Uitwerkingen van opgaven in Zebra nr 10

In Zebra nummer 10 *Fractals, meetkundige figuren in eindeloze herhaling*, tweede en derde druk door Igor Hoveijn en Jan Scholtmeijer uitgegeven door Epsilon Uitgaven te Utrecht, staat een groot aantal opgaven. Daarvan worden hier voorbeeld uitwerkingen beschikbaar gesteld. Met nadruk op voorbeeld want bij bijna alle opgaven zijn er meer mogelijkheden om op het juiste antwoord te komen. De door ons gekozen uitwerkingen zijn degenen die wij het meest duidelijk, eenvoudig of illustratief vonden. De auteurs houden zich aanbevolen voor suggesties ter verbetering. Zodra daartoe aanleiding is zal een nieuwe verzameling uitwerkingen bekend gemaakt worden.

Opgave 1.5.

Opgave 1.6. De nulde generatie is gewoon het vierkant. De lengte van de kust is de omtrek van het vierkant: 4.

Opgave 1.7. Zie figuur 1.2. Het lijntje AB met lengte 1 wordt vervangen door $A'B'$ met lengte $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=2$. Het eiland van de eerste generatie heeft kustlengte $4\times 2=8$.

Opgave 1.8. $L_0=4$, $L_1=8$. Bij elke generatie verdubbelt de kustlengte. Dus $L_k=4\cdot 2^{k+1}$.

Opgave 1.9. Als we k met 1 vergroten, verdubbelt de kustlengte L_k. Dus hoe groot L ook is, we kunnen altijd een k_0 vinden zodat voor alle $k>k_0$ geldt: $L_k>L$.

Iets preciezer: bij opgave 1.8 zagen we dat $L_k=4\cdot 2^{k+1}$. Dus neem k_0 zo dat $4\cdot 2^{k_0+1}>L$ ofwel ${}^2\log 4+k_0+1>{}^2\log L$ en dus $k_0>{}^2\log L-3$. Voor $k=k_0$ is dan $L_k>L$ en omdat L_k groter wordt bij toenemende k, geldt $L_k>L$ ook voor $k>k_0$.

Opgave 1.10. We kunnen altijd een k_0 kunnen vinden zodat voor elke $k>k_0$ geldt: $L_k>L$ (zie opgave 1.9). Dat betekent dat $\lim_{k\to\infty}L_k=\infty$.

Opgave 1.11. Uit $u=2x$, $v=2y$ volgt $x=\frac{1}{2}u$, $y=\frac{1}{2}v$. Dit invullen in $y=x^2$ levert $\frac{1}{2}v=(\frac{1}{2}u)^2=\frac{1}{4}u^2$ ofwel $v=\frac{1}{2}u^2$. Omdat x loopt van $-\frac{1}{2}$ tot $\frac{1}{2}$, loopt $u=2x$ van -1 tot 1.

De parabool is lager. De vergroting herhalen maakt de parabool nog lager.

Opgave 1.12. Om een ander punt dan $(0,0)$ kunnen we altijd een kleine omgeving maken waar de spiraal hoogstens één keer doorheen gaat. Als de spiraal niet door deze kleine omgeving gaat, krijgen we bij vergroten niets te zien. Als de spiraal er één keer doorheen gaat, krijgen we bij vergroten een gebogen lijn die geen spiraal is. Het enige punt waar zelfgelijkendheid kan optreden, is dus $(0,0)$.

Stel, (x,y) is een punt van de spiraal. Er is dus een $t\in[0,\infty)$ zodat

$$x=\mathrm{e}^{-t}\cos t \;\text{ en }\; y=\mathrm{e}^{-t}\sin t. \tag{1}$$

Als de spiraal zelfgelijkend is in $(0,0)$, kunnen we een punt van de spiraal vanuit $(0,0)$ met factor a vermenigvuldigen, waarna we op een ander punt van de spiraal terechtkomen. Dus het punt (ax,ay) is ook punt van de spiraal. Dat betekent dat er een $s\in[0,\infty)$ is zodat

$$ax=\mathrm{e}^{-s}\cos s \;\text{ en }\; ay=\mathrm{e}^{-s}\sin s.$$

Als we de vergelijkingen 6.1 hierin invullen, krijgen we

$$a\mathrm{e}^{-t}\cos t=\mathrm{e}^{-s}\cos s \;\text{ en }\; a\mathrm{e}^{-t}\sin t=\mathrm{e}^{-s}\sin s. \tag{2}$$

Nu is t is gegeven, dus we moeten naar s en a oplossen. Werk vergelijkingen 6.2 om tot

$$a = \frac{\mathrm{e}^{-s}\cos s}{\mathrm{e}^{-t}\cos t} \text{ en } a = \frac{\mathrm{e}^{-s}\sin s}{\mathrm{e}^{-t}\sin t}, \tag{3}$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^{-s}\cos s}{\mathrm{e}^{-t}\cos t} &= \frac{\mathrm{e}^{-s}\sin s}{\mathrm{e}^{-t}\sin t} \\
\frac{\cos s}{\cos t} &= \frac{\sin s}{\sin t} \\
\tan s &= \tan t \\
s &= t + k\pi.
\end{aligned}$$

Voor $k = 0$ krijgen we natuurlijk $s = t$. Voor $k = 1$ krijgen we $s = t + \pi$. Dat voldoet niet. Dan hebben we namelijk niet alleen een vergroting, maar ook een spiegeling in de oorsprong. Bij ieder punt van de spiraal vinden we na vermenigvuldigng met een factor wel een ander punt van de spiraal, maar dat punt ligt dan aan de andere kant van de oorsprong.

We nemen dus $k = 2$ en krijgen

$$s = t + 2\pi.$$

Invullen in 6.3 levert

$$a = \frac{\mathrm{e}^{-(t+2\pi)}\cos(t+2\pi)}{\mathrm{e}^{-t}\cos t} = \frac{\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-2\pi}\cos t}{\mathrm{e}^{-t}\cos t} = e^{-2\pi}.$$

Conclusie: bij elk punt van de spiraal kunnen we een punt van de spiraal vinden dat $\mathrm{e}^{-2\pi}$ dichter bij $(0, 0)$ ligt. Vanuit dit laatste punt komen we met een vergroting $\frac{1}{\mathrm{e}^{-2\pi}} = \mathrm{e}^{2\pi}$ op het eerste punt terecht.

Opgave 1.13. Om een ander punt dan (0, 0) kunnen we altijd een kleine omgeving maken waar de spiraal hoogstens één keer doorheen gaat. Als de spiraal niet door deze kleine omgeving gaat, krijgen we bij vergroten niets te zien. Als de spiraal er één keer doorheen gaat, krijgen we bij vergroten een gebogen lijn die geen spiraal is. Het enige punt waar zelfgelijkendheid kan optreden, is dus $(0, 0)$.

Stel, (x, y) is een punt van de spiraal. Er is dus een $t \in [1, \infty)$ zodat

$$x = \frac{1}{t}\cos t \text{ en } y = \frac{1}{t}\sin t. \tag{4}$$

Als de spiraal zelfgelijkend is in $(0, 0)$, kunnen we een punt van de spiraal vanuit $(0, 0)$ met factor a vermenigvuldigen, waarna we op een ander punt van de spiraal terechtkomen. Dus het punt (ax, ay) is ook punt van de spiraal. Dat betekent dat er een $s \in [0, \infty)$ is zodat

$$ax = \frac{1}{s}\cos s \text{ en } ay = \frac{1}{s}\sin s.$$

Als we de vergelijkingen 6.4 hierin invullen, krijgen we

$$\frac{a}{t}\cos t = \frac{1}{s}\cos s \text{ en } \frac{a}{t}\sin t = \frac{1}{s}\sin s \tag{5}$$

Nu is t is gegeven, dus we moeten naar s en a oplossen. Werk vergelijkingen 6.5 om tot

$$a = \frac{t\cos s}{s\cos t} \quad \text{en} \quad a = \frac{t\sin s}{s\sin t} \tag{6}$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned} \frac{t\cos s}{s\cos t} &= \frac{t\sin s}{s\sin t} \\ \frac{\cos s}{\cos t} &= \frac{\sin s}{\sin t} \\ \tan s &= \tan t \\ s &= t + k\pi \end{aligned}$$

Voor $k = 0$ krijgen we natuurlijk $s = t$. Voor $k = 1$ krijgen we $s = t + \pi$. Dat voldoet niet. Dan hebben we namelijk niet alleen een vergroting, maar ook een spiegeling in de oorsprong. Bij ieder punt van de spiraal vinden we na vermenigvuldigng met een factor wel een ander punt van de spiraal, maar dat punt ligt dan aan de andere kant van de oorsprong.

We nemen dus $k = 2$ en krijgen

$$s = t + 2\pi.$$

Invullen in 6.6 levert

$$a = \frac{t\cos(t+2\pi)}{(t+2\pi)\cos t} = \frac{t\cos t}{(t+2\pi)\cos t} = \frac{t}{t+2\pi}.$$

Conclusie: bij elk punt $(x, y) = (\frac{1}{t}\cos t, \frac{1}{t}\sin t)$ van de spiraal kunnen we een punt van de spiraal vinden dat $\frac{t}{t+2\pi}$ dichter bij $(0, 0)$ ligt. Vanuit dit laatste punt komen we met een vergroting $\frac{t+2\pi}{t}$ op het eerste punt terecht. De vergroting is niet constant, maar hangt af van t.

Opgave 2.1. Voor $n = 1$ is $n(n + 1) = 1 \cdot 2 = 2$, dit is inderdaad even.

Opgave 2.2. $P(n)$ is waar voor zekere n, dat is gegeven. Dus $n(n + 1)$ is even. Is nu $P(n + 1)$ waar? Dus is $(n + 1)(n + 1 + 1) = (n + 1)(n + 2)$ even? Nu is

$$(n + 1)(n + 2) = (n + 2)(n + 1) = n(n + 1) + 2(n + 1).$$

Dit is even, want

a) $n(n + 1)$ is even op grond van het gegeven
b) $2(n + 1)$ is even, want het is een tweevoud
c) de som van twee even getallen is even (strikt genomen zou dit nog bewezen moeten worden!)

Dus $(n + 1)(n + 2)$ is even. Als $P(n)$ waar is, volgt dat $P(n + 1)$ ook waar is.

Opgave 2.3. $P(n)$ is waar voor $n = 1$ (zie opgave 2.1). Als $P(n)$ waar is voor een willekeurig getal n, volgt dat $P(n+1)$ ook waar is (zie opgave 2.2). Met het principe van volledige inductie volgt dan dat $P(n)$ waar is voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 2.4. De zijde van het vierkant is 1, de zijde van de beide kleine vierkantjes dus $\frac{1}{4}$. Het vierkantje dat erbij komt, is even groot als het vierkantje dat er af gaat. De oppervlakte van het eiland verandert dus niet.

Opgave 2.5. Het principe verandert niet. Een lijnstuk wordt vervangen door een geknikt lijnstuk. Hierdoor gaat een vierkantje van het eiland af en komt er een vierkantje bij. Maar beide vierkantjes zijn even groot, dus de oppervlakte van het eiland verandert niet. Dit principe verandert niet, ook niet als de lijnstukjes kleiner worden.

De oppervlakte van het Peano-eiland was en blijft 1.

Opgave 2.6. De bewering luidt:

$P(n)$: de oppervlakte van het Peano-eiland is 1 voor de n-de generatie

De bewering is waar voor $n = 1$, want dan hebben we het gewone vierkant van de eerste generatie.

Stel de bewering is waar voor een of andere n. Is hij dan ook waar voor $n+1$? Zie opgave 2.5: elk lijnstuk wordt vervangen door een geknikt lijnstuk, maar de oppervlakte verandert niet. Dus als de oppervlakte 1 was bij generatie n, is hij ook weer 1 bij generatie $n+1$.

Conclusie: de bewering is waar voor alle $n \in \mathbb{N}$. Voor alle generaties is de oppervlakte van het Peano-eiland 1.

De limiet $\lim_{k\to\infty} O_k$ is eenvoudig. Omdat voor alle $k \in \mathbb{N} O_k = 1$, is de limiet natuurlijk ook 1.

De crux van deze opgave zit hem in het bewijs dat als de bewering geldt voor $P(n)$, hij ook geldt voor $P(n+1)$. Maar dit werk is al gedaan bij opgave 2.5. De opgave is wel weer een mooie illustratie van het principe van volledige inductie.

Opgave 2.7. Zie figuur 2.3, linker afbeelding. Het is niet moeilijk te zien dat $d_1 = \frac{1}{4}$. Op de rechter afbeelding is te zien dat $d_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$.

Opgave 2.8. Zie weer figuur 2.3. Bij het gedeelte $A'B'$ is duidelijk te zien dat het gedeelte dat erbij komt $\frac{1}{4}$ is van het gedeelte dat er eerder bijgekomen is (nl. van B' naar het oorspronkelijke lijnstuk AB). Wanneer straks de volgende generatie ontstaat, wordt het lijnstukje $A''B''$ geknikt. Het gedeelte dat er dan bijkomt, is weer $\frac{1}{4}$ van het gedeelte e_2 dat er nu bijgekomen is. Kortom: wat erbij komt, is $\frac{1}{4}$ van wat er bij de generatie daarvoor bijgekomen is. Dus $e_{k+1} = \frac{1}{4}e_k$.

Opgave 2.9. Omdat $e_1 = \frac{1}{4}$ (zie figuur 2.3, linkerfiguur), volgt uit opgave 2.8 dat $e_2 = \frac{1}{16}$, $e_3 = \frac{1}{64}$ enz. Omdat d per definitie gelijk is aan $e_1 + e_2 + e_3 + \cdots$ volgt $d = e_1 + e_2 + e_3 + \cdots = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots$.

Opgave 2.10. Begin met $d = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots$. Vermenigvuldig links en rechts met 4, dan volgt $4d = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots = 1 + d$. Uit $4d = 1 + d$ volgt $d = \frac{1}{3}$.

Opgave 2.12. Dit gaat hetzelfde als opgave 2.10. We beginnen met $d = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots$. Vermenigvuldig links en rechts met x, dan volgt $xd = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots = 1 + d$. Dus $xd = 1 + d$ zodat $d = \frac{1}{x-1}$.

Opgave 2.13. De afstand d_k is met behulp van e_k gedefinieerd: $d_{k+1} = d_k + e_{k+1}$, $d_0 = 0$ en $e_k = (\frac{1}{4})^k$, zie paragraaf 2.1.3. Daarmee is $d_1 = e_1 = \frac{1}{4}$. We moeten aantonen dat de bewering

$P(k)$: $d_k = \sum_{j=1}^{k} (\frac{1}{4})^j$ voor alle $k \geq 1$

waar is.

Beginnen we met $P(0)$ die zegt dat $d_1 = \frac{1}{4}$ en dat is in overeenstemming met de definitie van d_k, dus $P(0)$ is waar.

Stel nu dat $P(k)$ waar is voor zekere k, is dan $P(k+1)$ waar? We berekenen:

$$\sum_{j=1}^{k+1} (\tfrac{1}{4})^j = \sum_{j=1}^{k} (\tfrac{1}{4})^j + (\tfrac{1}{4})^{k+1} = d_k + (\tfrac{1}{4})^{k+1} = d_k + e_{k+1} = d_{k+1}.$$

Eerst hebben we de som gesplitst, in de tweede stap gebruiken we de veronderstelling dat $P(k)$ waar is en in de derde stap gebruiken we de definitie van e_k, tot slot gebruiken we de definite van d_k. Dus als $P(k)$ waar is, volgt daaruit dat $P(k+1)$ ook waar is.

Met het principe van volledige inductie volgt nu dat $P(k)$ waar is voor alle $k \geq 1$.

Opgave 2.14. De te bewijzen bewering luidt:

$P(n)$: $\sum_{j=0}^{n} a^j = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, voor alle $n \geq 0$.

De bewering is duidelijk waar voor $n = 0$, want $a^0 = 1$ en $\frac{1-a^1}{1-a} = 1$, dus $P(0)$ is waar.

Stel, de bewering is waar voor zekere $n = k$. Hoe zit het dan met $k + 1$? We berekenen:

$$\sum_{j=0}^{k+1} a^j = \sum_{j=0}^{k} a^j + a^{k+1} = \frac{1-a^{k+1}}{1-a} + a^{k+1} = \frac{1-a^{k+1}}{1-a} + \frac{a^{k+1}-a^{k+2}}{1-a} = \frac{1-a^{k+2}}{1-a}.$$

Uit de veronderstelling dat $P(k)$ waar is, volgt dat $P(k+1)$ ook waar is.

Met het principe van volledige inductie volgt nu dat $P(n)$ waar is voor alle $n \geq 0$.

We gebruiken het bovenstaande om $\lim_{k\to\infty} d_k$ te bepalen:

$$\lim_{k\to\infty} d_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} (\tfrac{1}{4})^j = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} (\tfrac{1}{4})^j - 1 = \lim_{k\to\infty} \frac{1-(\frac{1}{4})^{k+1}}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \tfrac{1}{3}.$$

Hierin hebben we gebruikt dat $\lim_{k\to\infty} (\frac{1}{4})^{k+1} = 0$ en

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} (\tfrac{1}{4})^j = \lim_{k\to\infty} \frac{1-(\frac{1}{4})^{k+1}}{1-\frac{1}{4}}.$$

Het bewijs van deze laatste stap valt buiten het bestek van het Zebra boekje.

Opgave 2.15. Aangezien $d = \frac{1}{3}$ ligt het verste punt van het eiland dus $\frac{1}{3}$ van de oorspronkelijke kustlijn af. De oorspronkelijke kustlijn ligt weer $\frac{1}{2}$ af van het middelpunt van het vierkant waarmee we begonnen. Dus een straal van bijvoorbeeld 5 is zeker voldoende.

Iets meer informatie geeft figuur 2.4. De gehele noordkust blijft altijd binnen het vierkant $ADBC$. Dus de straal DC is voldoende; dat is precies 1.

Opgave 2.16.

Opgave 2.17.

Opgave 2.18.

Opgave 2.19.

Opgave 2.20.

Opgave 2.21. Het dikke gedeelte van de zijde van een vierkant willen we nog net kunnen tekenen met het potlood. Bij de eerste generatie is dit $\frac{1}{3}$ cm, bij de tweede generatie $\frac{1}{9}$ cm, enz. Bij de k-de generatie is de dikte $(\frac{1}{3})^k$ cm. We kunnen nog tekenen als $(\frac{1}{3})^k\text{cm} \geq 0.1\text{mm} = 0.01\text{cm}$. De vergelijking $(\frac{1}{3})^k = 0.01$ levert $k = 4.1918\ldots$. Omdat k een geheel getal moet zijn, betekent dit dat we de vierde generatie nog net kunnen tekenen.

Natuurkundige finesses, die zeggen dat elke meting een bepaalde nauwkeurigheid heeft en het onjuist is om te schrijven "dikte $= \frac{1}{3}$cm", blijven buiten beschouwing. In deze opgave wordt aangenomen dat 0.1 mm betekent: exact 0.1 mm met oneindige nauwkeurigheid.

Opgave 2.22. V_1 ontstaat door uit V_0 een vierkantje met zijde $\frac{1}{3}$ weg te snijden. Dit vierkantje heeft oppervlakte $\frac{1}{9}$. De overblijvende oppervlakte is dus $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Dus $O(V_1) = \frac{8}{9} \cdot O(V_0)$.

Opgave 2.23. V_2 ontstaat uit V_1 door uit V_1 8 vierkantjes met zijde $\frac{1}{9}$ weg te snijden. De totale oppervlakte van deze 8 vierkantjes bedraagt $8 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{81}$. Dus $O(V_2) = O(V_1) - \frac{8}{81} = \frac{8}{9} - \frac{8}{81} = \frac{64}{81} = \frac{64}{81} \cdot O(V_0)$.

Opgave 2.24. Uit de resultaten van opgave 2.23 is af te leiden: $O(V_k) = (\frac{8}{9})^k \cdot O(V_0)$.

Opgave 2.25. $\lim_{k\to\infty} O(V_k) = \lim_{k\to\infty} (\frac{8}{9})^k \cdot O(V_0) = 0$ voor elke waarde van $O(V_0)$ (dus ook voor $O(V_0) = 1$).

Opgave 2.26. De bewering luidt:

$P(k)$: De oppervlakte van generatie k is: $O(V_k) = (\frac{8}{9})^k \cdot O(V_0)$.

Dan is de bewering zeker waar voor $k = 0$. Verder wordt bij elke volgende generatie de oppervlakte $\frac{8}{9}$ keer zo klein. Immers, we snijden uit elke vierkantje het middelste $\frac{1}{9}$ deel weg. Dus $O(V_{k+1}) = \frac{8}{9} \cdot O(V_k) = \frac{8}{9} \cdot (\frac{8}{9})^k \cdot O(V_0) = (\frac{8}{9})^{k+1} \cdot O(V_0)$. Dus als de bewering waar is voor k, is hij ook waar voor $k+1$. De bewering is dus met het principe van volledige inductie waar voor iedere $k \geq 0$.

Opgave 2.27.

Opgave 2.28. Van elk vierkantje dat op enig moment ontstaat, zullen de hoekpunten daarna nooit meer verwijderd worden. De hoekpunten van het beginvierkant zullen natuurlijk ook nooit verwijderd worden.

Opgave 2.29. Het aantal vierkantjes bij de k-de generatie is 4^k.

De lengte van een zijde van een vierkantje bij de k-de generatie is $(\frac{1}{4})^k$. Dus de omtrek van een vierkantje bij de k-de generatie is $4 \cdot (\frac{1}{4})^k$.

De totale omtrek van alle vierkantjes samen bij de k-de generatie is $4^k \cdot 4 \cdot (\frac{1}{4})^k = 4$.

Dus de totale omtrek is 4, ongeacht de generatie. Dit is te verklaren met figuur 2.8. De middelste delen van de zijden van het vierkant worden verwijderd. Ze worden daarna opnieuw gebruikt om de ontbrekende delen van de kleine vierkanten te maken. De totale omtrek verandert niet. Voor de volgende generatie worden de middelste delen van de zijden van de kleine vierkanten verwijderd, maar ook die worden daarna hergebruikt om de ontbrekende delen van de omtrek van de nog kleinere vierkantjes te maken, enz.

Opgave 2.30. De lengte van een zijde van een vierkantje bij de k-de generatie is $(\frac{1}{4})^k$. Dus de oppervlakte van een vierkantje bij de k-de generatie is $(\frac{1}{4})^k \cdot (\frac{1}{4})^k = (\frac{1}{16})^k$.

Opgave 2.31. Het aantal vierkantjes bij de k-de generatie is 4^k. De oppervlakte van een vierkantje bij de k-de generatie is $(\frac{1}{4})^k \cdot (\frac{1}{4})^k = (\frac{1}{16})^k$. Dus de totale oppervlakte van alle vierkantjes samen bij de k-de generatie is $4^k \cdot (\frac{1}{16})^k = (\frac{1}{4})^k$.

Opgave 2.32. De totale oppervlakte van alle vierkantjes samen gaat naar nul, want $\lim_{k\to\infty} (\frac{1}{4})^k = 0$.

Opgave 2.33. Herhaling van opgave 2.29: Het aantal vierkantjes bij de k-de generatie is 4^k. De lengte van een zijde van een vierkantje bij de k-de generatie is p^k. Dus de omtrek van een vierkantje bij de k-de generatie is $4 \cdot p^k$. De totale omtrek van alle vierkantjes samen bij de k-de generatie is $4^k \cdot 4 \cdot p^k = 4 \cdot (4p)^k$.

Herhaling van opgave 2.30: De lengte van een zijde van een vierkantje bij de k-de generatie is p^k. Dus de oppervlakte van een vierkantje bij de k-de generatie is $p^k \cdot p^k = (p^2)^k$.

Herhaling van opgave 2.31: Het aantal vierkantjes bij de k-de generatie is 4^k. De oppervlakte van een vierkantje bij de k-de generatie is $(p^2)^k$. Dus de totale oppervlakte van alle vierkantjes samen bij de k-de generatie is $4^k \cdot (p^2)^k = (4p^2)^k$.

Herhaling van opgave 2.32: Voor $0 \leq p < \frac{1}{2}$ is $\lim_{k\to\infty}(4p^2)^k = 0$. Dus de totale oppervlakte van alle vierkantjes samen gaat naar nul voor iedere p die voldoet aan $0 \leq p < \frac{1}{2}$.

Opgave 2.34. De totale omtrek van alle vierkantjes samen bij de k-de generatie is $4^k \cdot 4 \cdot p^k = 4 \cdot (4p)^k$. Nu is $\lim_{k\to\infty} 4 \cdot (4p)^k = 0$ als $|4p| < 1$, dus als $-\frac{1}{4} < p < \frac{1}{4}$. Omdat p hier bovendien positief moet zijn gaat de totale omtrek van alle vierkantjes samen naar nul als $0 < p < \frac{1}{4}$.

Opgave 2.35. De totale omtrek van alle vierkantjes samen bij de k-de generatie is $4^k \cdot 4 \cdot p^k = 4 \cdot (4p)^k$. Omdat $\lim_{k\to\infty} 4 \cdot (4p)^k = \infty$ als $4p > 1$ en omdat bovendien $0 < p < \frac{1}{2}$, gaat de totale omtrek van alle vierkantjes samen naar oneindig als $\frac{1}{4} < p < \frac{1}{2}$.

Opgave 2.36. Bij opgave 2.29 is de verandering in de omtrek verklaard uit het hergebruiken van de middelste delen van de zijden van het grote vierkant. Dat kan hier ook.

Voor $0 < p < \frac{1}{4}$ is de lengte van de middelste delen van de zijden van het grote vierkant te veel om de ontbrekende delen van de kleine vierkanten te maken. Er blijft wat over. De totale omtrek van de kleine vierkanten is dus kleiner dan de omtrek van het grote vierkant. Dat is bij elke volgende generatie zo, dus de totale omtrek gaat naar nul.

Voor $\frac{1}{4} < p < \frac{1}{2}$ is de lengte van de middelste delen van de zijden van het grote vierkant te weinig om de ontbrekende delen van de kleine vierkanten te maken. Er komt "gratis" wat bij. De totale omtrek van de kleine vierkanten is dus groter dan de omtrek van het grote vierkant. Dat is bij elke volgende generatie zo, dus de totale omtrek gaat naar oneindig.

Opgave 2.37. De ander vier intervallen zijn $[0.9, 0.901]$, $[0.909, 0.91]$, $[0.99, 0.991]$ en $[0.999, 1]$.

Opgave 2.38. Er blijven twee intervallen over, elk met lengte 0.1. Dus de totale lengte van de overblijvende intervallen bedraagt 0.2.

Opgave 2.39. Er blijven vier intervallen over, elk met lengte 0.01. Dus de totale lengte van de overblijvende intervallen bedraagt 0.04.

Opgave 2.40. Er blijven acht intervallen over, elk met lengte 0.001. Dus de totale lengte van de overblijvende intervallen bedraagt 0.008.

Opgave 2.41. Het aantal intervallen wordt twee keer zo groot, de lengte van een interval wordt tien keer zo klein. Dus de totale lengte van alle intervallen samen wordt 0.2 maal zo groot. Vergelijk dit met de antwoorden op de vragen 2.38 tot en met 2.40.

Opgave 2.42. De totale lengte van alle overblijvende intervallen wordt per stap 0.2 maal zo groot. Bij het begin is de lengte 1, na de eerste stap 0.2. Noem de lengte na de k-de stap L_k, dan volgt $L_k = (0.2)^k$.

Opgave 2.43. Bij opgave 2.42 zagen we dat $L_k = (0.2)^k$. Het is duidelijk dat $\lim_{k\to\infty} L_k = 0$.

Opgave 2.44. De bewering luidt:

> $P(k)$: de totale lengte L_k van alle intervallen na de k-de stap is $(0.2)^k$.

De bewering geldt voor $k = 1$ dus $P(1)$ is waar.

Stel nu dat $P(k)$ waar is voor $k = n$. Bij de $n + 1$-ste stap wordt er uit alle nog overgebleven intervallen een interval ter lengte 0.8 weggesneden. Dus de totale lengte van alle overblijvende intervallen is 0.2 maal zo groot geworden, ofwel $L_{n+1} = 0.2 \cdot L_n$. Wegens de veronderstelling is $L_n = (0.2)^n$ en dus is $L_{n+1} = 0.2 \cdot L_n = 0.2 \cdot (0.2)^n = (0.2)^{n+1}$. Zodat uit $P(n)$ is waar volgt dat $P(n + 1)$ waar is.

Met het principe van volledige inductie volgt dan dat $P(k)$ waar is voor alle $k \geq 1$. Dan is eenvoudig in te zien dat $\lim_{k\to\infty} L_k = 0$.

Opgave 2.45. Het zijn de rechter randpunten van intervallen die blijven staan. Ze eindigen op een 1, terwijl eventuele decimalen die aan de 1 voorafgaan uitsluitend nullen en negens zijn.

Opgave 2.46. We schrijven $0.999... = x$ (waarbij $0.999\ldots$ betekent: oneindig veel negens). Dan is $10x = 9.999\ldots$. Dus $10x - x = 9.999\ldots - 0.999\ldots = 9$ (exact). Aan de andere kant is natuurlijk $10x - x = 9x$. Dus $9x = 9$ en $x = 1$.

Opgave 2.47. We zagen dat

$$\sum_{j=0}^{n} a^j = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

en dat daarmee $\sum_{j=0}^{\infty} a^j = \frac{1}{1-a}$ voor $-1 < a < 1$. Nu is

$$\begin{aligned} 0.999... &= 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \ldots = 0.9 \cdot (1 + 0.1 + 0.01 + \ldots) \\ &= 0.9 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 0.1^j = 0.9 \cdot \frac{1}{1 - 0.1} = 1. \end{aligned}$$

Opgave 2.48. $0.01 = 0.00999\ldots$, $0.1 = 0.0999\ldots$ en $0.91 = 0.90999\ldots$

Opgave 2.49. Neem bijvoorbeeld de $\frac{1}{10}$-Cantorgetallen 0.9009 en 0.9099. Hiertussen ligt het getal 0.9033, dit is geen Cantorgetal.

Opgave 2.50. Neem twee Cantorgetallen a en b, waarbij $a < b$. Neem aan dat de eerste k decimalen van a en b hetzelfde zijn (eventueel kan k nul zijn) en de $(k + 1)$-ste decimaal verschillend. Zo'n k is er zeker, want de beide getallen zijn verschillend. Omdat de $(k + 1)$-ste decimaal verschillend is, heeft a als $(k + 1)$-ste decimaal een 0 en b als $(k + 1)$-ste decimaal een 9. Construeer nu het getal x als volgt: de eerste k decimalen zijn hetzelfde als bij de beide Cantorgetallen, de $(k + 1)$-ste decimaal is bijvoorbeeld 3. Dan is x geen Cantorgetal, terwijl $a < x < b$.

Opgave 2.51. De eerste tot en met $(k - 1)$-de decimaal is nul of negen, de k-de decimaal is geen nul of negen.

Opgave 2.52. Bij de eerste stap zit het getal $0.909090909\ldots$ in het rechterdeel dat blijft staan. Kijk nu alleen naar het interval waarin het beland is. Bij de tweede stap zit het in het linkerdeel daarvan dat blijft staan. Kijk weer alleen naar het interval waar het nu in beland is. Bij de derde stap zit het in het rechterdeel daarvan dat blijft staan. Kijk weer alleen naar het interval waar het nu in beland is. Bij de vierde stap zit het in het linkerdeel daarvan dat blijft staan. Enzovoort.

Opgave 2.53. Bij de eerste stap zit het getal 0.90905 in het rechterdeel dat blijft staan. Kijk nu alleen naar het interval waarin het beland is. Bij de tweede stap zit het in het linkerdeel daarvan dat blijft staan. Kijk weer alleen naar het interval waar het nu in beland is. Bij de derde stap zit het in het rechterdeel daarvan dat blijft staan. Kijk weer alleen naar het interval waar het nu in beland is. Bij de vierde stap zit het in het linkerdeel daarvan dat blijft staan. Bij de vijfde stap wordt het getal verwijderd!

Opgave 2.54. De schaalfactor is hier $\frac{1}{3}$.

Opgave 2.55. De schaalfactor is nu α.

Opgave 2.56. Er is al een afbeelding gegeven van de oneven getallen naar $\mathbb{N}$, namelijk $f(m) = (m + 1)/2$ Het is dus nodig en voldoende aan te tonen dat deze afbeelding bijectief is. We herinneren eraan dat een afbeelding bijectief is als deze zowel injectief als surjectief is.

Injectief. Neem twee beelden $(m_1 + 1)/2$ en $(m_2 + 1)/2$. Uit $(m_1 + 1)/2 = (m_2 + 1)/2$ volgt $m_1 = m_2$, de afbeelding is dus injectief.

Surjectief. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is er een m uit de oneven getallen zodat $(m + 1)/2 = n$, namelijk $m = 2n - 1$. Dus de afbeelding is ook surjectief.

Er is dus een bijectieve afbeelding tussen de oneven getallen en $\mathbb{N}$, daarmee is de verzameling van de oneven getallen aftelbaar oneindig.

Opgave 2.57. Neem de afbeelding f, die de verzameling D van dertienvouden afbeeldt op $\mathbb{N}$ via het voorschrift $f(m) = m/13$. Deze afbeelding is injectief, want uit $m_1/13 = m_2/13$ volgt $m_1 = m_2$. De afbeelding is ook surjectief, want voor elke $n \in \mathbb{N}$ is er een $m \in D$ te vinden zodat $m/13 = n$. Dus er is een bijectieve afbeelding tussen de dertienvouden en $\mathbb{N}$, daarmee is de verzameling van de dertienvouden aftelbaar oneindig.

Opgave 2.58. In de opgave staat dat V en W aftelbaar zijn, maar in de tekst is niet gedefinieerd wat dat is.

Definitie. *Een verzameling V heet* aftelbaar *als deze evenveel elementen heeft als een deelverzameling van $\mathbb{N}$.*

Dit betekent dat V in dat geval of eindig veel elementen heeft of aftelbaar oneindig veel.

We gaan de opgave alleen bewijzen voor het geval dat V en W geen gemeenschappelijke elementen hebben, de *doorsnede* $V \cap W$ bevat geen elementen. We zeggen ook wel de doorsnede is leeg. Als V en W wel gemeenschappelijke elementen hebben doen we het volgende. We noemen U de verzameling van elementen van V die niet in W zitten, formeel $U = V \setminus (V \cap W)$. Dan is $V \cup W = U \cup W$ waarin U en W geen gemeenschappelijke elementen hebben. Nu is U een deelverzameling van V en het laatste wat we nog nodig hebben vermelden we zonder bewijs.

Stelling *Iedere deelverzameling van een aftelbare verzameling is aftelbaar.*

In het bewijs onderscheiden we drie gevallen.

1. V en W zijn eindig. Als V en W beiden eindig veel elementen hebben, dan heeft de vereniging $V \cup W$ uiteraard ook eindig veel elementen.

2. V is eindig en W is aftelbaar oneindig. Als V eindig is en zeg k verschillende elementen heeft kunnen we die opnoemen: $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Dan is er een bijectieve afbeelding f van $\{1, \ldots, k\}$ naar V, namelijk $f(i) = v_i$. W is aftelbaar oneindig, dus er is een bijectieve afbeelding g van $\mathbb{N}$ naar W. Met f en g maken we een afbeelding h van $\mathbb{N}$ naar $V \cup W$ als volgt:

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & \text{als } 1 \leq i \leq k, \\ g(i - k + 1) & \text{als } i > k. \end{cases}$$

Het is niet moeilijk in te zien dat h bijectief is, zodat $V \cup W$ aftelbaar oneindig is.

3. V en W zijn aftelbaar oneindig. Als V aftelbaar oneindig is dan is er een bijectieve afbeelding van V naar $\mathbb{N}$. Er is ook een bijectieve afbeelding van $\mathbb{N}$ naar de verzameling E van even getallen, zie stelling 2.6. Maar dan is er een bijectieve afbeelding f direct van E naar V. Op dezelfde manier is er een bijectieve afbeelding g van de oneven getallen O naar W, zie ook opgave 2.56. We maken een afbeelding h van $\mathbb{N}$ naar $V \cup W$:

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & \text{als } i \in E \\ g(i) & \text{als } i \in O. \end{cases}$$

Ook hier is het niet moeilijk in te zien dat h bijectief is, zodat $V \cup W$ aftelbaar oneindig is.

Opgave 2.59. Met de notatie $-\mathbb{N} = \{-m \mid m \in \mathbb{N}\}$ voor de negatieve gehele getallen is $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ de verzameling van alle gehele getallen. Dit is de vereniging van drie aftelbare verzamelingen ($f(n) = -n$ is een bijectieve afbeelding van $\mathbb{N}$ naar $-\mathbb{N}$). Met opgave 2.58 is $-\mathbb{N} \cup \{0\}$ aftelbaar en dus is $(-\mathbb{N} \cup \{0\}) \cup \mathbb{N}$ ook aftelbaar.

Opgave 2.60. Stel dat $\mathbb{R}$ wel aftelbaar is, dan kunnen we alle elementen op een rij zetten. In die rij moeten dan ook alle elementen uit het interval $[0,1]$ staan. Maar in het bewijs van stelling 2.8 hebben we gezien dat als we dat proberen we een element van $[0,1]$ kunnen maken dat niet in die rij voorkomt. In het bijzonder is er dus een element van $\mathbb{R}$ dat niet in die rij voorkomt. De elementen van $\mathbb{R}$ kunnen dus niet op een rij gezet worden zodat $\mathbb{R}$ overaftelbaar is.

Opgave 2.61. We roepen even in herinnering wat het betekent als gezegd wordt: "een limiet bestaat".

Een limiet van een rij f_n bestaat en heeft waarde L (kortweg: $\lim_{n\to\infty} f_n = L$) betekent: voor elke $\varepsilon > 0$, hoe klein ook, bestaat een getal N zodat voor alle $n > N$ geldt $|f_n - L| < \varepsilon$.

Nu voor deze opgave: stel dat de limiet bestaat en waarde L heeft. Dat betekent dat het verschil tussen $\sum_{i=1}^{n} d_i\, 10^{-i}$ en L willekeurig klein wordt, als we n maar groot genoeg nemen. Hoe groot is het verschil tussen $\sum_{i=1}^{n} d_i\, 10^{-i}$ en L? Voor L zelf kunnen we schrijven $\sum_{i=1}^{\infty} d_i\, 10^{-i}$. $\sum_{i=1}^{n} d_i\, 10^{-i}$ zijn de eerste n termen, L heeft oneindig veel termen. Het verschil is dus de "staart"vanaf term $n+1$!

Resteert dus te bewijzen dat we deze staart willekeurig klein kunnen krijgen, als we n maar groot genoeg nemen. Hoe groot kan de staart maximaal zijn? Dan moeten we voor alle d_i uit de staart 9 nemen. De staart is dus maximaal $9 \cdot 10^{-(n+1)} + 9 \cdot 10^{-(n+2)} + \ldots$ Dat is $0.00\ldots00099999\ldots$, waarbij (oneindig veel) negens voorafgegaan worden door n nullen.

Reken mee

$$\begin{aligned} 0.0999\ldots &= 0.999\ldots \cdot 10^{-1} \\ 0.00999\ldots &= 0.999\ldots \cdot 10^{-2} \\ 0.000999\ldots &= 0.999\ldots \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

dus $0.00\ldots000999\ldots$, waarbij (oneindig veel) negens voorafgegaan worden door n nullen, is gelijk aan $0.999\ldots \cdot 10^{-n}$. Maar $0.999\ldots$ met oneindig veel negens is precies gelijk aan 1 (voor een bewijs zie opgave 2.46). Samenvattend:

de staart vanaf $n+1$ is hoogstens 10^{-n}.

Hiermee is het bewijs geleverd. Kies eerst een $\varepsilon > 0$, zo klein als we willen. Neem dan een N zo groot dat 10^{-N} kleiner wordt dan ε, dat kan altijd. Dan is voor alle $n > N$ de staart (zie boven) kleiner dan 10^{-N} en dus kleiner dan ε. Omdat de staart precies het verschil is tussen $\sum_{i=1}^{n} d_i\, 10^{-i}$ en L, is dus het verschil tussen $\sum_{i=1}^{n} d_i\, 10^{-i}$ en L kleiner dan ε voor alle $n > N$. Daarmee is aan de eis voldaan.

Opmerking: in de omschrijving van "een limiet bestaat" staan absoluutstrepen. Omdat de staart toch altijd positief is, hoeven we ons daar verder niet druk om te maken.

Opgave 2.62. Dit gaat op dezelfde manier als het diagonaal proces waarmee aangetoond is dat $[0,1]$ overaftelbaar is.

Stel, $C_{1/10}$ is aftelbaar, dan kunnen de getallen uit $C_{1/10}$C op een rij gezet worden. Vorm deze rij:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.\,\underline{d_{11}}\,d_{12}\,d_{13}\,d_{14}\cdots \\ x_2 &= 0.\,d_{21}\,\underline{d_{22}}\,d_{23}\,d_{24}\cdots \\ x_3 &= 0.\,d_{31}\,d_{32}\,\underline{d_{33}}\,d_{34}\cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

De cijfers d_{11}, d_{12}, d_{13} enz. zijn de decimalen van het eerste getal x_1, de cijfers d_{21}, d_{22}, d_{23} enz. zijn de decimalen van het eerste getal x_2, enz. Omdat $x_1, x_2, \ldots$ $\frac{1}{10}$-Cantor-getallen zijn, geldt $d_{ij} \in \{0, 9\}$ (de decimalen zijn 0 of 9). Vorm nu het getal $x = e_1e_2e_3$ als volgt: kies $e_i = 9 - d_{ii}$ voor $i \in \mathbb{N}$. Dus als $d_{11} = 0$, neem dan $e_1 = 9$, als $d_{22} = 9$ neem dan $e_2 = 0$, enzovoort. Dan is het getal x wel een Cantorgetal (de decimalen zijn uitsluitend 0 of 9), maar het staat niet in de rij: voor alle $i \in \mathbb{N}$ is $x \neq x_i$. Dus $C_{1/10}$ is overaftelbaar.

Opgave 2.63. Laat x een getal uit $[0, 1]$ zijn, dan heeft x een decimale ontwikkeling van de vorm $x = 0.d_1d_2d_3\ldots$. Om allerlei uitzonderingen te voorkomen spreken we voor de uitwerking van deze opgave af dat we een decimale ontwikkeling die eindigt met een oneindig lange staart van negens vervangen door een equivalente eindige decimale ontwikkeling, zie opgaven 2.46 en 2.48. Dus bijvoorbeeld $0.12345999\ldots = 0.12346000\ldots$ waarin de laatste decimale ontwikkeling eindig heet omdat deze eindigt met een oneindige staart van nullen.

Stel nu dat x geen $\frac{1}{10}$-Cantor-getal is en decimale ontwikkeling $x = 0.c_1c_2\ldots c_kd_{k+1}\ldots$ heeft met $c_i \in \{0, 9\}$ en d_{k+1} is het eerste cijfer niet nul of negen. Dan ligt x in het interval (a, b) waarin $a = 0.c_1c_2\ldots c_k1$ en $b = 0.c_1c_2\ldots c_k9$. Dit interval wordt in de $(k+1)$-ste stap van de constructie van $C_{1/10}$ uit $[0, 1]$ verwijderd en dus bevat het interval (a, b) geen enkel $\frac{1}{10}$-Cantor-getal.

Opgave 2.64. De verzameling $\mathbb{Q}$ bestaat uit alle breuken, dat zijn getallen die te schrijven zijn als $\frac{k}{n}$ met $k \in \mathbb{Z}$ en $n \in \mathbb{N}$. Zij vormen een aftelbaar oneindige verzameling, daarvan geven we nu geen bewijs. Breuken hebben ook een decimale ontwikkeling, maar dan een met bijzondere eigenschappen. Deze is namelijk of eindig of repeterend. Ook het omgekeerde geldt, heeft een getal een eindige of repeterende decimale ontwikkeling dan is het een breuk.

We nemen a en b in $[0, 1]$ met $a < b$. Het gemiddelde van a en b noemen we c, dan $c = \frac{1}{2}(a + b)$. Er geldt $a < c < b$ en $c - a = b - c = \frac{1}{2}(b - a)$, dat wil zeggen c ligt weer tussen a en b en even ver van a als van b. We mogen niet verwachten dat c een breuk is. Stel $c = 0.c_1c_2c_3\ldots$ en $q = 0.c_1c_2\ldots c_k000\ldots$, de eerste k decimalen van c zijn dezelfde als die van q. Maar q heeft een eindige ontwikkeling en is dus een breuk.

Als we er nu voor kunnen zorgen dat $c - q < \frac{1}{4}(b - a)$ dan is $a < q < b$ en hebben we een breuk gevonden tussen a en b. Stel dat $\frac{1}{4}(b - a) = 0.0\ldots0d_{l+1}\ldots$ met $d_{l+1} \neq 0$, dan is $\frac{1}{4}(b - a) \geq 10^{-l}$. Maar $c - q < 10^{-k}$ dus geldt $c - q < \frac{1}{4}(b - a)$ als $k = l$ waarin l bepaald wordt door $\frac{1}{4}(b - a)$. We hebben nu een breuk $q = 0.c_1c_2\ldots c_l000\ldots$ geconstrueerd die tussen a en b ligt.

Opgave 2.65. Zie figuur 6.2.

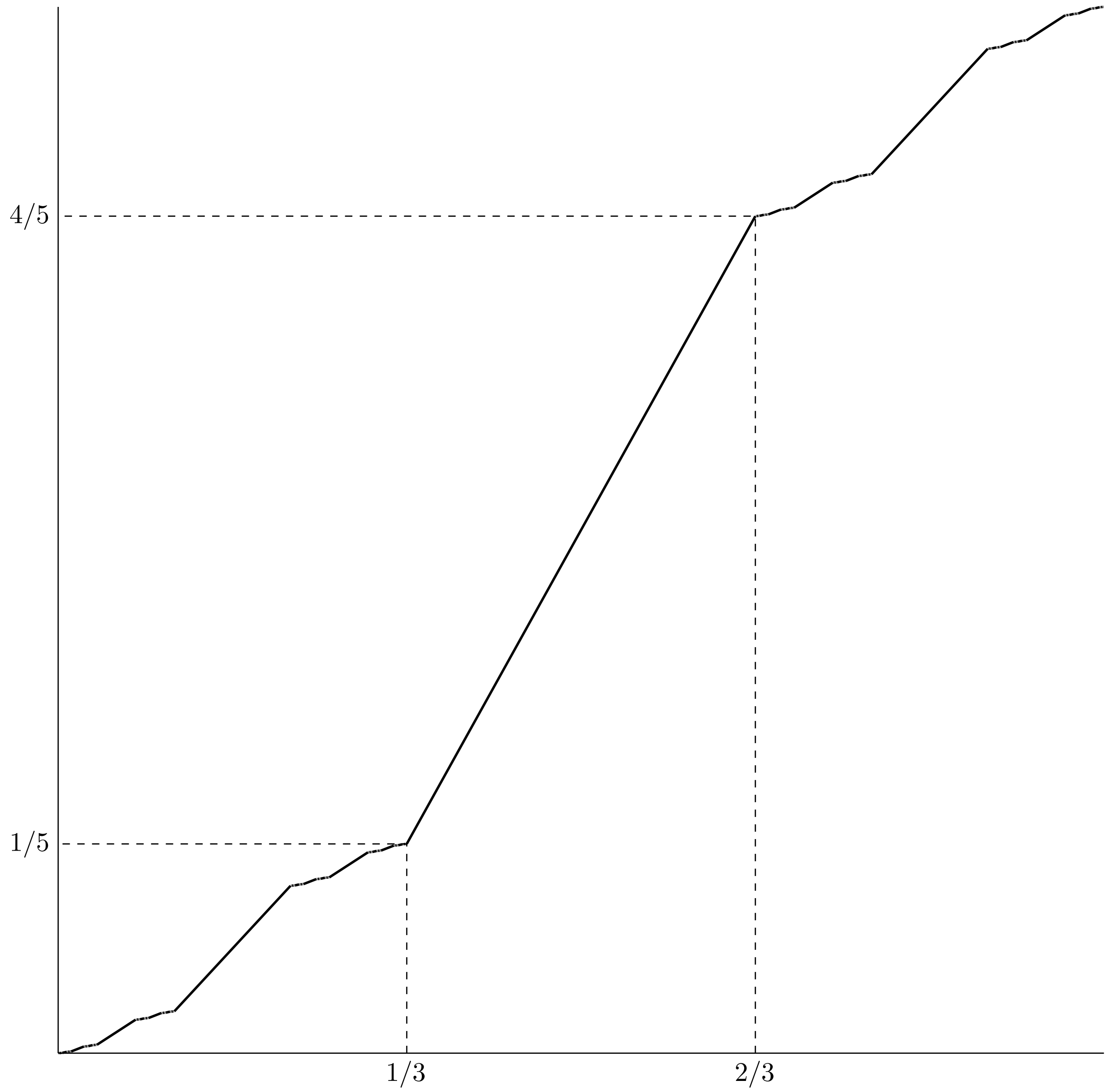
Opgave 3.1. We berekenen de limiet nogmaals met het nieuwe aantal 1-kubussen

$$\lim_{\varepsilon \to 0} N_\varepsilon \cdot \varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} (\frac{3}{\varepsilon} + 1) \cdot \varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} (3 + \varepsilon) = 3.$$

Waaruit blijkt dat een 1-kubus meer voor het bepalen van de lengte niet uitmaakt.

Opgave 3.2. We berekenen de limiet opnieuw met in de ene richting twee 2-kubussen meer en in de andere richting een minder

$$\lim_{\varepsilon \to 0} N_\varepsilon \cdot \varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} (\frac{4}{\varepsilon} + 2) \cdot (\frac{5}{\varepsilon} - 1) \cdot \varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} (\frac{20}{\varepsilon^2} + \frac{6}{\varepsilon} - 2) \cdot \varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} (20 + 6\varepsilon - 2\varepsilon^2) = 20.$$



Figuur 1: *Afbeelding van* $[0, 1]$ *naar* $[0, 1]$ *die* $C_{1/3}$ *afbeeldt op* $C_{1/5}$.

Ook voor oppervlakte bepaling is heel precies tellen niet nodig.

Opgave 3.3. We overdekken de balk met 3-kubussen. De inhoud van één 3-kubus met ribbe ε is ε^3. Het benodigd aantal 3-kubussen om een balk met ribben 2, 3 en 7 te overdekken is $N_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon} \cdot \frac{3}{\varepsilon} \cdot \frac{7}{\varepsilon}$. Daarmee is de maat van de balk

$$\lim_{\varepsilon \to 0} N_\varepsilon \cdot \varepsilon^3 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2}{\varepsilon} \cdot \frac{3}{\varepsilon} \cdot \frac{7}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^3 = 42.$$

Opgave 3.4. Met gelijkvormigheid heeft de gegeven driehoek dezelfde oppervakte als een rechthoek met zijden 1 en $\sqrt{3}$. Als we die rechthoek met 2-kubussen overdekken vinden we als maat

$$\lim_{\varepsilon \to 0} N_\varepsilon \cdot \varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 = \sqrt{3}.$$

In de volgende opgave komen we er minder gemakkelijk van af. Deze opgave kan ook op die manier uitgewerkt worden.

Opgave 3.5. We gaan het vlakdeel begrensd door de lijnen $y = 0$, $x = 1$ en $y = x^2$ overdekken met stapels 2-kubussen. Op de x-as delen we het interval $[0, 1]$ op in kleine intervallen ter lengte ε, dat zijn er ongeveer $\frac{1}{\varepsilon}$. Ter plaatse van het i-de interval bevindt de grafiek zich op hoogte $(\varepsilon i)^2$, zodat we een stapel van ongeveer $\frac{(\varepsilon i)^2}{\varepsilon} = \varepsilon i^2$ 2-kubussen nodig hebben. Het totaal aantal 2-kubussen nodig om het gegeven vlakdeel te overdekken is dan de som van alle stapels (zie opgave 3.2 voor het slordig tellen)

$$N_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon i^2 = \varepsilon \sum_{i=0}^{n} i^2 \ \text{ met } \ n = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Met behulp van volledige inductie kan bewezen worden (maar dat doen we hier niet) dat

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n.$$

Daarmee is

$$N_\varepsilon = \varepsilon \sum_{i=0}^{n} i^2 = \varepsilon(\tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n) = \tfrac{1}{3}\varepsilon^{-2} + \tfrac{1}{2}\varepsilon^{-1} + \tfrac{1}{6}.$$

Dan is de maat van het gegeven vlakdeel

$$\lim_{\varepsilon \to 0} N_\varepsilon \cdot \varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} (\tfrac{1}{3}\varepsilon^{-2} + \tfrac{1}{2}\varepsilon^{-1} + \tfrac{1}{6})\varepsilon^2 = \tfrac{1}{3}.$$

Met behulp van een integraal kan de oppervlakte onder de grafiek van $y = x^2$ berekend worden. Voor het gegeven vlakdeel is dat

$$\int_0^1 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \tfrac{1}{3}$$

in overeenstemming met onze berekening met stapels 2-kubussen.

Opgave 3.6. Met de overdekking van paragraaf 2.1.4 gebruiken we 2-kubussen met ribbe $\varepsilon_n = (\frac{1}{4})^n \frac{1}{2}\sqrt{2}$ voor een speciale limiet. Uit deze paragraaf volgt ook dat $N_{\varepsilon_n} = 8^n$ en daarmee is

$$\lim_{n\to\infty} N_{\varepsilon_n} \cdot \varepsilon_n^2 = \lim_{n\to\infty} 8^n \cdot (\tfrac{1}{4})^{2n} \cdot \tfrac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{3n} (\tfrac{1}{2})^{4n} \tfrac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{3n-4n-1} = \lim_{n\to\infty} 2^{-n-1} = 0.$$

Opgave 3.7. We leggen het interval $[0, 5]$, een 1-dimensionale verzameling, in $\mathbb{R}^2$ bijvoorbeeld op de x-as als volgt: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 5,\ y = 0\}$. We overdekken weer met 2-kubussen, waarvan we er ongeveer $\frac{5}{\varepsilon}$ nodig hebben, dan is

$$\lim_{\varepsilon\to 0} N_\varepsilon \cdot \varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{5}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 5.$$

Opgave 3.8. Het interval $[0, 7]$, opnieuw een 1-dimensionale verzameling, leggen we in $\mathbb{R}^3$ bijvoorbeeld op de $y - as$ als volgt: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ 0 \leq y \leq 7,\ z = 0\}$. Nu overdekken we met 3-kubussen, waarvan we er nu ongeveer $\frac{7}{\varepsilon}$ nodig hebben, en daarmee

$$\lim_{\varepsilon\to 0} N_\varepsilon \cdot \varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{7}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 7.$$

Opgave 3.9. We bepalen alleen de maat van de zijde met eindpunten $(0, 0, 0)$ en $(0, 0, 5)$, dat is de verzameling $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ y = 0,\ 0 \leq z \leq 5\}$. Op dezelfde manier als in opgave 3.7 heeft deze verzameling maat 5.

Opgave 3.10. Uitgangspunt is dat $\mu = \lim_{\varepsilon\to 0} N_\varepsilon(F)\varepsilon^n$ bestaat. Dan bestaat $\lim_{\varepsilon\to 0}(N_\varepsilon(F) + 2)\varepsilon^n$ ook en heeft waarde μ want

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(N_\varepsilon(F) + 2)\varepsilon^n = \lim_{\varepsilon\to 0} N_\varepsilon(F)\varepsilon^n + \lim_{\varepsilon\to 0} 2\varepsilon^n = \lim_{\varepsilon\to 0} N_\varepsilon(F)\varepsilon^n = \mu.$$

Ook $\lim_{\varepsilon\to 0} 3N_\varepsilon(F)\varepsilon^n$ bestaat, maar deze heeft waarde 3μ want

$$\lim_{\varepsilon\to 0} 3N_\varepsilon(F)\varepsilon^n = 3 \lim_{\varepsilon\to 0} N_\varepsilon(F)\varepsilon^n = 3\mu.$$

Opgave 3.11. We leggen de rechthoek met zijden 4 en 5 als volgt in $\mathbb{R}^2$: $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 5\}$. Vervolgens overdekken we met 2-kubussen. Daarvan hebben we er ongeveer $\frac{4}{\varepsilon} \cdot \frac{5}{\varepsilon}$ nodig. Dan is

$$\begin{aligned}
\dim(F) &= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{\log(N_\varepsilon(F))}{\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{\log(\frac{4}{\varepsilon} \cdot \frac{5}{\varepsilon})}{\log \varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{\log 20 - \log \varepsilon^2}{\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{\log 20}{\log \varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2 \log \varepsilon}{\log \varepsilon} = 2.
\end{aligned}$$

Opgave 3.12. Nu leggen we de rechthoek van opgave 3.11 in $\mathbb{R}^3$. Dan bekijken we de verzameling $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 5,\ z = 0\}$. We overdekken met 3-kubussen. Daarvan hebben we er ongeveer $\frac{4}{\varepsilon} \cdot \frac{5}{\varepsilon}$ nodig. Dan is

$$\dim(F) = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{\log(N_\varepsilon(F))}{\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{\log(\frac{4}{\varepsilon} \cdot \frac{5}{\varepsilon})}{\log \varepsilon} = 2.$$

Opgave 3.13. In $\mathbb{R}^5$ leggen we de rechthoek met zijden 4 en 5 bijvoorbeeld neer als volgt $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 0 \leq x_1 \leq 4,\ 0 \leq x_2 \leq 5,\ x_3 = x_4 = x_5 = 0\}$. We overdekken met 5-kubussen, waarvan we er ongeveer $\frac{4}{\varepsilon} \cdot \frac{5}{\varepsilon}$ nodig hebben. De rest gaat als de vorige opgave.

Opgave 3.14. Uitgangspunt is dat

$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{\log(N_\varepsilon(F))}{\log \varepsilon}$$

bestaat. Verder gaan we gebruik maken van het feit dat $N_\varepsilon(F) \to \infty$ als $\varepsilon \to 0$. Als we bij het overdekken een fout maken van vast aantal m-kubussen maakt dat voor de dimensie berekening niet uit, namelijk

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{\log(N_\varepsilon(F)+2)}{\log \varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{\log(N_\varepsilon(F)(1+\frac{2}{N_\varepsilon(F)}))}{\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{\log(N_\varepsilon(F)) + \log(1+\frac{2}{N_\varepsilon(F)})}{\log \varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{\log(N_\varepsilon(F))}{\log \varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{\log(1+\frac{2}{N_\varepsilon(F)})}{\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{\log(N_\varepsilon(F))}{\log \varepsilon} = d.
\end{aligned}$$

Zelfs als we er bij het overdekken met m-kubussen een vaste factor naast zitten maakt dat voor de dimensie niet uit (voor het bepalen van maat maakt daarentegen wel uit, zie opgave 3.10), want

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{3\log(N_\varepsilon(F))}{\log \varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{\log 3 + \log(N_\varepsilon(F))}{\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{\log 3}{\log \varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{\log(N_\varepsilon(F))}{\log \varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{\log(N_\varepsilon(F))}{\log \varepsilon} = d.
\end{aligned}$$

Als we bij het bepalen van het aantal m-kubussen een nog grovere fout maken, bijvoorbeeld het quadraat van het benodigde aantal, dan bestaat de limiet nog wel, maar de waarde is niet meer d.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{\log(N_\varepsilon(F)^2)}{\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} -2\frac{\log(N_\varepsilon(F))}{\log \varepsilon} = 2d.$$

Opgave 3.15. De som $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \beta_i$ is het gemiddelde van $\beta_1, \ldots, \beta_k$. We zullen zien dat dat gemiddelde in de limiet $k \to \infty$ niet hoeft te bestaan. Stel je maakt een lange fietstocht en je fietscomputer meet om de paar seconden je snelheid, dan kun je steeds je gemiddelde snelheid tot dan toe aflezen. Om er geen uitputtingsslag van te maken, maar toch door te fietsen laat je je gemiddelde snelheid niet boven de 30 km/u komen en niet onder de 20 km/u. Dat doe je door bij een gemiddelde van 20 km/u net zo lang harder te gaan fietsen tot je gemiddelde bij 30 km/u gekomen is, dan ga je recupereren tot het gemiddelde weer 20 km/u is, waarna je opnieuw versnellen gaat. Omdat het gemiddelde vanaf je vertrek berekend wordt moet je steeds langer hard fietsen om het gemiddelde van 30 km/u te halen, maar daar staat tegenover dat je ook steeds langer mag recupereren tot je weer bij een gemiddelde van 20 km/u bent gekomen. Als je de β_i, je snelheid op tijdstip i, op deze manier kiest dan blijft het gemiddelde altijd tussen 20 en 30 km/u variëren. Dit betekent dat $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \beta_i$ niet bestaat. In het bijzonder betekent dit dat de dimensie van C_ω volgens onze definitie niet bestaat. Er is een manier om dit te ondervangen, maar dat valt buiten het bestek van de zebra.

Om dit te bereiken kun je de β_i als volgt kiezen: $\beta_1 = 20$ en voor $i = 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1}$, $n \geq 0$ is

$$\beta_i = \begin{cases} 10 \text{ als } n \text{ oneven} \\ 40 \text{ als } n \text{ even} \end{cases}$$

dus $\beta = (20, 40, 10, 10, 40, 40, 40, 40, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, \ldots)$.

Opgave 3.16. Na de k-de stap zijn er $n_k = 4^k$ vierkantjes.

Opgave 3.17. De lengte van een zijde van een vierkantje na de k-de stap is $\varepsilon_k = (\frac{1}{4})^k$.

Opgave 3.18. De dimensie van $SV_{1/4}$ is volgens onze definitie

$$\dim(SV_{1/4}) = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{\log N_\varepsilon(SV_{1/4})}{\log \varepsilon} = \lim_{k\to\infty} -\frac{\log n_k}{\log \varepsilon_k} = \lim_{k\to\infty} -\frac{\log 4^k}{\log(\frac{1}{4})^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k\log 4}{k\log 4} = 1.$$

Opgave 3.19. Na de k-de stap zijn er in SV_p eveneens $n_k = 4^k$ vierkantjes. Nu hebben deze echter een zijde met lengte $\varepsilon_k = p^k$. Daarmee is de dimensie van SV_p

$$\dim(SV_p) = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{\log N_\varepsilon(SV_p)}{\log \varepsilon} = \lim_{k\to\infty} -\frac{\log n_k}{\log \varepsilon_k} = \lim_{k\to\infty} -\frac{\log 4^k}{\log p^k} = \lim_{k\to\infty} -\frac{k\log 4}{k\log p} = -\frac{\log 4}{\log p}.$$

Opgave 3.20. De dimensie van SV_p is alleen 1 als $-\frac{\log 4}{\log p} = 1$ en dat kan alleen als $\log p = -\log 4$ ofwel alleen als $p = \frac{1}{4}$.

Opgave 3.21. De lengte van een lijnstukje na de k-de stap in de constructie van het Peano eiland is $\varepsilon_k = (\frac{1}{4})^k$.

Opgave 3.22. Het aantal lijnstukjes na de k-de stap in de constructie van het Peano eiland is $n_k = 8^k$.

Opgave 3.23. De dimensie van het Peano eiland is volgens onze definitie

$$\begin{aligned}\dim(P_{1/4}) &= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{\log N_\varepsilon(P_{1/4})}{\log \varepsilon} = \lim_{k\to\infty} -\frac{\log n_k}{\log \varepsilon_k} = \lim_{k\to\infty} -\frac{\log 8^k}{\log(\frac{1}{4})^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k\log 8}{k\log 4} \\ &= \frac{\log 8}{\log 4} = \frac{\log 2^3}{\log 2^2} = \frac{3\log 2}{2\log 2} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Opgave 3.24. Met de overdekking uit paragraaf 2.1.4 vinden we dezelfde waarde voor de dimensie als in de vorige opgave. Dit kan nagerekend worden met $\varepsilon_k = (\frac{1}{4})^k \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $n_k = 8^k$

$$\begin{aligned}\dim(P_{1/4}) &= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{\log N_\varepsilon(P_{1/4})}{\log \varepsilon} = \lim_{k\to\infty} -\frac{\log n_k}{\log \varepsilon_k} = \lim_{k\to\infty} -\frac{\log 8^k}{\log((\frac{1}{4})^k \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2})} \\ &= \lim_{k\to\infty} -\frac{k\log 8}{k(-\log 4 + \frac{1}{k}\log\frac{1}{2}\sqrt{2})} = \lim_{k\to\infty} -\frac{\log 8}{-\log 4 + \frac{1}{k}\log\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\log 8}{\log 4} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$