Uitwerkingen bij de opgaven van

'De Ster van de dag gaat op en onder'

Startopgave

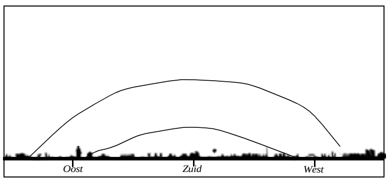
Google Maps geeft bijvoorbeeld 52.382306, 6.644897. Mocht je niet bekend zijn met de begrippen *Noorderbreedte* en *Oosterlengte*, zoek ze dan eerst op in bijvoorbeeld Wikipedia.
1° verplaatsing in noordelijke richting stelt 111 kilometer voor. De laatste 6 in de Noorderbreedte gaat dus om 60 centimeter! Twee decimalen is hier genoeg.
(In het hele boekje werken we hoofdzakelijk met hele en decimale graden, zoals in het voorbeeld van Google maps).

Deel I: Oriëntatie en daglengte

1. Wat weet je van de beweging van de zon?

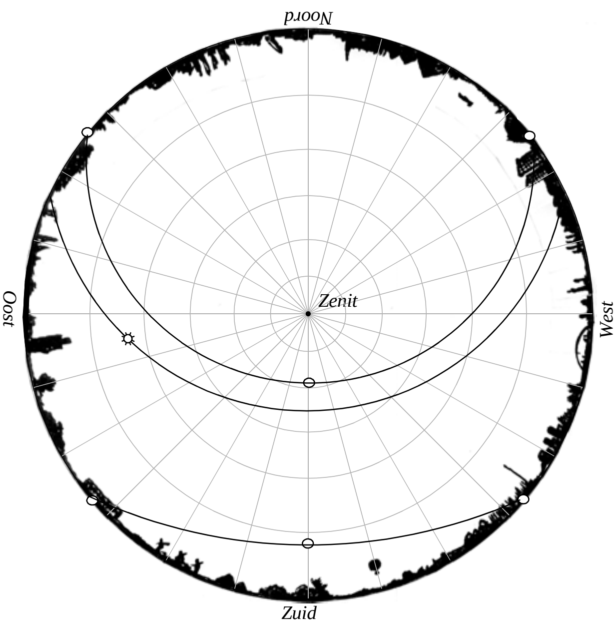
a. In Nederland van links naar rechts. Rond de evenaar kan zowel links naar rechts als rechts naar links voorkomen. Zuidelijker (voorbij de steenbokskeerkring): van rechts naar links.
b. Van Oost naar West. Overal.
c. De plek wisselt. 's Zomers (bij ons) dichterbij het Noorden, 's winters dichter bij het Zuiden.
d. Op het zuidelijk halfrond gaat de zon in dezelfde periode als bij ons dichter bij het Noorden op. Maar daar is het in onze zomerperiode periode juist winter. Ook op de evenaar beweegt het opgangspunt van de zon noord- en zuidwaarts. Op de Noordpool is het anders. Eigenlijk heb je een periode van een half jaar waarin de zon op is en een periode van een half jaar waarin de zon onder is.
e. In graden.
f. Minimum ongeveer 15 graden, maximum ongeveer 60 graden.

Opgave 1.1. Twee geschetste boogjes voor Nederland. De bovenste is van een lange, warme dag.



2. De zichtbare hemel op een cirkelvormige kaart

Opgave 2.1.



De uiterste zomer- en winterbaan van de zon zijn toegevoegd.

3. De ster van de dag en de zonnen van de nacht

4. Intermezzo: aarde-maan-zon-ster op schaal

Opgave 4.1.
Op de schaal waarop de aarde een tien eurocent muntje is. Ongeveer:
- de maan: een doperwt op 25 cm afstand,
- de zon: een fietswiel op 75 meter afstrandje,
- Proxima Centauri, zo groot als een sinaasappel, ligt in Pakistan (5000 km ver).

Opgave 4.2.
a. 8 *lichtminuten*
b. 2.5 *lichtseconden*

5. Theaterkoepel hogere sferen: de hemelbol

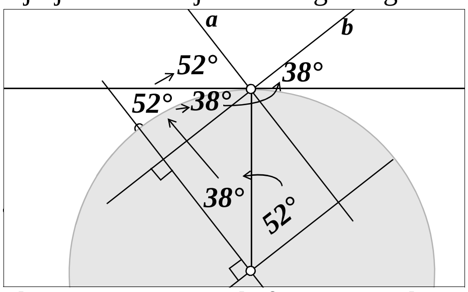
Opgave 5.1.
a. Onder ongeveer een halve graad.
b. Dat klopt, ongeveer. Maar doordat zowel de maan als de zon niet altijd helemaal precies op de zelfde afstand van de aarde zijn, varieert het een beetje.

Bij een zonsverduistering gaat de maan even voor de zon langs. De maan zelf zie je dan als een donkere schijf vóór de zon. Het kan zijn dat je de zon dan helemaal niet meer ziet, maar het kan ook voorkomen dat je nog net de buitenkant van de zon als een ring om de maan ziet.

c.

d. Nee. Mogelijke verklaringen op: http://hemel.waarnemen.com/FAQ/Maan/001.html

Opgave 5.2.
De lijntjes *a* en *b* zijn hier toegevoegd.



Zie de tussenstapjes in de figuur voor de verklaring van *Poolshoogte* = *Noorderbreedte*.

Opgave 5.3.

a. Tegen de klok in.

b. Met de klok mee.
Gebruik de zon als voorbeeldster in de figuur van de hemelbol. Kijk je vanaf punt *Jij* naar de *Noordpool*, dan gaat de zon *rechts van je* omhoog. Dus draait de hemelbol dan tegen de klok in. Kijk je naar het zuiden dan draait de zon (bij ons) met de klok mee, want dan gaat de zon rechts van je - in het westen -onder.

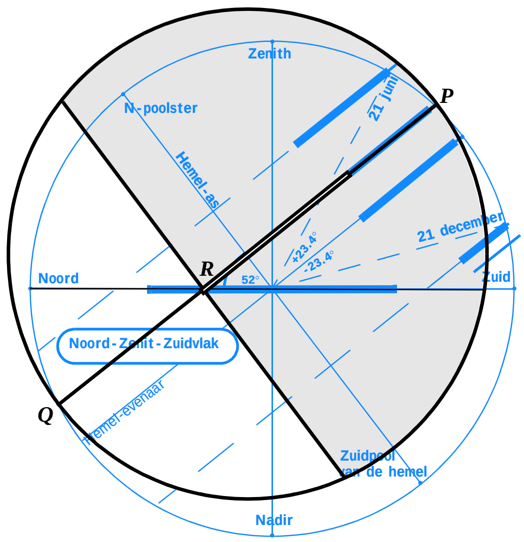
Aanvulling:
Op de hemelbol bewegen sterren en zon over cirkels; de cirkels hebben een gemeenschappelijke as: de poolas. Bij de ronde sterrenkaart in opgave 2.1 verschijnen de drie banen van de zon ook als cirkels; dat komt de afbeelding van de schijnbaar bolle hemelbol op een vlakke kaart op een speciale manier is gemaakt, via stereografische projectie. Cirkels op de bol worden dan cirkels of lijnen op de vlakke kaart. Het is op de kaart van 2.1 níet zo dat die cirkels hetzelfde middelpunt hebben! Als je dit beter wilt begrijpen, moet je iets opzoeken over *stereografische projectie*. Bijvoorbeeld op Wikipedia. Maar een mooier bewijs staat in http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/6627.pdf

6. Hoogte van de zon en variatie van de lengte van de dag

7. Hemelbol en dagbogen in 3D; eerste daglengtebepaling

Opgave 7.1. Je krijgt het papieren *evenaarvlak* heelhuids zonder vouwen door het *meridiaanvlak* als je het oprolt, één helft door de spleet in het meridiaanvlak steekt en dan weer voorzichtig vlak maakt zo gauw de helft door het gat is.
Je model wordt steviger en ook mooier als je een paar kleine stukjes doorzichtig plakband strategisch aanbrengt: verbind de dagbogen met het horizonvlak vlakbij de horizoncirkel.

Opgave 7.2. De diameter van de cirkel die nodig is, kan op de bouwplaat worden opgemeten: 11.9 cm. De hoogte van het stuk ook: 7.2 cm. In onderstaande (schaal 1 : 2) figuur zijn dat *PQ* en *PR*. Op de lichte achtergrond zie je waar die punten in het Noord-Zenit-Zuidvlak te vinden zijn.
De gearceerde figuur is de bedoelde dagboog.



8. De culminatie van de zon berekenen

Opgave 8.1.

a. 38°+ 0°, 38°+ 23.4°, 38°+ 0°, 38°– 23.4°.
Ofwel:38°, 61.4°, 38°, 14.6°.

b. De hoek tussen evenaarcirkel en horizon is 90° – *NB*. Voor de hoogte van de zon komt daar de declinatie δ bij.Vandaar 90° – *NB* + δ.

c. Invullen in de formule. Bijvoorbeeld 21 december, δ = –23.4°.

Rome:	90 – 41.9 + (-23.4) = 24.7°
Spitsbergen:	90 – 78.9 + (-23.4) = –12.3°
Santiago de Chili:	90 – (- 33.4) + (-23.4) = 100°

Opgave 8.2.

a. Het evenaarvlak gaat door het midden van de bol.

De andere dagboogvlakken niet, die zijn dus kleiner.

b. 12 uur.

c. 206°. Let erop dat je aan de dagkant meet want de dagboog kan meer dan een halve cirkel zijn.
Een vol etmaal is 24 uur. De daglengte is daar een fractie van.

$$\frac{206°}{360°}\cdot 24 = \ 13.73 \text{ uur} = 13 \text{ uur en } 44 \text{ minuten}\cdot$$

d. 16 uur 29 minuten, 7 uur 31 minuten.

e. De midwinter*dag*boog is even groot als de midzomer*nacht*boog. Hun volle etmaalcirkels zijn even groot, want ze liggen even ver van de evenaar.

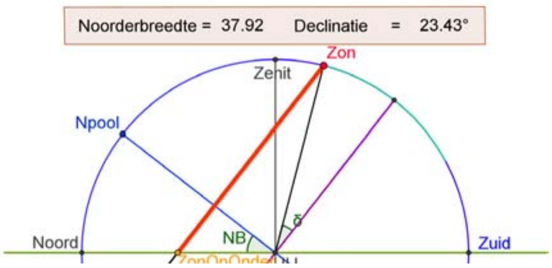
f. *Negatieve* waarde voor de culminatie: de zon is onder de horizon.
Culminatie *groter dan* 90° boven de zuidelijke horizon: de zon staat in het noorden.

9. Daglengtes en opkomstpunten vinden met GeoGebra

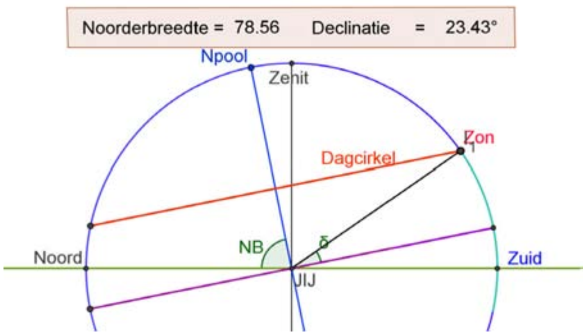
Opgave 9.1.

a. Hieronder enkele mogelijkheden.

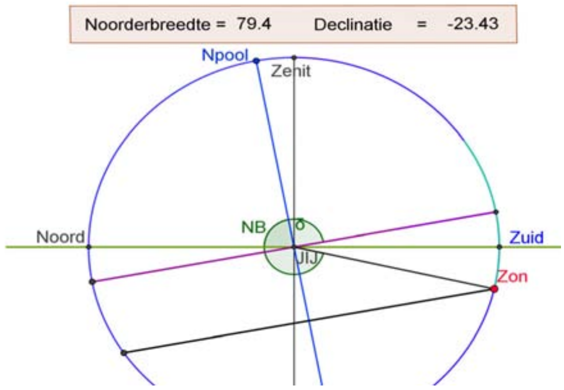
Athene, zomer:
zon hoog, dag niet heel erg lang



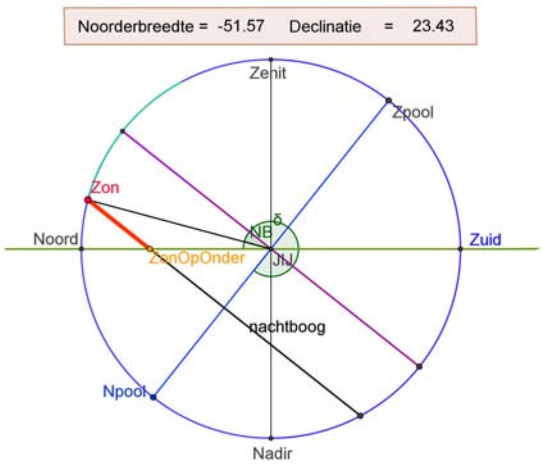
Spitsbergen, zomer: 24 uur daglicht



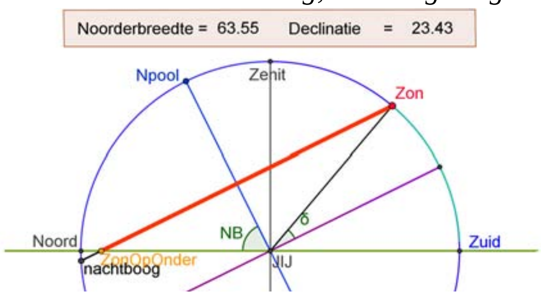
Spitsbergen, zomer: 24 uur nacht



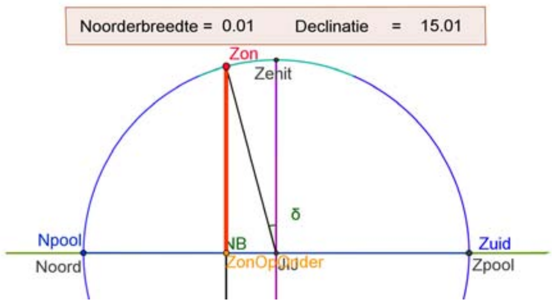
Falkland Eilanden, 21 juni:
zon laag in het Noorden, korte dag



Trondheim (Noorwegen), 21 juni:
zon komt niet heel hoog, zeer lange dag



Quito (Equador), 30 april:
zon hele dag aan Noordkant, dag en nacht even lang

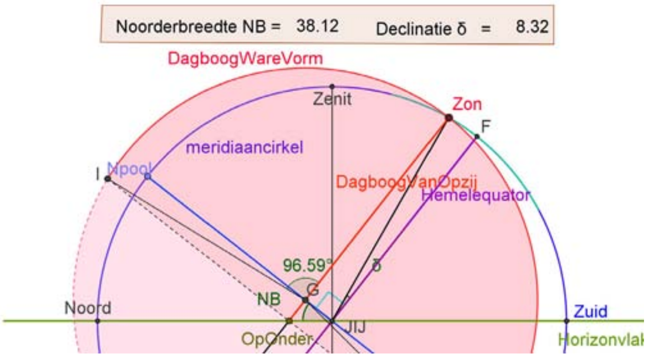


b.

- Op de evenaar zijn alle dagbogen halve cirkels, maar ze zijn niet even groot.
- Ja. Alle dagen duren even lang.
- Nee. De zon komt NIET elke dag op hetzelfde punt op.
- Ja. De helft van het jaar blijft de zon ten noorden van de oost-west-lijn.

c. 24 uur. Dit is mogelijk boven de noordpoolcirkel of zuidelijk van de Zuidpoolcirkel.
(Dat zijn de cirkels met noorderbreedte ±66.6°; 66.6= 90 - 23.4)

Opgave 9.2.
Voorbeeld: Palermo (NB = 39.1°); δ = –8.3°.



Geogebra geeft voor hoek *Zon-G-I*   96.6° aan.
De hele dagboog is dus 193.2°.
De daglengte wordt berekend als in opgave 8.2

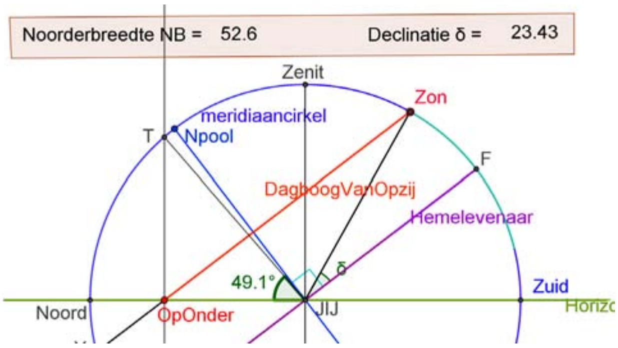
$$\frac{193.2°}{360°} \cdot 24 = \ 12.88 \text{ uur} = 12 \text{ uur en } 53 \text{ minuten}$$

Vanwege de onnauwkeurigheid van het werken met Geogebra en de muis, kan het afwijken van:

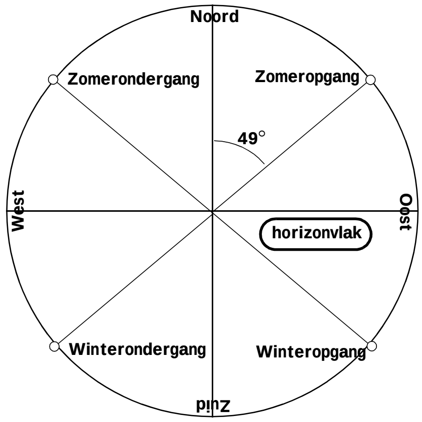
		declinatie				
plaats	N.B.	–23.4°	–8°	0°	8°	23.4°
Noord-	90°	0	0	0	24	24
Palermo	38,1°	9.22	11.1	12	12.53	14.3
La Union	-40,2°	14.51	12.5	12	11.06	9.09

Opgave 9.3. In onderstaande afdruk van de applet *Dagboogverkenning.ggb* is de loodlijn op de Noordzuidlijn door het punt *OpOnder* toegevoegd. Eigenlijk zou je die lijn in het horizonvlak willen tekenen. Maar je kunt ook even doen alsof het meridiaanvlak het horizonvlak is. De te meten hoek is vet aangegeven, *Noord-Jij-T*.

Dit is voor het geval Utrecht, 21 juni ongeveer 49 graden.

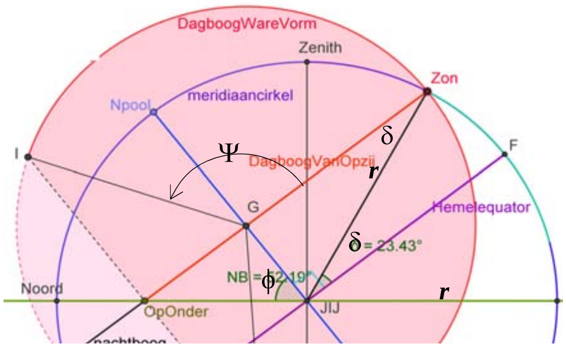


Op grond van symmetrie is het makkelijk de figuur met de hoeken voor ondergang en de wintersituatie aan te vullen. Zie hieronder. De winterboog tussen opkomst en ondergang overspant in Nederland 98 graden van de zuidelijke horizon.



10. Daglengte *berekenen* uit declinatie en Noorderbreedte

Opgave 10.1. .



a.

b. Pas op: *GI* is niet gelijk aan *r*!

c. *Bij de Zon is ook hoek δ in de figuur aangegeven. Gebruik die bij deze en de volgende vraag.*
$GI = G.Zon = r\cos(\delta)$.

d. $G.JIJ = r \sin(\delta)$
$G.OpOnder = G.JIJ * \tan\phi = r \sin(\delta) * \tan\phi$.

e. $$\cos\Psi = \frac{-G.\ Oponder}{GI}$$

$$= \frac{-r \cdot \sin\delta \cdot \tan\phi}{r \cdot \cos\delta} = -\tan\delta \cdot \tan\phi$$

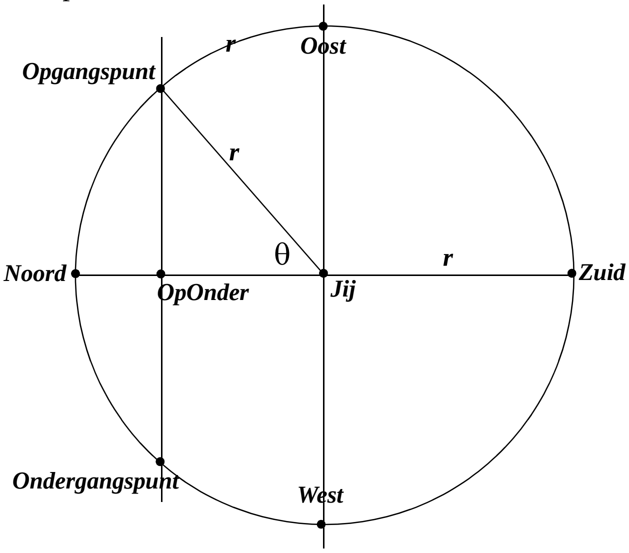
f.

g. $$\psi = \cos^{-1}(-\tan(23,4) \cdot \tan(66,4)) = 7,9°$$

$$Daglengte = \frac{2\Psi}{360} \cdot 24uur = 1,05uur$$

$$= 1\ uur\ 3\ minuten$$

h. Noem de hoek tussen Noord en de zonsopkomst θ. Hieronder het horizon vlak van de hemelbol; dat heeft de lijn Noord-Zuid gemeen met het meridiaanvlak. De zonsopgangs- en zonsondergangs punten liggen op de lijn door *OpOnder* loodrecht op *NoordZuid*.



Er geldt: $$\cos\theta = \frac{OpOnder.Jij}{r}$$

In de eerste figuur vind je het lijnstuk *OpOnder.Jij* ook. Dus:

$$\cos\phi = \frac{G.Jij}{OpOnder.Jij} = \frac{r\sin\delta}{OpOnder.Jij}$$

Dus $$OpOnder.Jij = \frac{r\sin\delta}{\cos\phi}$$

Uiteindelijk: $$\cos\theta = \frac{\sin\delta}{\cos\phi}$$

Als $\delta = 23.4°$ en $\phi = 52$, dan volgt $\theta = 49.8°$.
Dit klopt goed met opgave 9.3.
Let erop dat in onze wintersituatie *OpOnder.Jij* negatief is. De waarde van θ is dan groter dan 90°.

11. Zonsomvang en atmosferische breking meenemen

Opgave 11.1.

a. Een cirkel evenwijdig aan de horizoncirkel, iets eronder.

b. Een lijn evenwijdig aan de horizon, iets eronder.

Opgave 11.2.

a. Bij de evenaar staan de dagbogen heel steil op de horizon. Bij ons gaat de zon veel minder steil naar beneden.

12. Daglengte en schemeringen berekenen via formules

Opgave 12.1. Invullen in de formule.
21 december: 7 uur 44 minuten.
21 maart, 21 september: 12 uur 11 minuten
21 juni: 16 uur 43 minuten

Opgave 12.2.

a. $$\cos\Psi = -\frac{\sin\phi \cdot \sin\delta + \sin 0}{\cos\phi \cdot \cos\delta}$$

$$= -\frac{\sin\phi \cdot \sin\delta}{\cos\phi \cdot \cos\delta} = -\tan\delta \cdot \tan\phi$$

b. Vul in $\phi = 0$.

$$\cos\Psi = -\frac{\sin 0 \cdot \sin\delta + \sin\kappa}{\cos 0 \cdot \cos\delta} = -\frac{\sin\kappa}{\cos\delta}$$

Je ziet dat de daglengte op de evenaar wel van de declinatie afhangt, als er kimduiking is. Maar omdat κ en δ beide klein zijn, ligt $\cos\Psi$ vrij dichtbij 0 en zijn alle dagen ongeveer 12 uur.

c. Tijdsduren in *uren.minuten.*

NB	21 maart			
	$\kappa = 0°$	$\kappa = 0.82°$	$\kappa = 6°$	schemerduur
0°	12.00	12.07	12.48	00.20
52°	12.00	12.11	13.18	0.33

NB	burgerlijke schermerduren		
	21 juni	21 sep	21 dec
0°	0.22	00.20	0.22
52°	0.49	0.33	0.41

Pas op: Als je twee daglengtes (voor $\kappa = 6°$ en $\kappa = 0.82°$) aftrekt, krijg je de ochtend- en de avondschemering samen, dus delen door 2!

d. Bij ons de zon daalt de zon als die dichtbij de horizon is minder steil daalt dan op de evenaar. Op de evenaar is de kimduiking dus sneller overbrugd.

13. Wat is jouw oosterlengte en tijdzone?

Opgave 13.1.

a. Drie en een half uur achteruit.

b. De Oosterlengtes zijn 7.2° en 3.9°. Het tijdsverschil is (7.2-3.9)* 4 minuten = 13 minuten en 12 seconden.

c. De centrale lijn van onze tijdzone is die van 15° oosterlengte. De (middelbare) zon moet 10° overbruggen; dat is 10 keer 4 minuten, 40 minuten. Dus 's winters om 12.40 uur; 's zomers met zomertijd erbij om13.40 uur.

d. Tijden in uren en minuten voor Utrecht

	dag-lengte	culmi-natie	zon op	zon onder
21/3	12.11	12.40	6.35	18.46
21/6	16.43	13.40	5.22	22.02
21/9	12.11	13.40	7.35	19.46
21/12	7.44	12.40	8.36	16.12

Dit zijn de eerste zonsopgangs- en zonsondergangstijden die we berekenen. Let er op dat later nog enkele correcties op deze waarden moeten worden toegepast.

Opgave 13.2. We moeten in ieder geval kunnen berekenen wat de declinatie van de zon op een gegeven dag is.

Deel II: De zon trekt langs de sterren

14. De ecliptica bovenop Singel 390 in Amsterdam

15. De werelden van Ptolemaeus en Copernicus

16. Je eigen armillarium: de sterrenbol

Opgave 16.1.

Opgave 16.2.

a.

b. Elke stap is een halve maand. Dus ongeveer 1 3/4 maand na 21 maart; ongeveer 13 mei.

17. Eclipticale lengte λ van de zon en declinatieberekening

Opgave 17.1.

a. 0°, 90°, 180°, 270°

b. Koninginnedag (30 april) is 40 dagen na 21 maart.

$$\lambda = \frac{40}{365} \cdot 360° = 39.45°$$

Opgave 17.2.

a. $gz = r \sin\lambda$

b. $hz = gz \sin 23.4° = r \sin\lambda \sin 23.4°$.

c. $hz = r\sin\delta$. Dus: $r\sin\delta = r\sin\lambda\sin 23.4°$

en: $\sin\delta = \sin 23.4° \cdot \sin\lambda$.

d. Stel dat je op 30 april bent geboren. Dan is je lenteleeftijd 40 dagen en je eclipticale lengte op je verjaardag $39.45°$.

e. De declinatie van de zon volgt uit

$$\sin\delta = \sin 39.45° \cdot \sin 23.4° = 0.2523$$

$$\delta = \sin^{-1} 0.2523 = 14.61°$$

18. De algemene daglengteberekening

Opgave 18.1. Voorbeeld: jarig op 30 april, Utrecht.

a. $\delta = 14.61°$

b. Daglengte berekenen als in opgave 12.1. Resultaat 14 uur 57 minuten.

c. 13.40 MEZT.

d. Daglengte halveren, optellen bij en aftrekken van het moment van zuiddoorgang: Opkomst en ondergang van de middelbare zon: 6.10 uur, 21.09 uur.

e. Laat de baby op 1 november geboren worden.
Lenteleeftijd: 10+30+31+30+31+31+30+31= 224 dagen.
Eclipticale lengte: 224/365*360= 220.93°.
Declinatie:

$$\sin\delta = \sin 220.93° \cdot \sin 23.4° = -0.2601$$

$$\delta = \sin^{-1} -0.2601 = -15.08°$$

Daglengte (met kimduiking):

$$\cos\Psi = -\frac{\sin 36° \cdot \sin -15.08° + \sin 0.82°}{\cos 36° \cdot \cos -15.08°} = 0.177436$$

$$\Psi = 79.779°$$

$$Daglengte = \frac{2 \cdot \cos^{-1} 79.779°}{360} \cdot 24\text{uur} = 10 \text{ uur } 38 \text{ minuten}$$

Doorgang zon door zuiden
Tijdzone bepalen voor 118° westerlengte.
De centrale lijn van de tijdszone ligt bij 120° westerlengte. De CIA-kaart (http://www.everything-longdistance.com/CIA-map.htm) geeft inderdaad UTC+8 aan; LA ligt op het noordelijk halfrond, dus géén zomertijd op 1/11.
Doorgang gemiddelde zon: L.A. ligt 2 graden aan de oostkant van de centrale lijn, dus 2* 4 minuten vóór 12 uur: 11.52 uur.
Zon op: 11.52 - 10.38/2 = 6.33 uur
Zon onder: 11.52 + 10.38/2 = 17.30 uur.

Opgave 18.2.

a. Op 66° NB is de dag op 22 maart 7 minuten langer dan op 21 maart.

b. Rond 21 juni gaat vanwege de kimduiking de zon op 66° NB niet echt onder. Als we rekenen met 65 in plaats van 66° NB verschillen de dagen met kimduiking ongeveer 1 minuut. Dat is ook zo zonder kimduiking, maar dan zijn de dagen wel een uur korter!

c. Geen merkbaar verschil.

d. Geen merkbaar verschil.

e. Op de evenaar gaat de zon heel steil onder en duren alle dagen bij kimduiking 0° exact even lang. en met kimduiking slechts een beetje langer.
Bij de poolcirkel maakt de declinatieverandering rond 22 maart veel uit omdat de zon niet erg steil ondergaat ondergaat. Rond het zomerpunt verandert de declinatie heel weinig, maar de vlakheid van de daling van de zon maakt het bij de noordpoolcirkel toch nog merkbaar in de daglengte. De invloed van de kimduiking is heel groot, omdat de etmaalcirkel rond 21 juni bine raakt aan de horizon.

Let op: Dit is allemaal bepaald volgens de rekenwijze zoals wie die tot nu toe uitvoeren. Je merkt wel dat dat de variatie in daglengte bij de poolcirkel aan het begin van de lente heel groot kan zijn; maar dat is ook wel juist de situatie waarin de nog verborgen fouten in de aanpak het ergst uitpakken. In de volgende paragraaf geen we op die fouten wat nader in.

Opgave 18.3. Zie de volgende paragrafen.

19. Fouten en verbeteringen, deel I

Opgave 19.1.

a. De daglengtes verschillen op onze breedte maximaal 4 minuten. Grote kans dat je hierdoor in Nederland slechts 2 á 3 minuten afwijkt!

b. De zon gaat geleidelijk omhoog van de evenaar af, maar wel langzaam. Het is eigenlijk een soort spiraalbeweging. Dante spreekt van opeenvolgende stukken spiraal.

Opgave 19.2.

a.

b. De gemiddelde lengte van een jaar volgens ons kalendersysteem is volgens de schrikkeljaarberekening 365.2425 dagen. Dat is 0.0003 dag langer dan het werkelijke tropisch jaar.
Over 21/0.0003= 70000 jaar loopt de kalender dus 21 dagen achter op de feiten en is en begint de lente op 1 maart begonnen als we de kalender niet bijstellen.

c. De zal nooit meer dan de declinatieafwijking van die van 3/4 dag zijn. Dit valt ruim binnen dezelfde marges.

20. Fouten en verbeteringen, deel II

Opgave 20.1.

a. De kimduiking maakt alle dagen langer.

b. Op 21 maart is de ochtend volgens de tabel 1 minuut en 3 seconden korter dan de middag.

c. Het klopt wel, want de declinatie neemt ook toe gedurende de dag zelf.

21. Tijdvereffening met grafiek uitvoeren

Opgave 21.1. 21 juni in Utrecht:
DMZ = 13.40
Tve op 21 juni volgens de grafiek: -3 minuten.
DWZ = *DMZ*- *Tve* = 13.43 uur.

Opgave 21.2.

a. -14 en +17 minuten. Dat is veel meer dan de fouten van paragraaf 20.

b. Het voor en achterlopen tengevolge van de schuine stand van de ecliptica is in de periode 12 maart tot 21 september hetzelfde als in de periode 21 september 21 maart. Dus twee toppen en twee dalen
De ellipsbaan-component is een enkele jaarcyclus van snel naar langzaam naar snel. Die heeft een top en een dal.

22. Ook declinatie en daglengte moeten worden herrekend

Opgave 22.1. In paragraaf 23 staat een uitgewerkt voorbeeld waar dit allemaal in voorkomt.

23. Uitgewerkt voorbeeld als samenvatting van deel I en II

Deel III: Het analemma van de zon

24. De zon gaat scheef in midwinter

Opgave 24.1.
Kortste dag: 21 december
Laatste zonsopgang: 30 december
Vroegste zonsondergang: 12 december

Opgave 24.2.

a. In die periode valt de culminatie goed in het midden van de dag. Maar de opeenvolgende culminaties verlopen wel!

b. Rond 21 maart of 21 september neemt de declinatie op die dag zelf behoorlijk toe of af. In de avond van 21 maart heeft de zon een hogere declinatie dan midden op de dag en gaat dus later onder dan als de zon zijn declinatie vasthield.
Op 21 december en 21 juni is dat declinatieverschil per dag niet groot, want dan is er wel een minimum of maximum, en daarom ook haast geen variatie in declinatie.
De uitdrukking zomerzonstilstand (zomer solstitium, *summer solstice*) komt daarvandaan. Het slaat op het stilstaan van de zon in de Noord-Zuid richting.

25. Drie zonnen en twee verschillen

26. Het sferisch analemma is een symmetrische achtfiguur

Opgave 26.1.

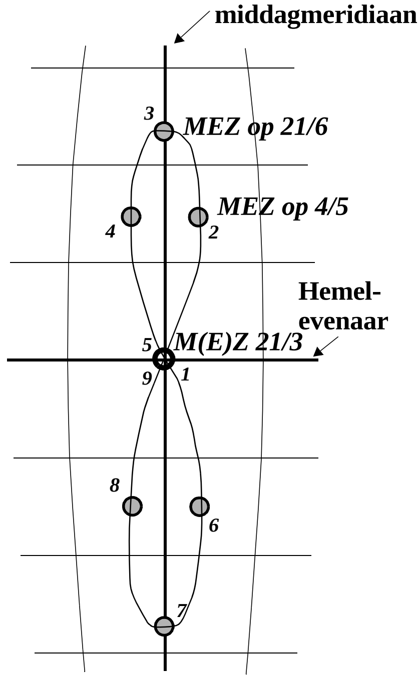
a. De Middelbare Meridiaan is de zwarte halve cirkel in de figuur van Noordpool naar zuidpool. Deze gaat door het punt van de Middelbare Zon. De Middelbare Eclipticale Zon gaat even snel over de ecliptica als de Middelbare Zon over de evenaar, maar gaat schuin omhoog. Zeker in het begin blijft die dan achter tenopzichte van de Middelbare Meridiaan. Geleidelijk aan (naar 21 juni toe) gaat de ecliptica minder omhooglopen en is tevens verder van de evenaar verwijderd. Daardoor haalt de zon de Middelbare meridiaan weer in!

b. Bekijk het nu vanuit de waarnemer op aarde. Op het noordelijke halfrond zie je in de periode 21 maart-21 juni de Middelbaar Eclipticale Zon rechts van de Middelbare meridiaan. Omdat (op het Noordelijke halfrond) de meridiaan aan de zuidkant van links naar rechts draait, gaat de Eclipticale Zon dus in de dagelijkse draai vóór op de middelbare meridiaan.
Op het zuidelijk halfrond werkt net zo'n redenering; het uiteindelijk resultaat is dat de Eclipticale Zon overal *eerder* door het NoordZuidZenith-vlak gaat dan de meridiaan van de middelbare zon (of de middelbare zon zelf).

Opgave 26.2. .

	datum	MEZ ten opzichte van Middelbare meridiaan	MEZ culmineert ***eerder/tegelijk/later*** dan MZ	***MEZ*** t.o.v. MZ tijdens culminatie
1	21/3	***gelijk***	***tegelijk***	***zelfde plek***
2	4/5	***achter***	***eerder***	***rechts boven***
3	21/6	***gelijk***	***tegelijk***	***boven***
4	4/8	***voor***	***later***	***linksboven***
5	21/9	***gelijk***	***tegelijk***	***zelfde plek***
6	4/11	***achter***	***eerder***	***rechts onder***
7	21/12	***gelijk***	***tegelijk***	***onder***
8	4/2	***voor***	***later***	***linksonder***
9	21/3	***gelijk***	***tegelijk***	***zelfde plek***

Opgave 26.3.



27. Het sferisch analemma ligt op een cilinder!

Opgave 27.1.

De redenering bij deze opgave vraagt veel van het voorstellingsvermogen. Houd het kartonnen model van de sterrenbol ook bij de hand. Let er in de redenering steeds op wanneer het gaat over de sterrenbol als *ruimtelijk* ding en wanneer het gaat over de *vlakke* tekening op het GeoGebra-scherm. In onderstaande tekst is dat veelvuldig aangegeven.

a.

b.

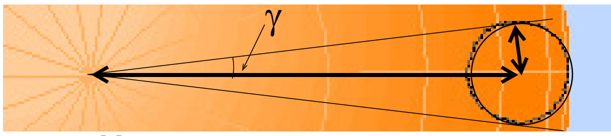
c. Trek in de tekening de lijn *Waarnemer-Zomer* door tot op de evenaarcirkel; noem het snijpunt op de evenraar *S*. **In het vlak van de tekening** verdeelt *K* lijnstuk *Waarnemer-MZ* net zo als het punt *Zon* het lijnstuk *Waarnemer-S* verdeeld.
In de ruimtelijke sterrenbol is de ecliptica een cirkel. Stel je voor dat de evenaarcirkel om de as *Lente-Herfst* gedraaid is over een hoek, zeg ε. (In de werkelijkheid is die hoek 23.4 graden, maar voor de tekening is de hoek wat overdreven.) *MZ* draait dan naar *MEZ*; immers, ze lopen gelijk op over evenaar en ecliptica, te beginnen in het punt waar ze samenzijn: *Lente*. **In de tekening** lijkt alles op de eclipticacirkel dan met een vast factor naar de lijn *Lente-Herfst* toe gekrompen. Die vaste factor is cos ε.
In de tekening verdeelt het punt *Zomer* dus *Waarnemer-S* juist zo als het punt *MEZ* het lijnstuk *A-MZ* verdeeld. Punt *K* verdeelt in de tekening *Waanemer-MZ* net zo en daarom is *K-MEZ* evenwijdig aan *Waarnemer-A* en dus ook loodrecht op *A-MZ*.

d. *MEZ* ligt dus in de tekening op de cirkel met middellijn *K-MZ* (volgens Thales). Beweeg je nu zelf met de sterrenbol mee in het tempo van *MZ*, dan staat voor jou *MZ* stil. Dat is wat er gebeurt in die film van 365 beeldjes! *MEZ* ligt in werkelijkheid niet in het evenaarvlak, maar; de projectie van *MEZ* op het evenaarvlak is wat je ziet in de tekening. De echte *MEZ* ligt op de lijn loodrecht op het evenaarvlak. Die lijnen samen, in de loop van het jaar dus, vormen een cilinder, die loodrecht staat op het evenaarvlak. *MEZ* ligt dus op de doorsnijding van die cilinder met de sterrenbol.

Opgave 27.2.

a. Een zijaanzicht van de sterrenbol, met het centrum van het analemma rechts. Neem *r* = 1. cos ε en sin ε zijn direct in de tekening te vinden. De diameter van de cilinder is dus 1- cos ε, de straal ervan dus (1- cos ε)/2 en de hoogte van het hele analemma is 2sin ε .

b. In het bovenaanzicht:



Er geldt:

$$\sin\gamma = \frac{\text{straal van de cilinder}}{\text{afstand as cilinder tot middelpunt bol}}$$

$$= \frac{(1-\cos\varepsilon)/2}{1-(1-\cos\varepsilon)/2} = \frac{(1-\cos\varepsilon)}{(1+\cos\varepsilon)}$$

c. Neem nu ε = 23.4°. Er volgt γ = 2.458°.
Omreken naar fractie van 24 uur; dat is dan

$$\frac{\gamma}{360} \times 24 \text{ uur} = 9.83 \text{ minuten}$$

De grafiek in paragraaf 21 voor de bijdrage door de schuine stand van de ecliptica heeft inderdaad twee maxima en minima met 10 minuten vóór en na de MZ.

28. De ellipsen van Kepler en Newton

Opgave 28.1.

a. Periheliumsituatie:

$$r_p = 147098290 \ km$$

$$\textit{hoekverschil } h_p = 289.06 - 281.92 = 7.11°$$

Apheliumsituatie:

$$r_a = 152098232 \ km$$

$$\textit{hoekverschil } h_a = 108.23 - 101.56 = 6.67°$$

Als de perkenwet klopt, moet $\dfrac{h_p \cdot r_p^2}{h_a \cdot r_a^2}$ dicht bij 1 liggen.
De rekenmacine levert 0.997. Een afwijking van 3 promille. De *h*-waarden en de *r*-waarden verschillen echter onderling respectievelijk 7 en 3 procent, het zegt dus heel wat.!

b. Het hoeksnelheidverschil is 1.44° per week.
De werkelijke snelheid van de aarde in het periheliumpunt vinden we door de afgelegde weg door de doorlopen tijd te delen. In kilometers per seconde:

$$\frac{\left(\dfrac{h_p}{360°}\right) \cdot 2\pi r_p}{7 \times 24 \times 60 \times 60} = 30.18 \text{ km/s}$$

In het aphelium vinden we: 29.28 km/s.