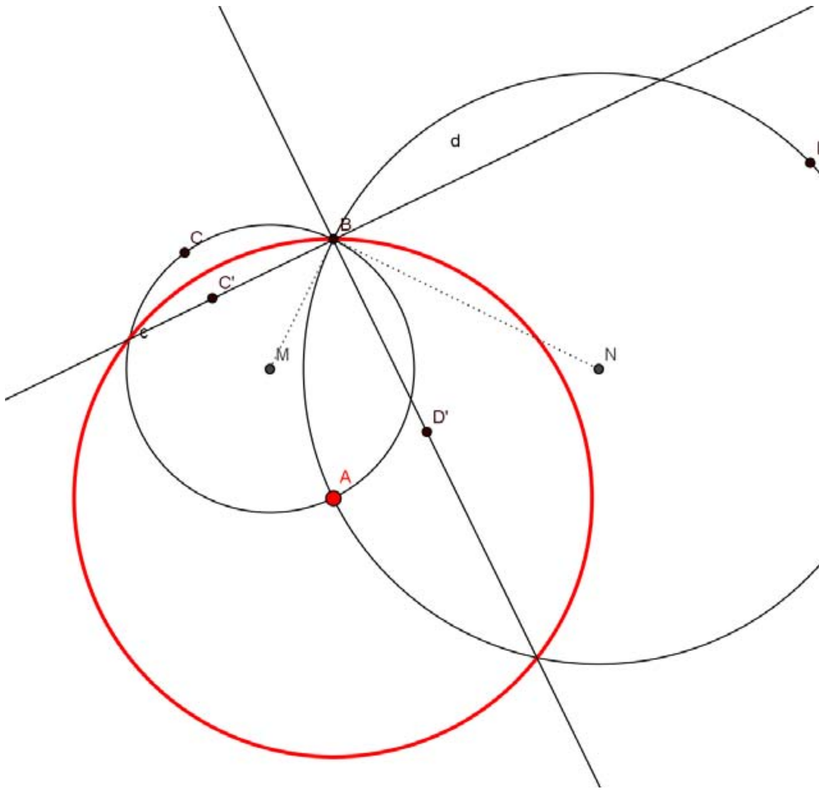
c. Twee rechte lijnen door punt *B*.

d. Ze staan loodrecht op elkaar.

e. I(*B*) ligt op inversiecirkel, I(*C*) en I(*D*) liggen binnen de inversiecirkel. Deze drie punten liggen niet op een rechte lijn.

f. Rechthoekige driehoek.

g.



Inverse van cirkel door C, D en B is cirkel door C', D' en B. $\Delta C'BD'$ is rechthoekig dus middelpunt van omgeschreven cirkel ligt op schuine zijde $C'D'$. $C'D'$ is dus middellijn van die cirkel, dus snijdt de cirkel loodrecht. Inverse van $C'D'$ is cirkel door A, C en D. Deze cirkel snijdt dus cirkel door B, C en D loodrecht.

3.2 Raakproblemen met inversie oplossen

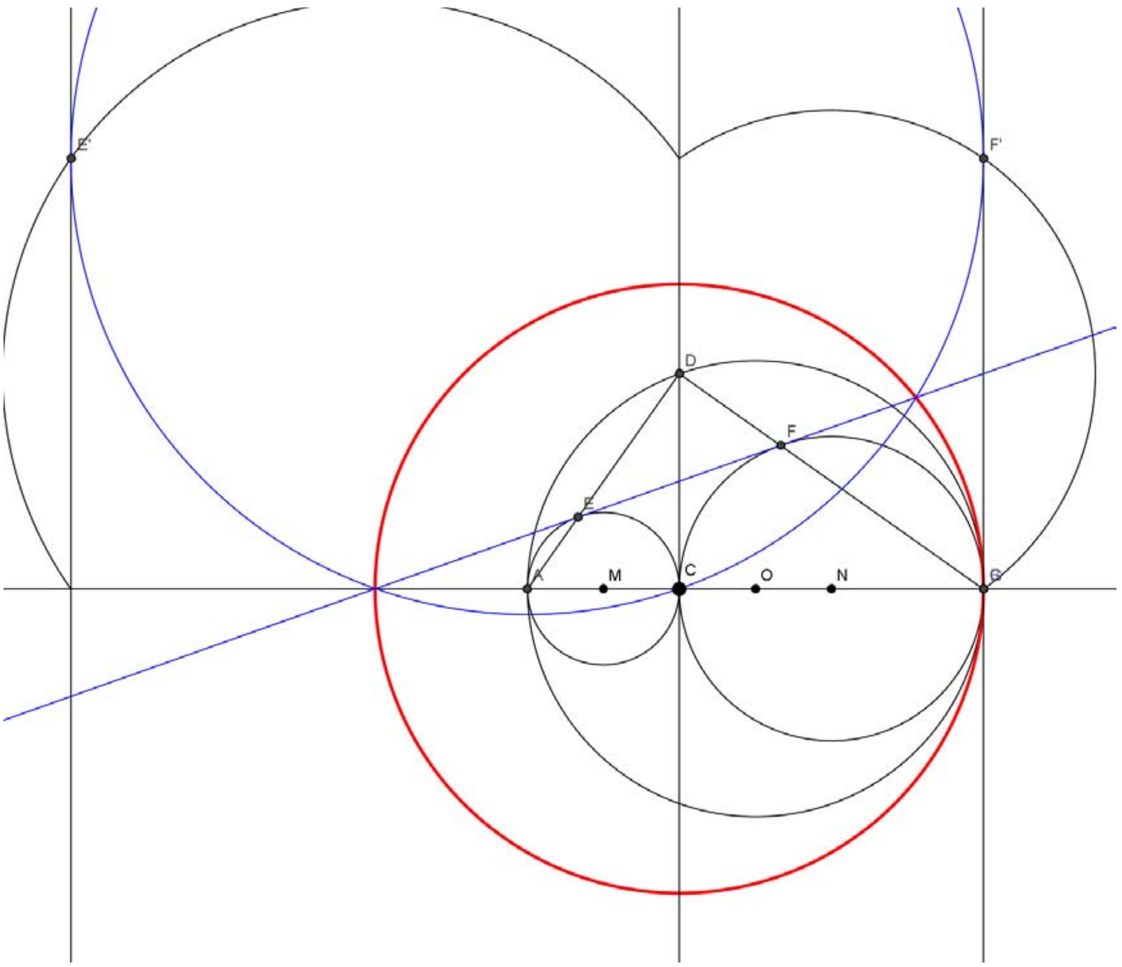
Opgave 3.2.1

a. $\angle AEC = \angle CFB = \angle ADB = 90^\circ$. Volgens Stelling van Thales. Volgens hoekensom in vierhoek *CFDE* is de vierde hoek ook een rechte hoek. Dus vierhoek *CFDE* is een rechthoek.

b. Noem het middelpunt van cirkel met *AC* als middellijn punt *M*. We moeten bewijzen dat $\angle MEF = 90^\circ$. $\angle MEC = \angle MCE$ want ΔMEC is een gelijkbenige driehoek. $\angle FEC = \angle ECD$ (basishoeken van gelijkbenige driehoek *ECS* waarbij *S* snijpunt is van de diagonalen van rechthoek *CFDE*).
Dus $\angle MEF = \angle MEC + \angle FEC = \angle MCE + \angle ECD = \angle MCD = 90^\circ$. (*DC* loodrecht op *AC*)

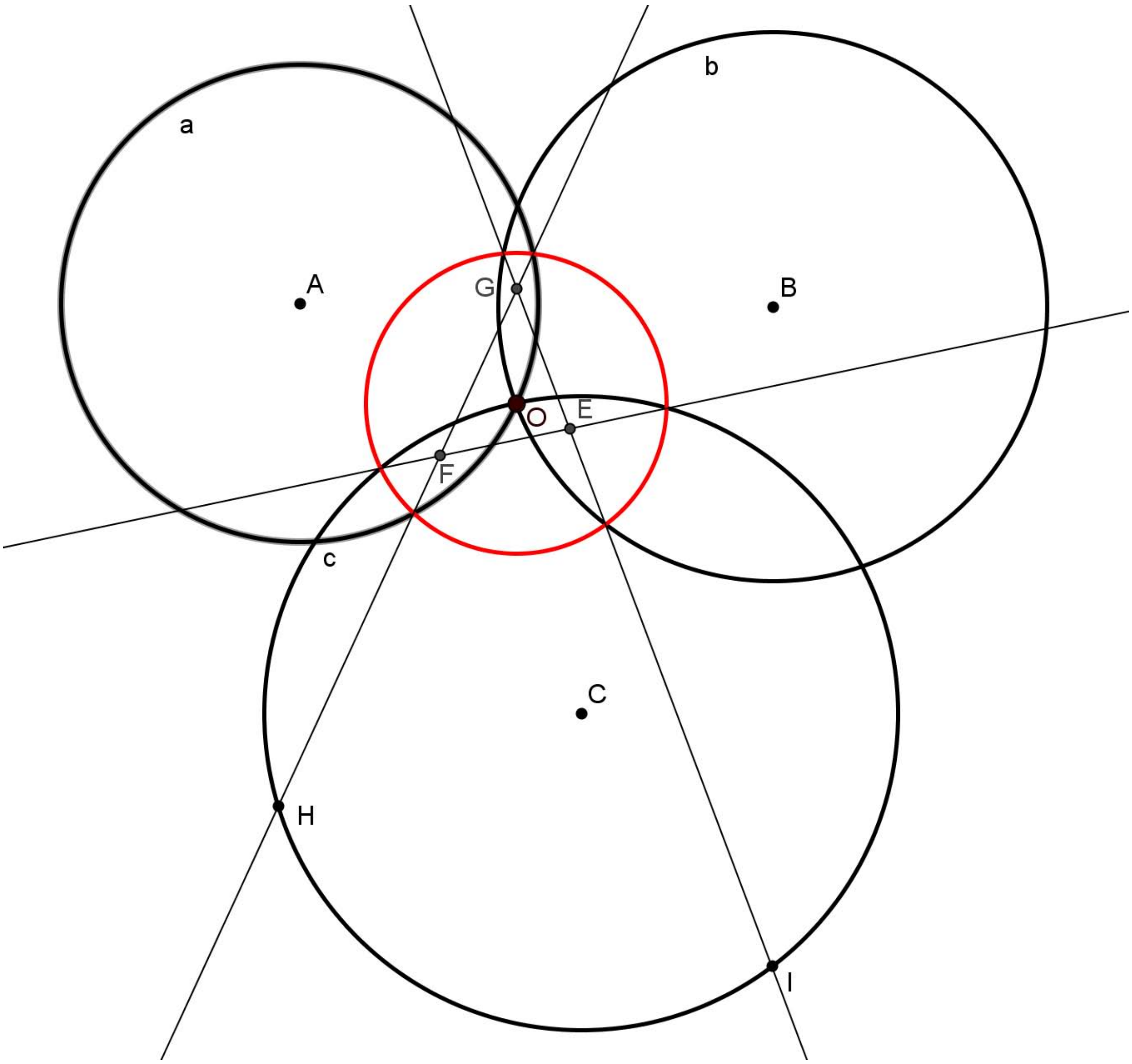
c. Het spiegelbeeld van lijn *EF* is een cirkel. Spiegelbeelden van de cirkels met *AC* en *BC* als middellijnen zijn twee evenwijdige lijnen die spiegelbeeld van *EF* raken. Lijn $E'F'$ staat loodrecht op de twee evenwijdige lijnen die loodrecht staan op lijn *AB*, dus lijn $E'F'$ is evenwijdig met lijn *AB*.

d. $\angle$ *EDF* = 90° dus volgens de stelling van Thales liggen de punten *E*, *D* en *F* op een cirkel met middellijn *EF*. Deze cirkel gaat ook door inversiecentrum *C*. Dus liggen de inversiebeelden E', D' en F' op het inversiebeeld van deze cirkel en dat is een rechte lijn.



Opgave 3.2.2

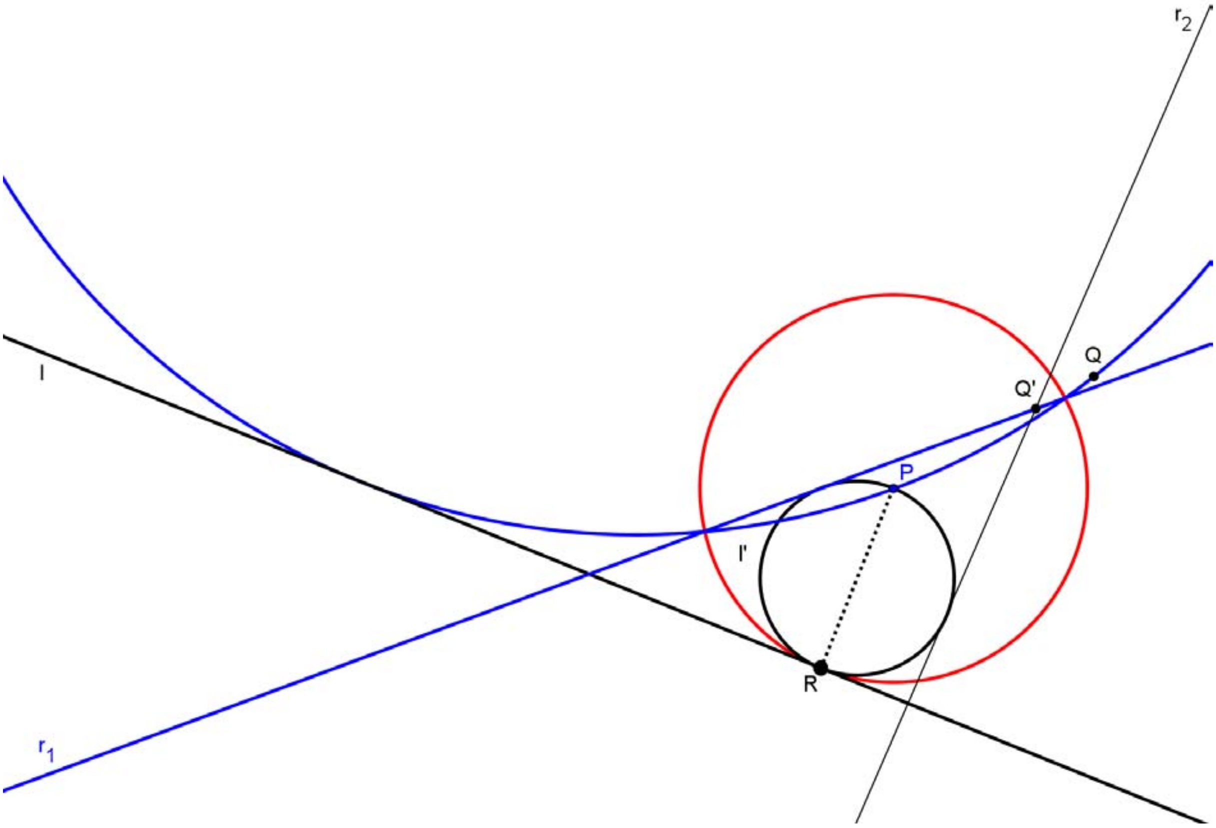
a. Zie schets.



b Kies centrum van inversie in punt *O*. De inversiebeelden van de drie cirkels zijn dan drie snijdende lijnen. Deze drie lijnen zorgen voor vier gebieden waaronder het binnengebied van driehoek *EFG* die elk begrensd worden door de inversiebeelden van de drie cirkels. Voor dit binnengebied hebben we de ingeschreven cirkel van ΔEFG . Het inversiebeeld hiervan is één van de vier gezochte cirkels.

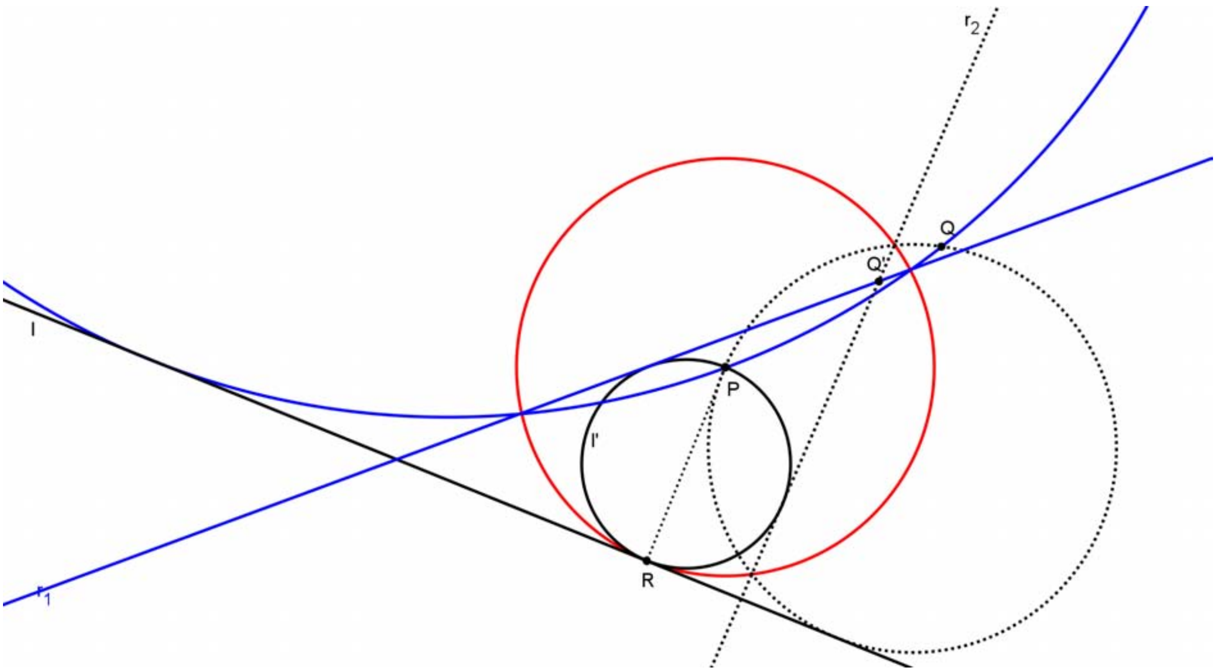
Er zijn drie buitengebieden. Bijvoorbeeld het gebied begrensd door halflijn *FH*, halflijn *EI* en lijnstuk *FE*. Bepaal het snijpunt van $\angle HFE$ en $\angle FEI$. Dit snijpunt is het middelpunt van de cirkel die raakt aan de drie grenslijnen. De straal wordt gevonden door vanuit dat middelpunt een loodlijn neer te laten op een van de drie grenslijnen.

Opgave 3.2.3



c. Raaklijn r_1 door punt Q' aan cirkel l' wordt geïnverteerd in een cirkel door inversiecentrum *P* en punt *Q* die raakt aan lijn *l*. Deze cirkel is dus één van de twee oplossingen.

d. Zie hieronder voor de tweede oplossing.\



Opgave 3.3.1

e. $(3-a)^2+b^2=(2+r)^2$ en $a^2+(4-b)^2=(3+r)^2$

f. $a=1-\frac{1}{3}r$ en $b=1-0,5r$

g,h Je vindt dan dat *r* ongeveer 0,26 is.

i. De uitdrukkingen van *a* en *b* invullen in: $a^2+b^2=(1+r)^2$. Dat geeft $(1-\frac{1}{3}r)^2+(1-\frac{1}{2}r)^2=(1+r)^2$. Vereenvoudiging geeft: $\frac{23}{36}r^2+\frac{11}{3}r-1=0$. En dat geeft tot oplossing *r*=-6 (vervalt) of $r=\dfrac{6}{23}$.

Coördinaten van het middelpunt: $a=\dfrac{21}{23}$ en $b=\dfrac{20}{23}$.

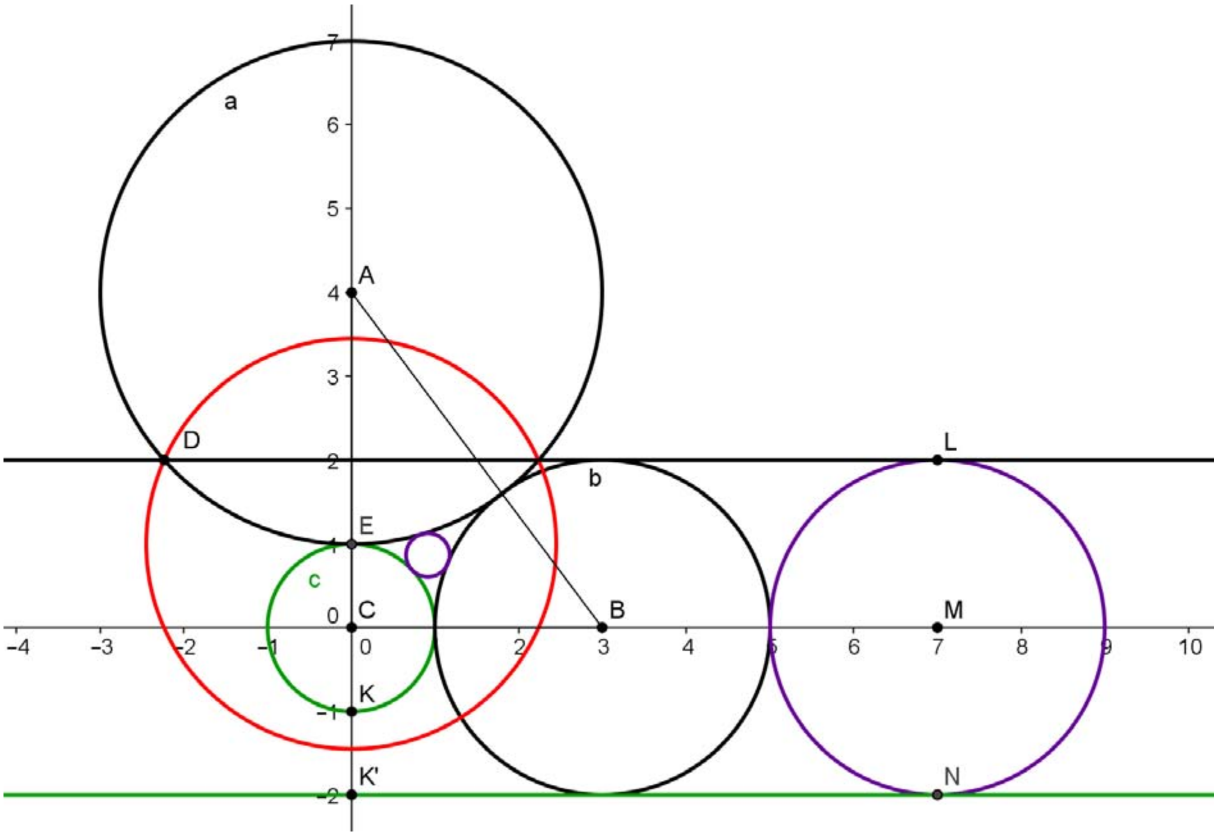
Opgave 3.3.2

b,c,d. We kiezen punt $E(0,1)$, raakpunt van cirkel *a* en cirkel *c*, uit tot inversiecentrum. Bij inversie worden de cirkels getransformeerd in twee evenwijdige lijnen die evenwijdig zijn met de X-as. Cirkel *b* wordt getransformeerd in een cirkel die de twee evenwijdige lijnen moet raken. We kunnen de straal van de inversiecirkel zo kiezen dat cirkel *b* invariant blijft. De evenwijdige lijnen, inversiebeelden van cirkels *a* en *c*, moeten dan zijn de lijnen *y*=-2 en *y*=2.

Punt *K*(0,-1) wordt afgebeeld op K'(0,-2). Straal van inversiecirkel noemen we ρ.

Er geldt $EK\cdot EK'=\rho^2$ dus $\rho^2=2\cdot 3=6$ en dat geeft $\rho=\sqrt{6}$.

Een cirkel die de drie inversiebeelden raakt is cirkel met als middelpunt *M*(7.0) en straal 2. Het inversiebeeld van deze cirkel is de gezochte cirkel. Middelpunt en straal van de gezochte cirkel noemen we achtereenvolgens M' en r'.



f. Berekening van de straal r' van de gezochte cirkel met behulp van inversie

$r' = \dfrac{\rho^2}{\mu} \cdot r$ waarbij r straal is van de cirkel met *M(*7, 0) als middelpunt. Er geldt: *r*=2

$\rho = \sqrt{6}$, straal van inversiecirkel met *E*(0, 1) als middelpunt.

μ is macht van inversiecentrum *E* tot cirkel met *M* als middelpunt.

$\mu = EM^2 - r^2 = 50 - 4 = 46$

$r' = \dfrac{6}{46} \cdot 2 = \dfrac{6}{23}$

Berekening van coördinaten van middelpunt van gezochte cirkel:

Punt *E* verplaatsen we met alle andere figuren 1 eenheid omlaag. Dan kunnen we de coördinaten van het middelpunt uitrekenen en daarna schuiven we alles weer 1 eenheid omhoog.

$M(7{,}0)$ wordt $M^* = (7, -1)$

$x_{M'} = \dfrac{3}{23} \cdot 7 + 0 = \dfrac{21}{23} \qquad y_{M'} = \dfrac{3}{23} \cdot (-1) + 1 = \dfrac{20}{23}$

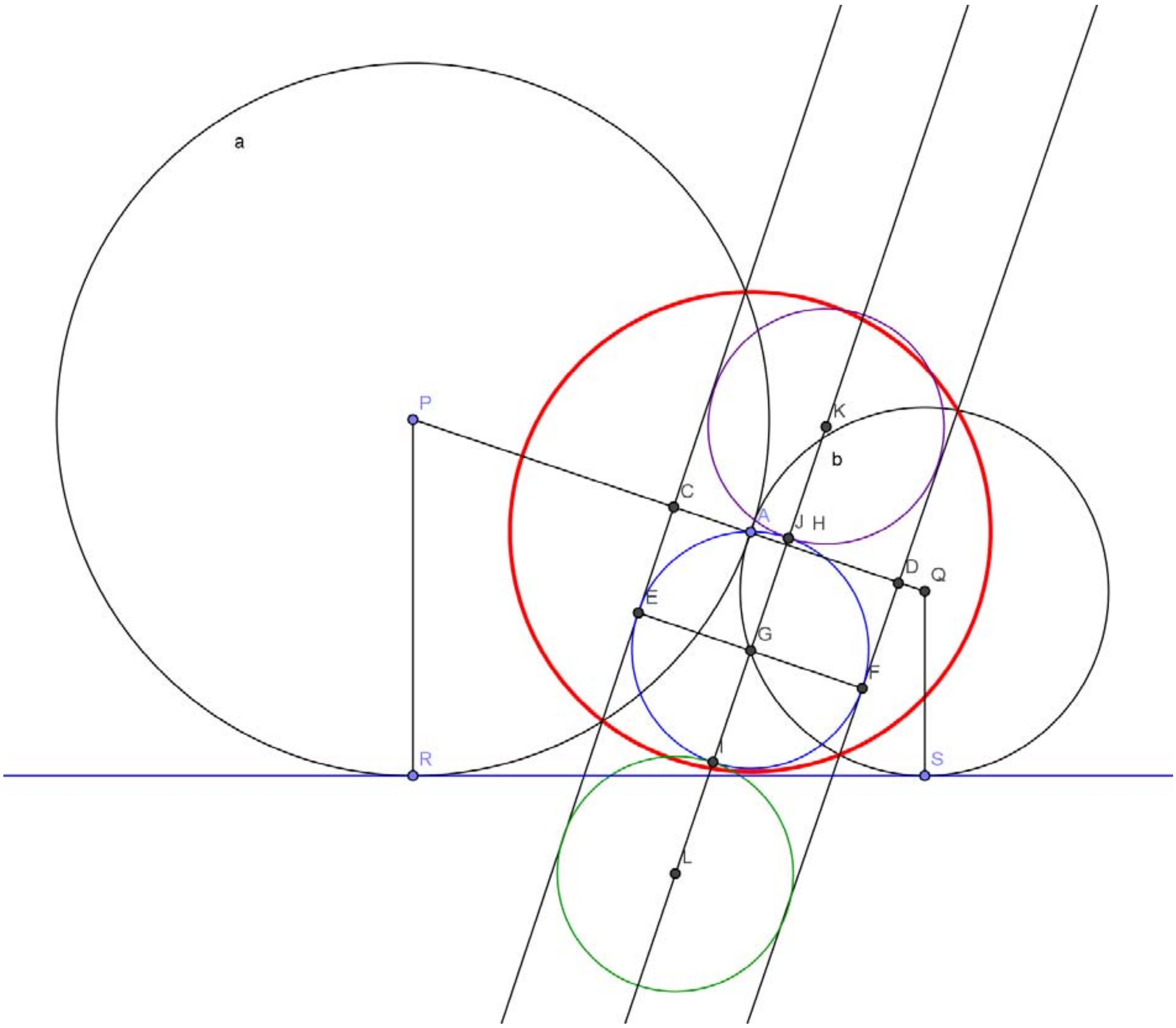
Opgave 3.3.3

b. Beide cirkels gaan door het inversiecentrum dus worden ze in lijnen geïnverteerd. De cirkels raken elkaar in punt *P* op lijn *AB*. Dus de twee lijnen zijn evenwijdig en staan loodrecht op lijn *AB.* Cirkel *c* raakt aan de cirkels *a* en *b* dus het inversiebeeld van cirkel *c*, dat zelf een cirkel is, raakt die twee evenwijdige lijnen.

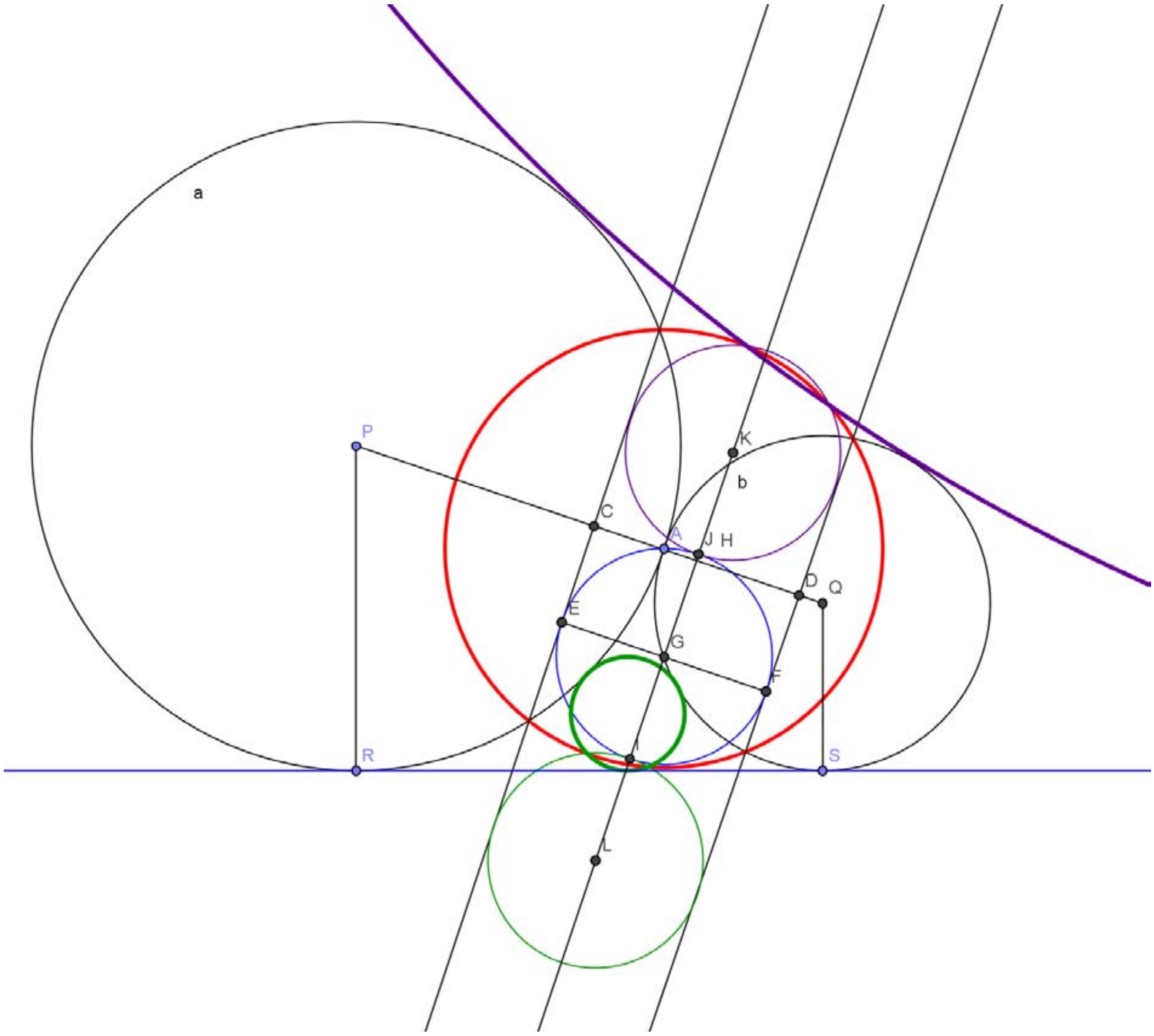
d. Zowel boven als onder cirkel c' zijn cirkels te tekenen die c' raken en de evenwijdige lijnen a' en b'.

e. De twee genoemde cirkels kun je nu inverteren. De geïnverteerde cirkels zijn de Soddy-cirkels.

Opgave 3.3.4



c. De beide cirkels worden geïnverteerd in twee evenwijdige lijnen die loodrecht staan op *PQ.* Lijn *RS* wordt geïnverteerd in een cirkel die de twee evenwijdige lijnen tot raaklijnen heeft.



b. Aan weerskanten van de inverse van lijn *RS* kun je rakende cirkels teken die ook raken aan de twee evenwijdige lijnen.

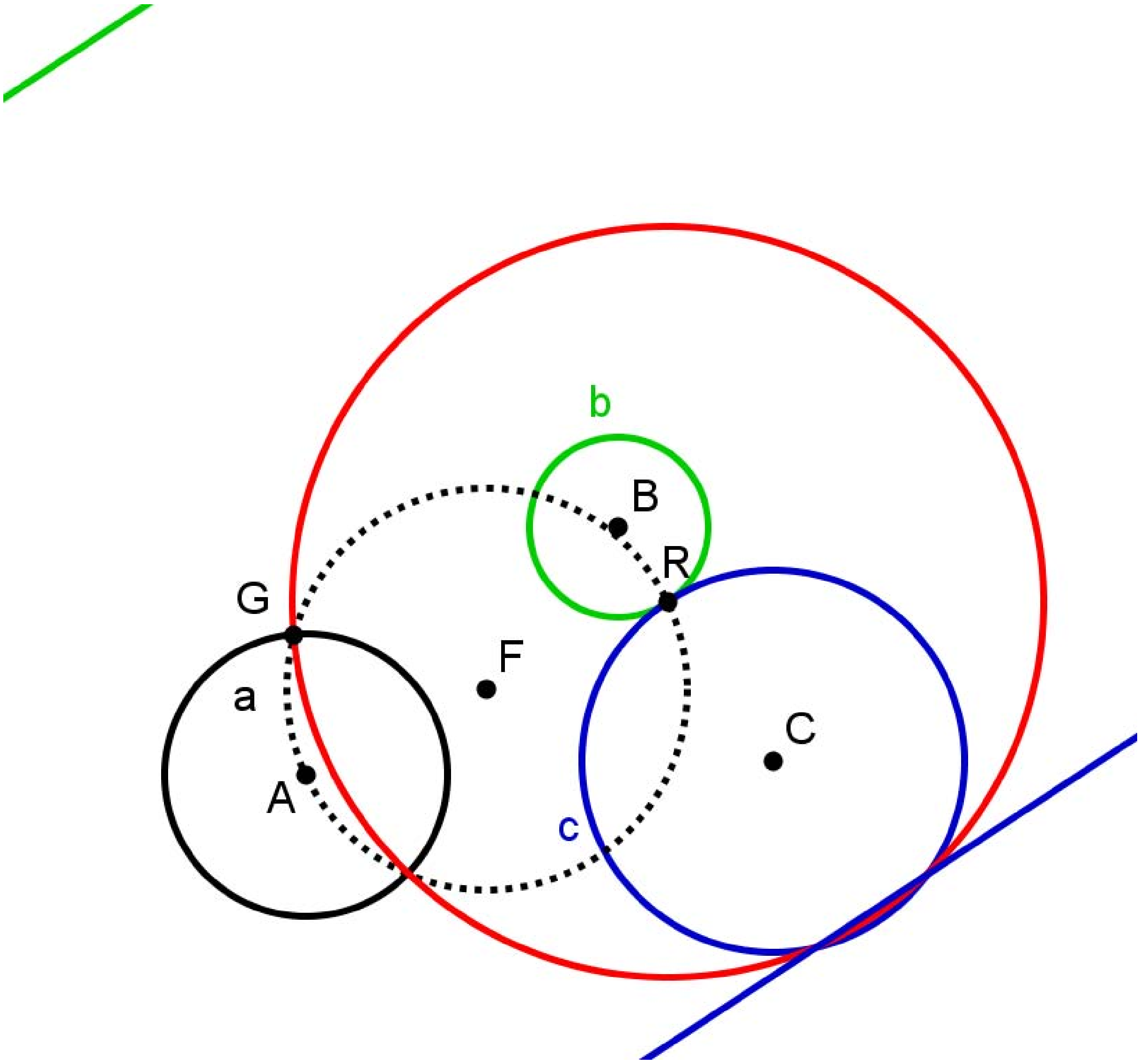
e. Deze cirkels inverteer je dan.

3.4 Meer raakproblemen van Apollonius oplossen

Opgave 3.4.1

Cirkel *b* en *c* worden getransformeerd in twee evenwijdige lijnen.

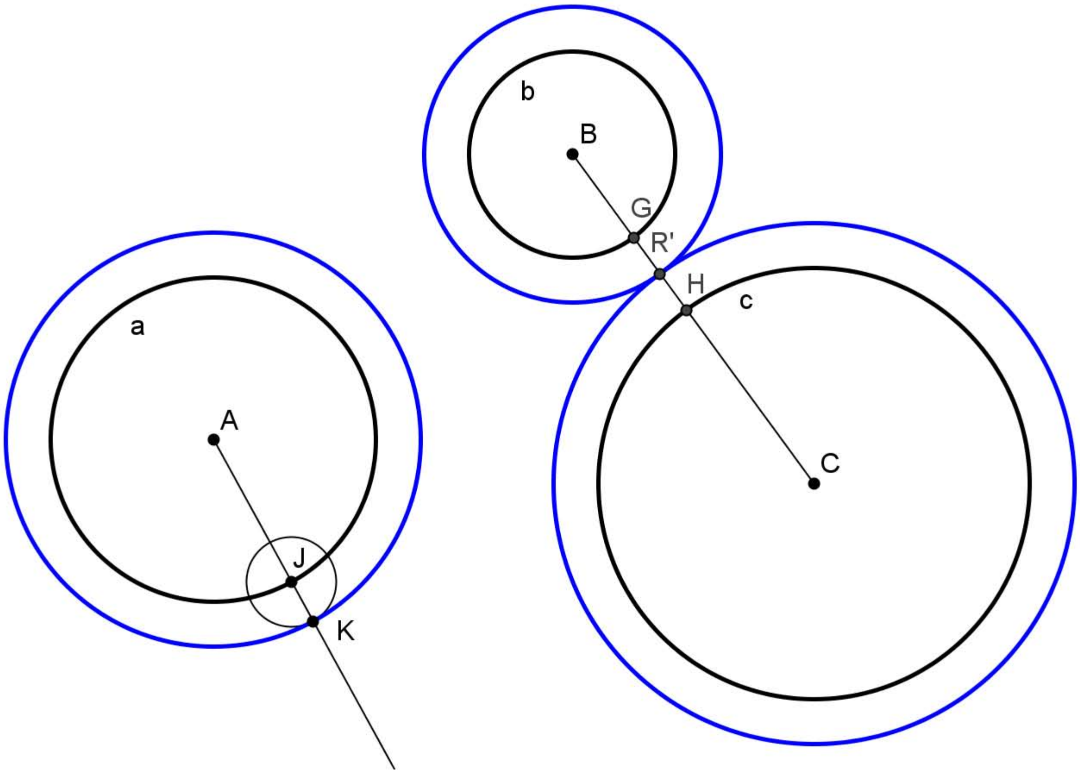
Teken een cirkel met *AR* als middellijn. Het snijpunt met cirkel *a* noemen we *G*. Neem als straal voor de inversiecirkel de lengte van *GR.* Inversiebeelden van de drie gegeven cirkels zijn nu twee evenwijdige lijnen en cirkel a. Zie onderstaande figuur.



Teken nu een cirkel die raakt aan deze drie figuren. Daarna deze cirkel weer inverteren.

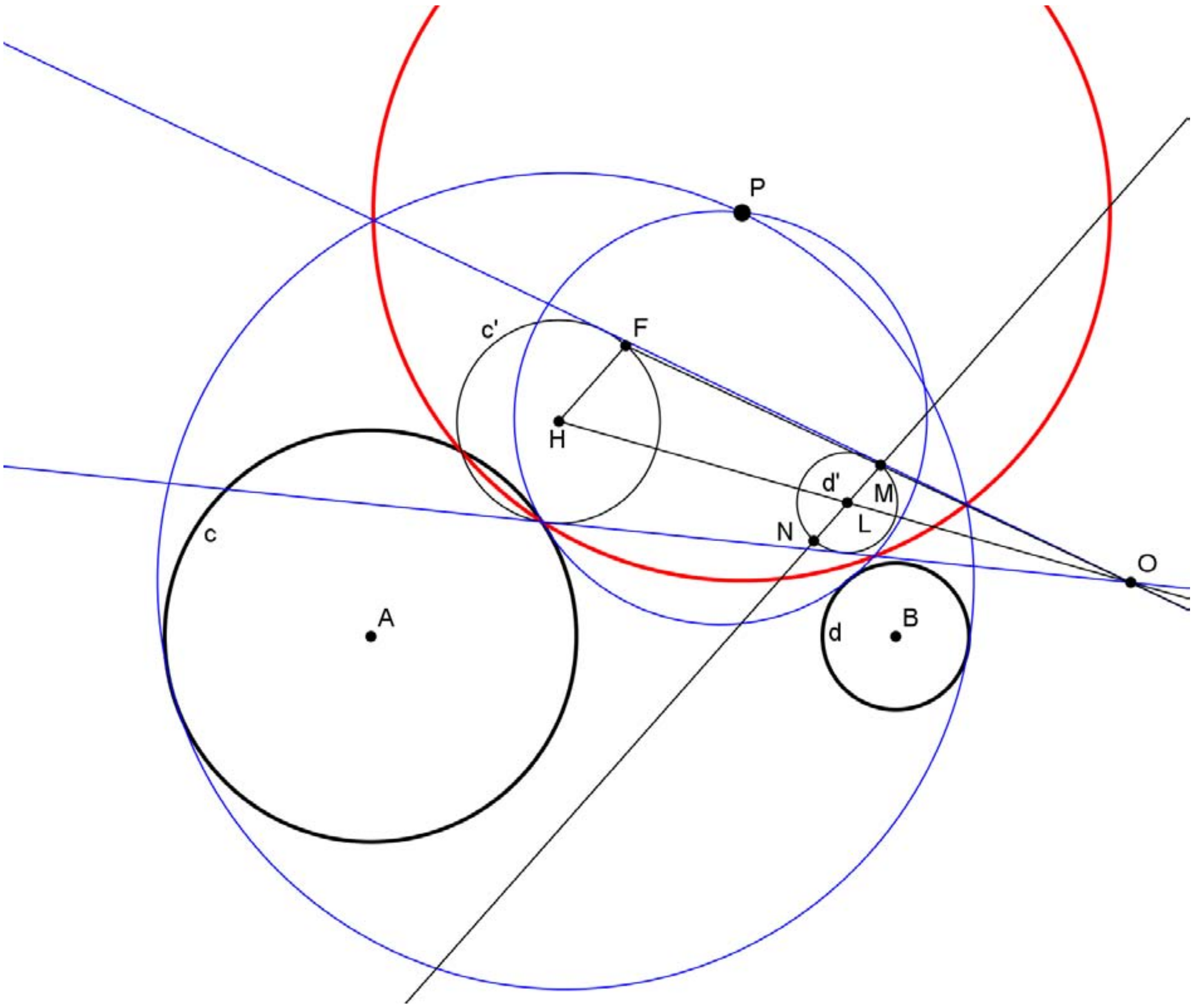
Opgave 3.4.2

Verbind punt *B* met punt *C*. Dit levert met de cirkels *b* en *c* de snijpunten *G* en *H* op. Punt R' is het midden van *GH*. Het getal *x* is de helft van de lengte van *GH*.



Het probleem is nu teruggebracht tot het probleem van opgave 3.4.1.

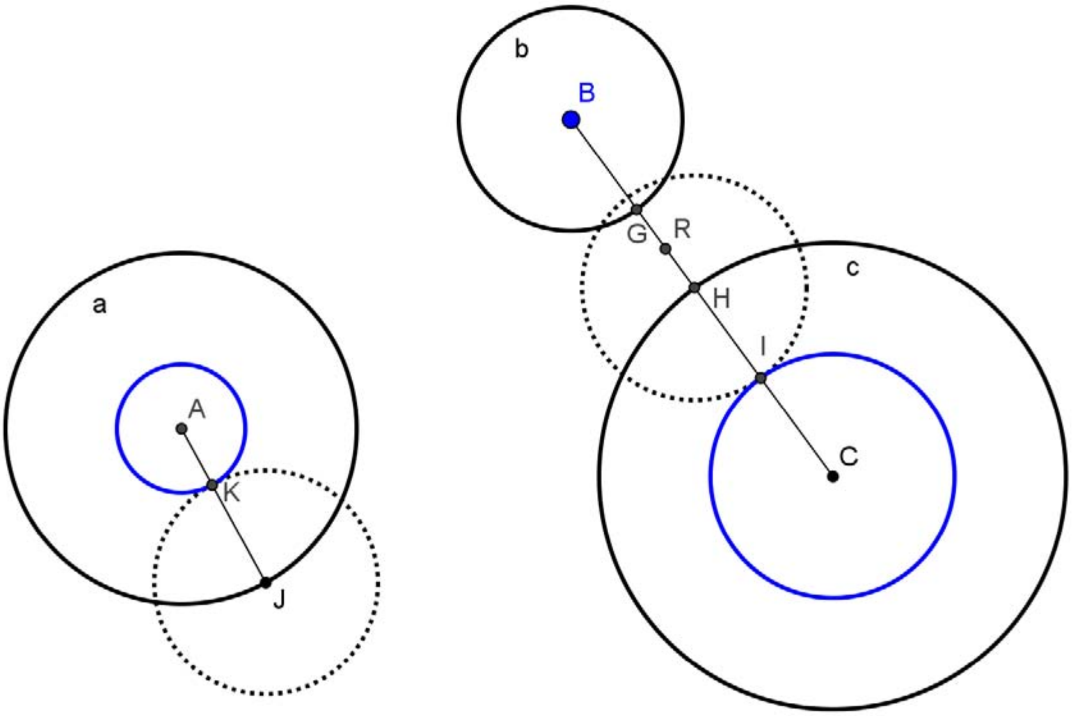
Opgave 3.4.3



- Teken een cirkel met punt *P* als middelpunt.
- Teken de inversiebeelden van de cirkels *c* en *d*. Dat geeft de cirkels c' en d'.
- Teken de twee raaklijnen. Zie tekening. (zie zo nodig voor de constructie van punt *O* appendix 2).
- Inverteer de twee raaklijnen. Dat levert twee mogelijke raakcirkels op.

Opgave 3.4.4

De stralen van de drie cirkels worden verkleind met de straal van cirkel *b*. Zie onderstaande tekening. Het probleem is nu teruggebracht tot het probleem van opgave 3.4.3.



Opgave 3.4.5

b. Inversiecirkel tekenen met punt *P* als middelpunt, orthogonaal op *c* waardoor cirkel *c* invariant blijft.

Teken het inversiebeeld van lijn *a* (dat is een cirkel) en noem deze a'.

Nu raaklijnen tekenen aan beide cirkels a' en *c*. De inversiebeelden van deze raaklijnen zijn de gezochte raakcirkels.

Onderzoeksopdracht

Hiervan geven we geen uitwerking.

3. 5 Cel van Peaucellier onderzoeken

Opgave 3.5.1

a. De stangen kun je ook maken uit roerverfhoutjes. Deze zijn vaak gratis in de (verf)winkel verkrijgbaar.

b. De afstand *A* tot punt M blijft onveranderd.

c. Als dat product constant is kun je dat opvatten als het kwadraat van de straal van een inversiecirkel.

d. $OA \cdot OC = (OS - AS) \cdot (OS + SC) = (OS - AS) \cdot (OS + AS) = OS^2 - AS^2$

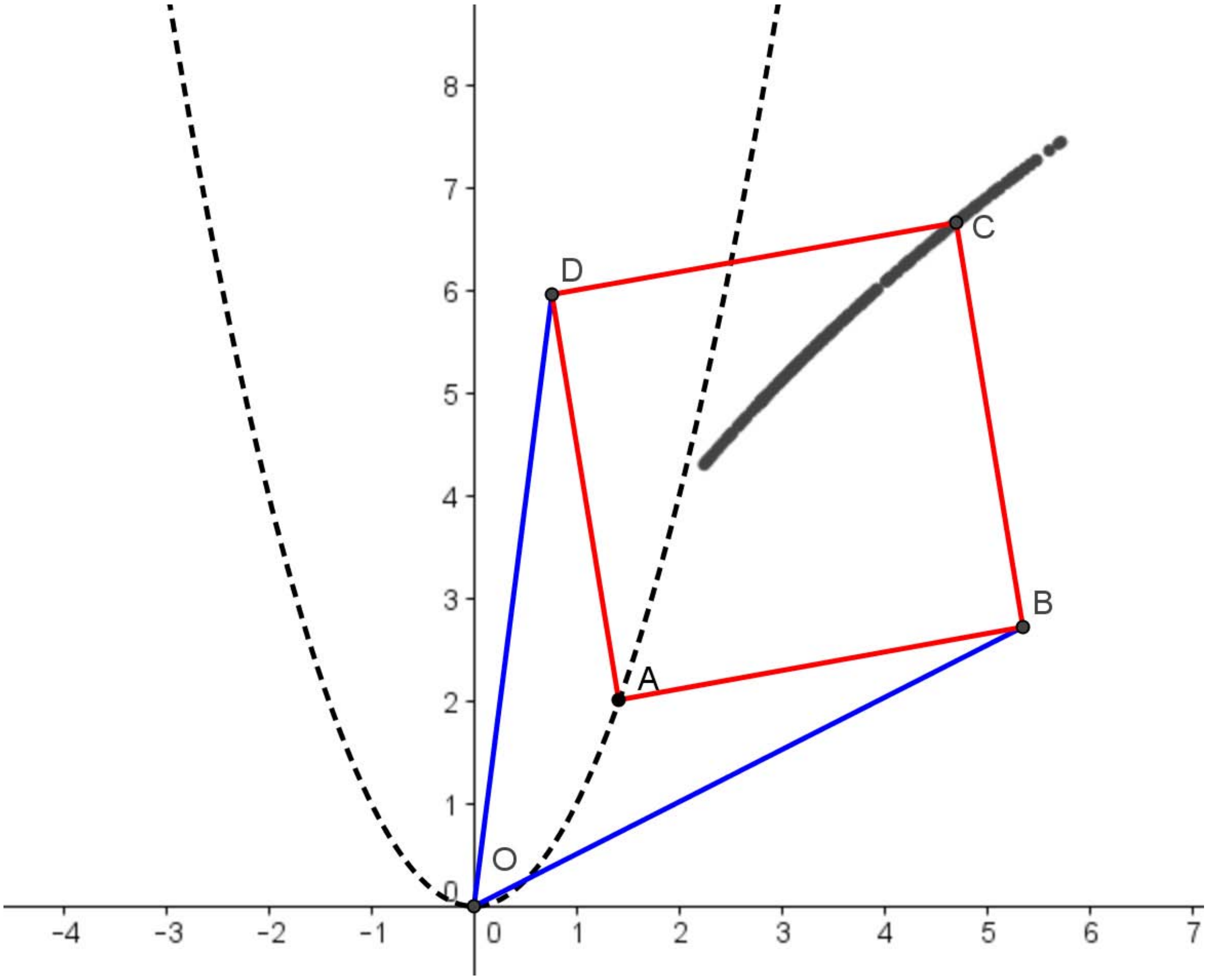
$OS^2 - AS^2 = (OD^2 - DS^2) - (AD^2 - DS^2) = OD^2 - AD^2$. Lengtes van de stangen zijn constant. Dus verschil van deze kwadraten is een constante.

e. Punt *C* is inversiebeeld van punt *A* bij een cirkelspiegeling waarbij *O* het inversiecentrum is en de straal van de inversiecirkel gelijk is aan $\sqrt{OS^2 - AS^2}$. Het spoor van punt *C* is rechtlijnig omdat punt *A* een cirkelbeweging door *O* maakt.

3.6 Inversiebeelden van parabolen en hyperbolen bepalen

Opgave 3.6.1

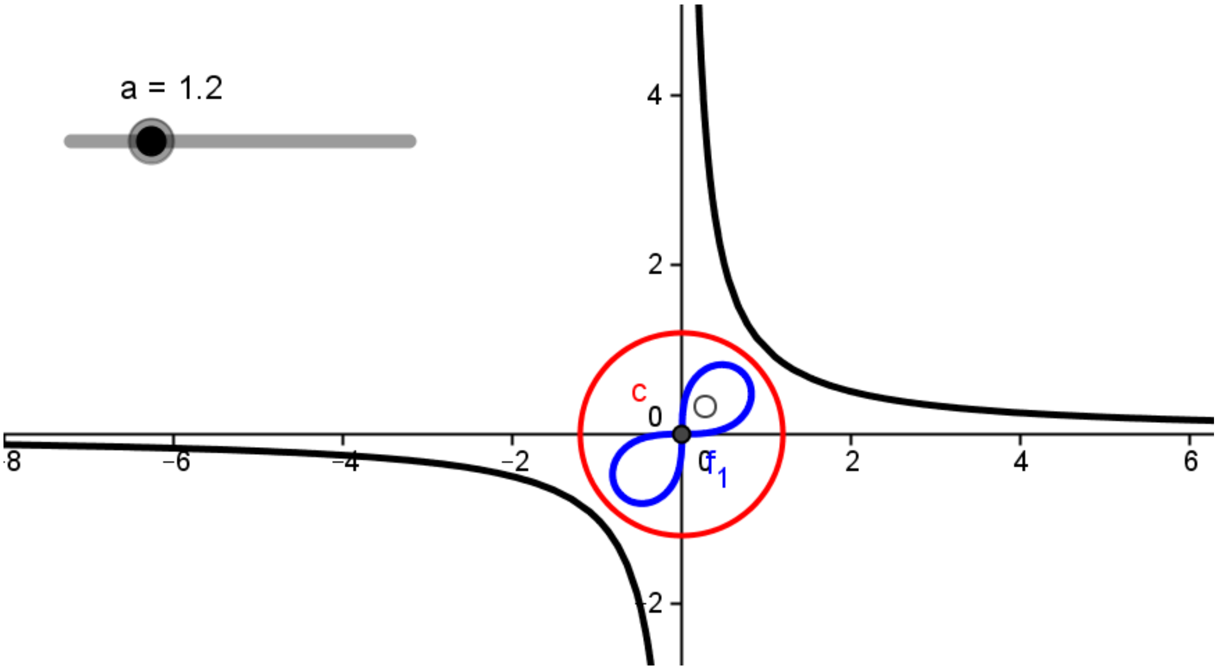
a.

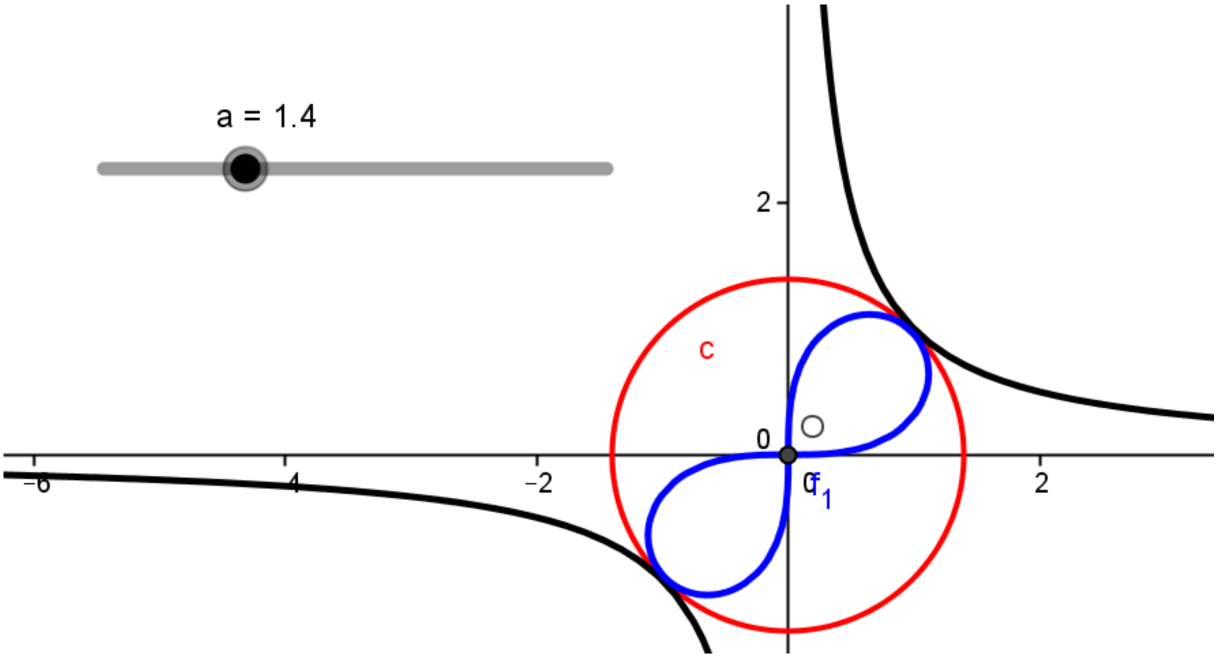


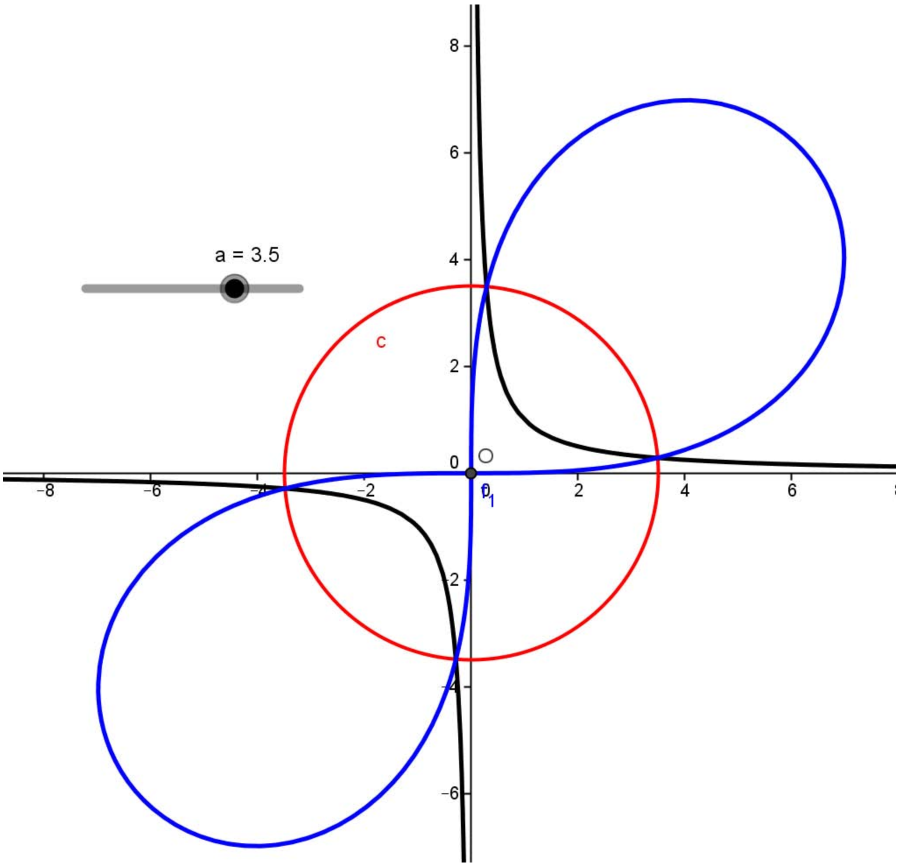
b. Die kromme heet de cissoïde van Diocles. Deze kromme heeft te maken met het probleem van de verdubbeling van de kubus.

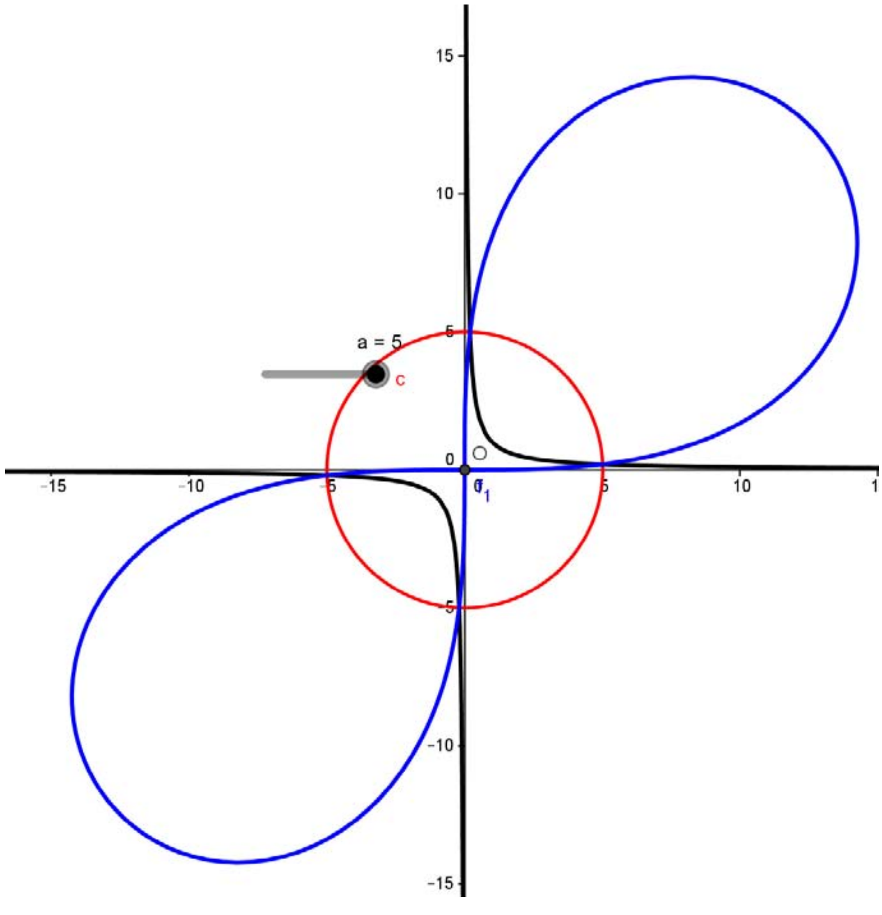
c. Het spiegelbeeld van een hyperbool levert een Lemniscaat op. Je kunt ook kiezen voor een onderzoek van het inversiebeeld van een ellips.

Opgave 3.6.2



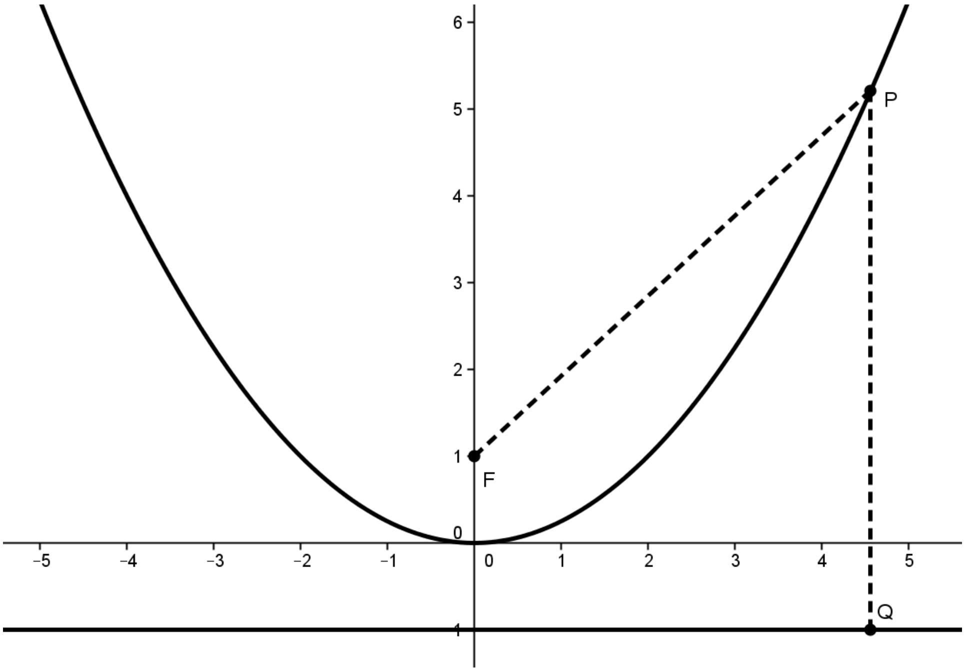



a = 3.5
c


a = 5
c

Opgave 3.6.3

a.



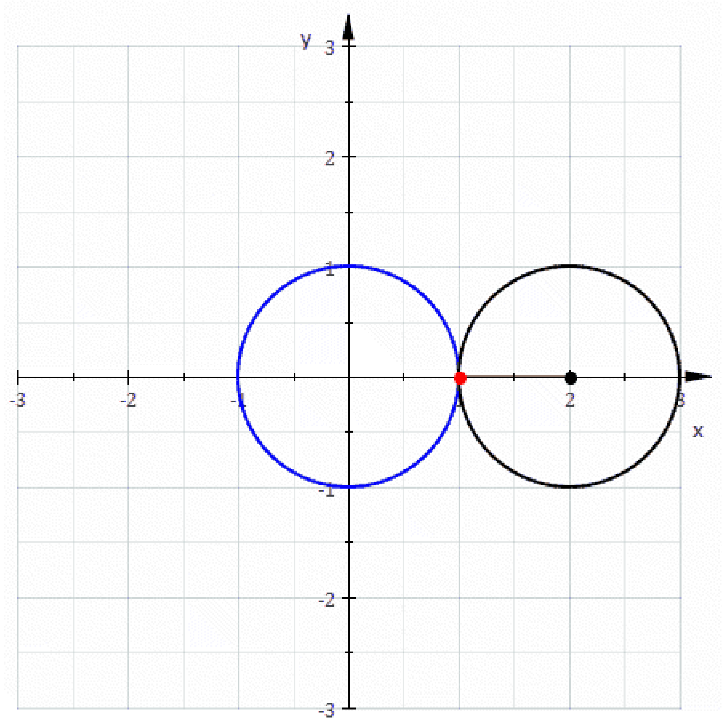
Het getallenpaar van een willekeurig punt P op de parabool is $(x, \frac{1}{4}x^2)$.

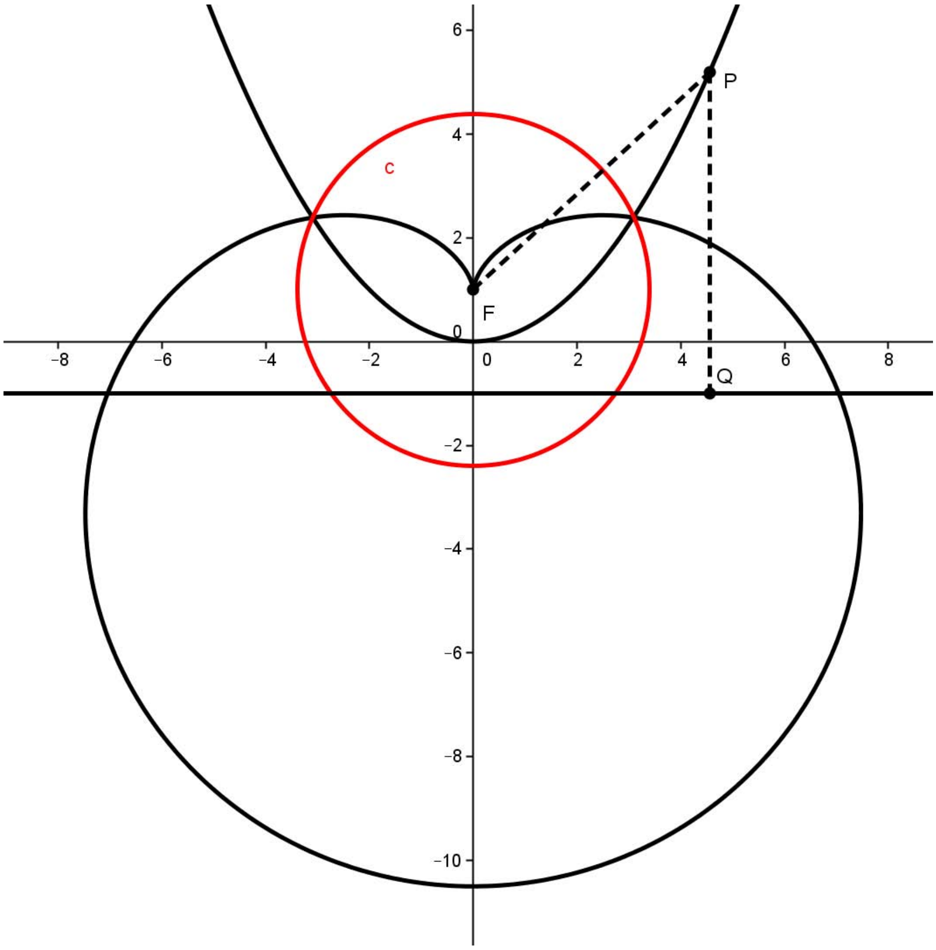
$d(P,F) = \sqrt{(x-0)^2 + (\frac{1}{4}x^2 - 1)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1} = \sqrt{(\frac{1}{4}x^2 + 1)^2} = \frac{1}{4}x^2 + 1$

$d(P,r) = \frac{1}{4}x^2 + 1$

Dus $d(P,F) = d(P,r)$

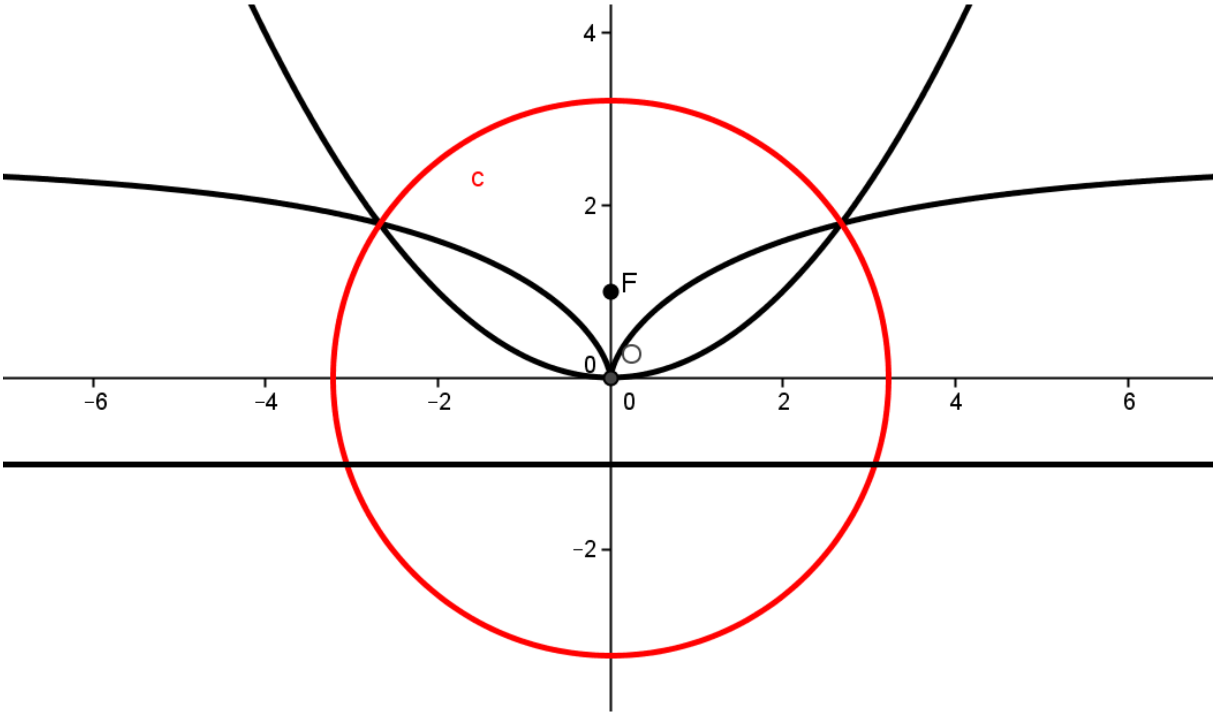
b. Hartkromme of Cardioïde.





d. Het blijft een hartkromme.

e. Cissoïde.

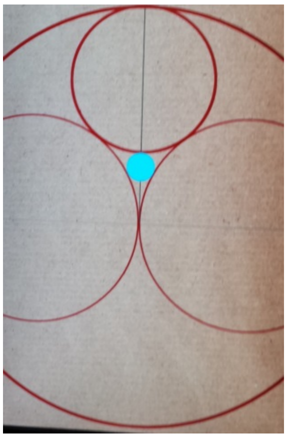


Extra onderzoeksopdracht met uitwerking

GEO - Keten van Pappos

Op YouTube staat een filmpje over de inversie van cirkels. Het gaat over “Pappus chain”. Pappos van Alexandrië was een Griekse wiskundige die leefde in de derde eeuw na Christus. Wiskundige Simon Pampena uit Australie, zie figuur E1, legt enthousiast wat fraaie eigenschappen uit.

Figuur E1



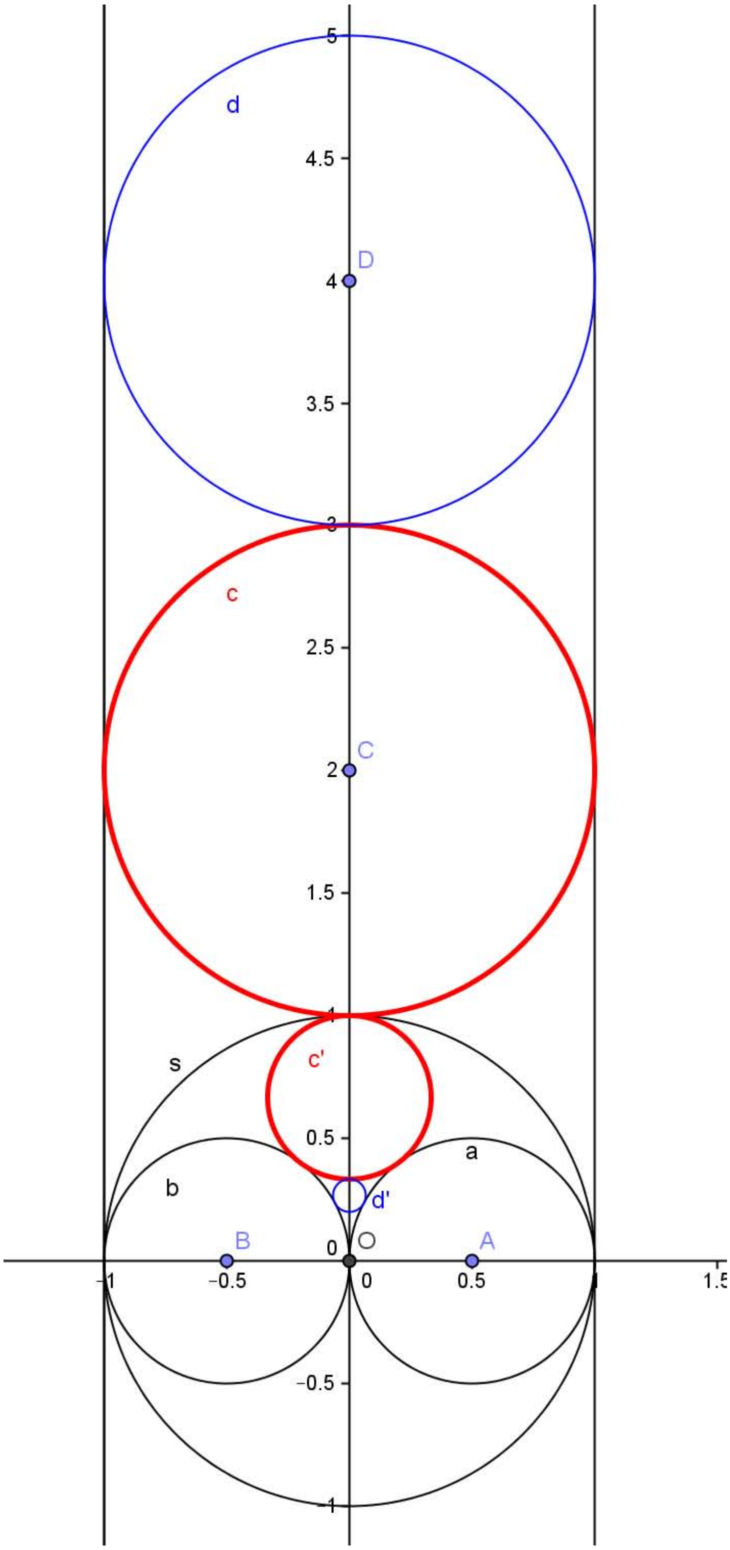
Figuur E2

Figuur E3

- **a.** Zoek op internet “ epic circles numberphile”, upload en bekijk de film aandachtig.
- **b.** Teken in het tekenvenster van GeoGebra een cirkel met straal 1 en binnen die cirkel twee elkaar rakende cirkels met straal 0,5. Deze drie cirkels raken elkaar dus onderling.
- **c.** Construeer het blauwe cirkeltje, zie figuur E2, met behulp van inversie.
- **d.** Ga na dat de straal van de blauwe cirkel gelijk is aan $\frac{1}{15}$.
- **e.** Doe een onderzoek naar de “ keten van Pappos”. Ontwerp zo’n keten.

Uitwerking

- **a.** Nagaan waar de film overgaat.
- **b.** Zie tekening. Cirkel *s* heeft straal 1. Middelpunt is *O* de oorsprong.Cirkels *a* en *b* hebben stralen 0,5. De middelpunten zijn *A*(0,5 , 0) en *B*(-0,5, 0).
- **c.** Construeer eerst cirkel die raakt aan de cirkels *a*, *b* en *s*. Kies cirkel *s* tot inversiecirkel. Cirkels *a* en *b* worden geïnverteerd in twee evenwijdige rechte lijnen die loodrecht staan op lijn *AB*. We moeten nu een cirkel construeren die die lijnen raakt en tevens de inversiecirkel. We tekenen cirkel *c* met middelpunt (0,2) en straal 1. c' is de inverse van cirkel *c*. Het blauwe cirkeltje is een cirkel die de cirkels c', *a* en *b* moet raken. Hiervoor tekenen we cirkel *d* die raakt aan de evenwijdige lijnen a' en b' en aan cirkel *c*. Deze cirkel heeft straal 1 en middelpunt *D*(0,4). Vervolgens inverteren we cirkel *d*. d' is de gezochte blauwe cirkel. Zie hier onder.



d. Blauwe cirkel d' kun je verkrijgen uit *d* door een vermenigvuldiging vanuit *O*.

De vermenigvuldigingsfactor is $\dfrac{\text{straal}^2}{\text{macht van } O} = \dfrac{1^2}{16-1} = \dfrac{1}{15}$.

Straal van d' is dus $\dfrac{1}{15} \cdot 1 = \dfrac{1}{15}$.

Uitwerkingen Appendix Inversie bekeken vanuit een complex standpunt

Opgave A.1

a.

- Verschuiving drie naar rechts en twee omhoog.
- Spiegeling in X-as.
- Projectie op Y-as

b. $f(z) = -\overline{z}$; $f(z) = -z$

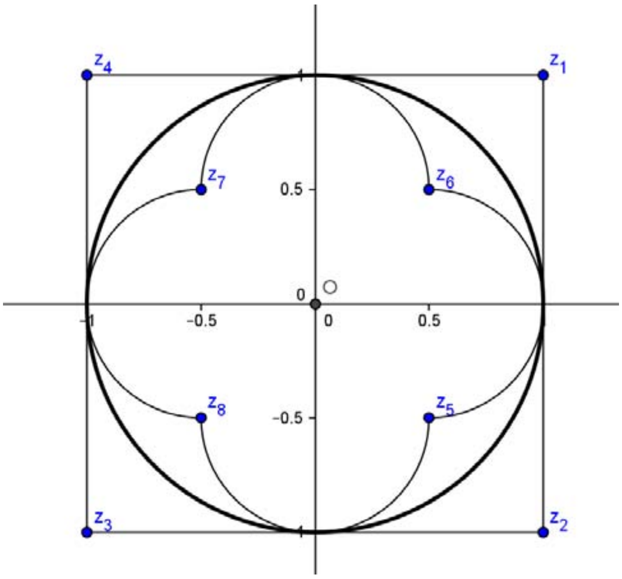
Opgave A.2

a. $f(z) = \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{a-bi} = \dfrac{a+bi}{(a-bi)(a+bi)} = \dfrac{z}{a^2+b^2} = \dfrac{z}{\left|z^2\right|}$.

b. $OP \cdot OP' = 1$; z en $\dfrac{z}{\left|z^2\right|}$ liggen op halflijn OP. Factor $\dfrac{1}{\left|z^2\right|}$ is immers positief.

Opgave A.3

a. En c.



b. $f(1+i) = \dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1}{1-i} \cdot \dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{1+i}{2} = 0.5 + 0.5i$;

$f(1-i) = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{1+i} \cdot \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{1-i}{2} = 0.5 - 0.5i$;

$f(-1-i) = \dfrac{1}{-1+i} = \dfrac{1}{-1+i} \cdot \dfrac{-1-i}{-1-i} = \dfrac{-1-i}{2} = -0.5 - 0.5i$;

$f(-1+i) = \dfrac{1}{-1-i} = \dfrac{1}{-1-i} \cdot \dfrac{-1+i}{-1+i} = \dfrac{-1+i}{2} = -0.5 + 0.5i$

Opgave A.4

a. Herschrijf $z \cdot \bar{z} - 3i \cdot \bar{z} + 3i \cdot z = 16$ tot $z \cdot \overline{z} - 3i \cdot \overline{z} + 3i \cdot z + 3i \cdot (-3i) + 3i \cdot 3i - 16 = 0$.
Vervolgens: $z \cdot \overline{z} - 3i \cdot \overline{z} + 3i \cdot z + 3i \cdot (-3i) - 9 - 16 = 0$
met w=3i en $r^2 = 25$.

b. Middelpunt is (0,3) en de straal is gelijk aan vijf.

Opgave A.5

a. $\overline{z}$ wordt vervangen door $\dfrac{1}{u}$.

b. $w = \dfrac{5i}{16}$ en $w \cdot \overline{w} = \dfrac{25}{16^2}$.

c. Middelpunt is $(0, \dfrac{5}{16})$ en $r = \dfrac{3}{16}$.

Opgave A.6

a. Macht van *O* ten opzichte van cirkel *c*= $2 \times 8 = 16$. Eenheidscirkel. Dus *r*=1.

b. Punt *N* ligt op de y-as omdat punt *M* op de y-as ligt.

c. Vermenigvuldigingsfactor=$\dfrac{r^2}{m} = \dfrac{1}{16}$. $r' = \dfrac{1}{16} \cdot 3 = \dfrac{3}{16}$.

d. $y_N = \dfrac{1}{16} \cdot 5 = \dfrac{5}{16}$

e. Klopt.

f. $ON \cdot OM = \dfrac{5}{16} \cdot 5 = \dfrac{25}{16}$.

Opgave A.7

a. Afstand van middelpunt *w* tot oorsprong is gelijk aan straal *r*. $w \cdot \overline{w} - r^2 = r^2 - r^2 = 0$.

b. Beeld noemen we *u*. origineel is dan $\dfrac{1}{\overline{u}}$. Invullen geeft: $\dfrac{1}{\overline{u}} \cdot \dfrac{1}{u} - w \cdot \dfrac{1}{u} - \overline{w} \cdot \dfrac{1}{\overline{u}} = 0$.
Herschreven: $1 - w \cdot \overline{u} - \overline{w} \cdot u = 0$.

c. Deze vergelijking geeft een lineair verband aan. Dit kun je inzien door de twee complexe getallen uit te schrijven: *w*=*c*+*di* en *u*=*a*+*bi*.
Invullen in vergelijking $1 - w \cdot \overline{u} - \overline{w} \cdot u = 0$ geeft na vereenvoudiging: 1-2*ac*-2*bd*=0.
ac+*bd*=0.5. Algemene lijnvergelijking is: *ax*+*by*=c.