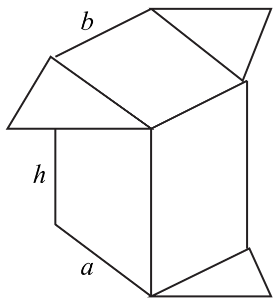
**Workshop** **Nationale Wiskunde Dagen 2007**
**Cellofaan van Koffiepakken**



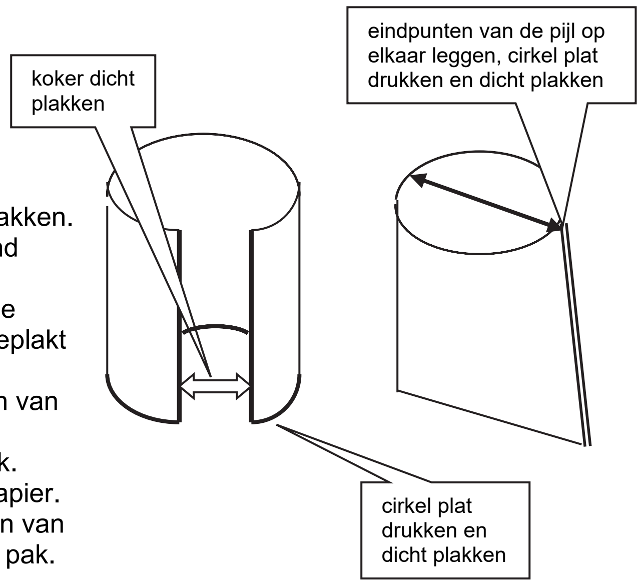

Wie wel eens een pak koffie heeft opengemaakt zal het zijn opgevallen dat het cellofaan aan de bovenkant twee grote flappen heeft, en onderaan twee kleine op de smalle breedte. Dit is gedaan om de koffie op soepele wijze te kunnen overgieten in een bewaarreservoir; knip een punt van een van de grote flappen af en trek het pak open; giet vervolgens de koffie in het reservoir. Als je nog eens goed kijkt naar het lege cellofaan, dan kun je deze uittrekken tot een viervlak, een driezijdige piramide zogezegd. De gesealde onderrand staat als het ware dwars op de gesealde bovenrand.

In deze workshop bekijken we hoe de vorm van dergelijke pakken bepaald wordt door de afmetingen van het cellofaan, en hoe de inhoud ervan samenhangt met de vorm. Pak er maar eens een folie bij.

Door de fabrikant zal de koffie in een gedeeltelijk dichtgeplakte zak gegoten worden.
De zak zit onderaan op één rand dichtgeplakt.
Daarna wordt het pak vacuüm gezogen en in de gewenste vorm, met de vier flappen, geperst.

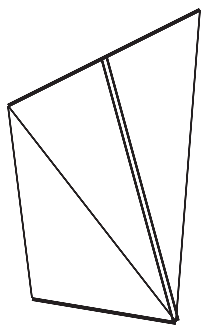
De inhoud van het lege folie, in de vorm van een viervlak, zal hopelijk geen kleinere inhoud hebben dan het pak in de geperste vorm. Anders zou de koffie er uit lopen bij het persen (in de rechthoekige vorm).

Voor het gemak gaan we in deze les voorlopig uit van een rechthoekig blaadje van 13 cm bij 20 cm.
Bij de berekeningen laten we plakranden buiten beschouwing.



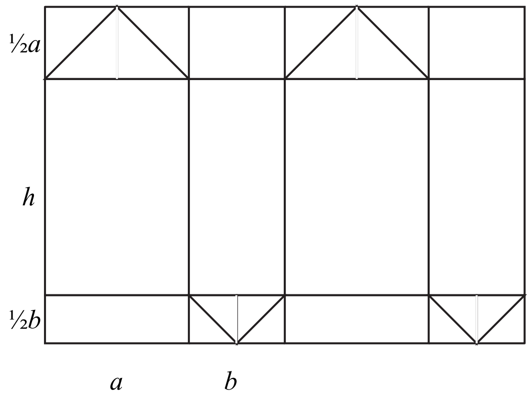

**De vorm**
**1 Het viervlak**
. Knip het ruitjesblad van figuur 1 uit.
. Vouw de dikke lijnen die hier op staan dubbel.
. Maak een koker door de twee kortste zijden aan elkaar te plakken.
. Druk vervolgens de onderste cirkel vanaf de verticale plakrand plat en plak de daardoor ontstane rand dicht .
. Vouw nu de bovenste “cirkel” plat, maar op zo’n manier dat de rand dwars staat op de rand die je met de onderste “cirkel” geplakt hebt.
. De twee dichtgeplakte randen vormen twee van de zes zijden van het viervlak. De overige randen waren al voor gevouwen.
. Vouw nu voorzichtig uit dit viervlak de vorm van een koffiepak.
. Teken met stift de randen van het rechthoekige pak op het papier.
. Knip het pak open, zodat je goed kunt zien hoe de vouwlijnen van het pak getekend moeten worden voor de bouwplaat van het pak.

**2 Het koffiepak rechtstreeks**
. Maak van het ruitjesblad van figuur 2 het koffiepak volgens de aangegeven lijnen.
Vouw de dikke lijnen van te voren vast dubbel.
. Plak het pak dicht.



. Knip nu het ruitjesblad van figuur 3 uit.
. Bedenk met elkaar waar de vouwlijnen moeten komen, en teken ze er op.
. Maak ook van dit blad het koffiepak, nadat je de vouwlijnen van te voren Hebt dubbel gevouwen.

. Knip nu het ruitjesblad van figuur 4 uit.
. Teken de overige vouwlijnen van het pak op het blad.
. Toon aan dat de hoogte van het koffiepak onafhankelijk is van de gekozen breedte *b*.




**Opdracht 1**
Toon aan dat van alle pakken die je op deze manier uit een blaadje van 13 bij 20 cm maakt de hoogte 8 cm is.

**De inhoud**
**1 De inhoud van het pak** (niveau 4 vwo)

**Opdracht 2**
**a.** Ga na dat de inhoud van het pak met breedten 3 cm en 7 cm precies 168 cm$^3$ is.
**b.** Bereken de inhoud van het pak als de breedte van de zijkanten 2 cm en 8 cm is.

Stel de breedte van de onderste rand in de bouwplaat x, dus $\frac{1}{2}b = x$.
**c.** Welke formule berekent de inhoud $I(x)$ van het pak?
**d.** Bereken hoe groot de inhoud van een dergelijk pak maximaal is.

Vaak is het zo dat regelmatige figuren, uit een zelfde hoeveelheid materiaal gemaakt als minder regelmatige, de grootste inhoud hebben. In dat geval zou je kunnen verwachten dat een pak met een vierkante bodem de grootste inhoud heeft.
**e.** Is dat hier ook zo?

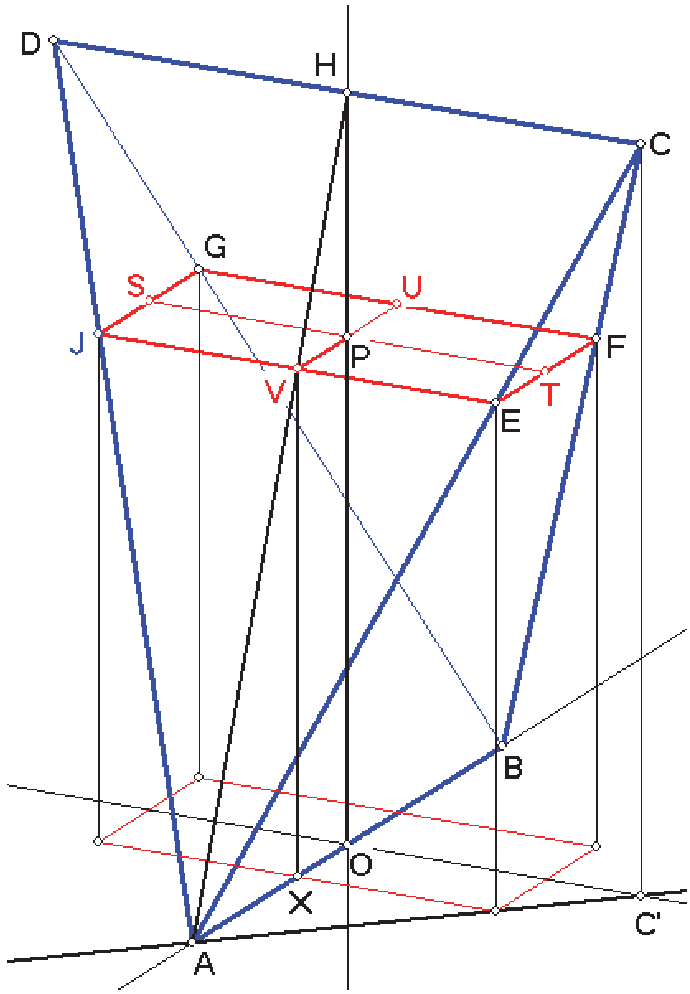
**2 De inhoud van het viervlak** (niveau 6 vwo)
- **De inhoud met een integraal**

Zie figuur.
Plaats het viervlak in een ruimtelijk assenstelsel $Oxyz$..
AB ligt op de x-as, met AO = OB = 5.
Snij het viervlak in horizontale plakjes met dikte $\Delta z$.
Elke verticale doorsnede is een rechthoek (JEFG).
De hoogte (boven het Oxy-vlak) van de rechthoek is OP = z.
De projectie van AC op het Oxy-vlak is AC'.
AC' heeft vergelijking $y = 5 - x$.
Noem OX = $x$, dan is de oppervlakte van rechthoek JEFG gelijk aan $2x \cdot 2y$.
De inhoud van een plakje JEFG is dus $2x \cdot 2y \cdot \Delta z$.

De inhoud van het viervlak kan berekend worden met

$$\int_0^h (2x \cdot 2y)\mathrm{d}z$$

Hierin is $h$ de hoogte OH.
Om de integraal te kunnen berekenen moeten x en y worden uitgedrukt in $z$.
Hiervoor is het handig als je driehoek AOH op ware grootte tekent.
Uit de gelijkvormigheid van $\Delta$AOH met $\Delta$VPH volgt een verband tussen $x$ en $z$.
Met dat verband kun je $x$ uitdrukken in $z$.
Door gebruik te maken van de vergelijking van AC' kun je ook y uitdrukken in z.



**Opdracht 3**
**a.** Toon aan dat de hoogte OH = 12, dus $h$ = 12.

**b**. Toon aan dat uit de gelijkvormigheid van ΔVPH en ΔAOH volgt dat $\frac{x}{5} = \frac{12-z}{12}$.

**c.** Druk $x$ en y exact uit in z

**d.** Toon aan dat de inhoud van het viervlak berekend kan worden met $\int_0^{12} (\frac{25}{3}z - \frac{25}{36}z^2)\mathrm{d}z$

**e.** Bereken de exacte inhoud van het viervlak ABCD.

- **De inhoud met 2 halve piramides**

Je kunt het viervlak opgedeeld zien in twee even grote stukken links en rechts van driehoek ABH.

**Opdracht 4**
**a.** Met welke formule kun je de inhoud berekenen van een piramide?
**b.** Neem ΔABH als grondvlak HC als hoogte (van de rechterhelft van viervlak ABCD), en bereken de inhoud van het viervlak ABCD.

**De oppervlakte van het cellofaan** (niveau 5 vwo)

Tot dusver zijn we uitgegaan van een rechthoekig stuk papier van 13 cm bij 20 cm. Daar stappen we nu van af.

Bij nameten, in cm, van lengte ($a$), breedte ($b$) en hoogte ($h$) van een koffiepak van 500 gram vind je de afmetingen $a$ = 9,1 bij $b$ = 6,5 bij $h$ = 17,1. De inhoud is dus ongeveer 1 liter = 1 dm$^3$ = 1000 cm$^3$.

**Opdracht 5**
**a.** Klopt dit?
**b.** Welke afmetingen heeft het rechthoekige stuk cellofaan van een koffiepak van 500 gram?

Voor de vragen **c**, **d** en **e** nemen we voor de breedte $b$ = 6,5 cm. Deze breedte is handig voor het inpakken van grote aantallen pakken in dozen voor supermarkten en voorraadbussen waarin de pakken bewaard kunnen worden.

Je kunt je vervolgens afvragen welke afmetingen van het cellofaan je zou moeten nemen om een pak met 1 liter inhoud te krijgen, met breedte b = 6,5 cm, en een daarbij zo klein mogelijke oppervlakte van het cellofaan (grondstofbesparing).

Uit de bouwplaat kun je afleiden dat voor de oppervlakte $C$ van de benodigde hoeveelheid cellofaan voor 1 pak koffie van 500 gram geldt:

$$C = (\,2a + 2b\,)(\,h + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b\,)$$

Met $b$ = 6,5 en het gegeven dat de inhoud van het pak 1 liter is, kun je de formule herleiden tot nagenoeg
$C = a^2 + 13a + \frac{2000}{a} + 350$

**c.** Toon dit aan
**d.** Bereken de afmetingen van het rechthoekig stuk cellofaan, waarbij $C$ minimaal is.
**e.** Wordt bij de pakken van 500 gram koffie aan grondstofbesparing gedaan?

Als je de eis dat $b$ = 6,5 cm laat vallen, dan kun je nog andere vragen stellen over de oppervlakte van het rechthoekig stuk cellofaan.
Stel dat je pakken van 1 liter wilt maken waarbij de lengte ($a$) 2 keer zo groot is als de breedte ($b$).
**f.** Bereken de exacte afmetingen van het rechthoekig stuk cellofaan, waaruit een pak koffie van 1 liter gemaakt kan worden met een lengte die 2 keer zo groot is als de breedte, waarbij de oppervlakte van het cellofaan minimaal is.

Ga als volgt te werk:
. druk de formule van $C$ uit in $b$, waarbij de lengte nu 2 keer zo groot is als de breedte; de inhoud is weer 1000 cm$^3$
. differentieer $C$
. los de vergelijking exact op waarmee je de waarde van $b$ kunt vinden voor het minimum van $C$
. bereken de exacte afmetingen van het rechthoekig stuk cellofaan

Antwoorden:

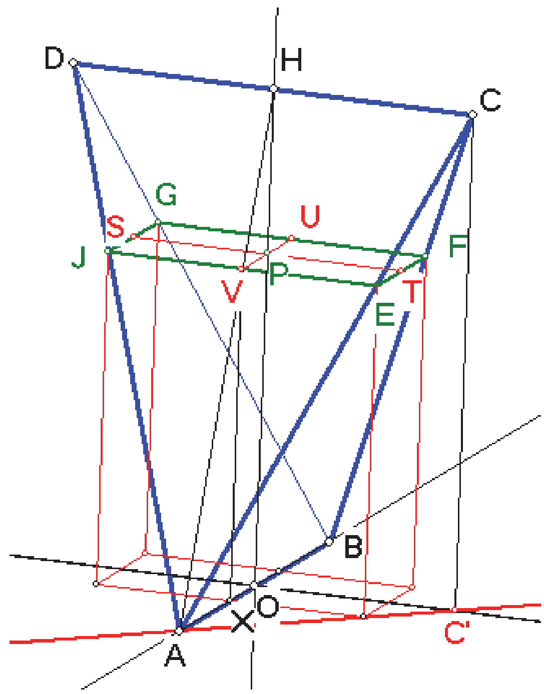
Opdracht 1
$h = 13 - \tfrac12 a - \tfrac12 b = 13 - \tfrac12(a+b)$; $a + b = \frac{20}{2} = 10$; dus $h = 13 - \tfrac12 \cdot 10 = 8$

Opdracht 2
- a. 3×7×8 = 168
- b. 2×8×8 = 128
- c. $I(x) = 2x \times (10 - 2x) \times 8 = 16x \cdot (10 - 2x)$
- d. $I(x)$ is maximaal bij $x = 2\tfrac12$; het maximum is dan $I(2\tfrac12) = 200$
- e. $x = 2\tfrac12$ is de waarde van $x$ waarbij de inhoud maximaal is; dan is zowel $a$ = 5 als $b$ = 5, dus heb je een vierkante bodem

Opdracht 3
- a. AH = 13 (is de breedte van het blaadje); Pythagoras in ΔAOH; OH² = AH² – OA² = 169 – 25 = 144; $h$ = 12
- b. PV : OA = PH : OH geeft x : 5 = (12 – z) : 12
- c. $x = \dfrac{60-5z}{12} = 5 - \dfrac{5}{12}z$ ; $y = 5 - x = 5 - (5 - \dfrac{5}{12}z) = \dfrac{5}{12}z$ ;
- d. $2x \cdot 2y = 4\cdot(5 - \dfrac{5}{12}z)\cdot\dfrac{5}{12}z = \dfrac{25}{3}z - \dfrac{25}{36}z^2$ ; $z$ gaat van 0 tot $h$ = 12; dus de inhoud is de gegeven integraal
- e. $\left[\dfrac{25}{6}z^2 - \dfrac{25}{108}z^3\right]_0^{12} = 25\cdot 24 - 25\cdot 16 = 200$

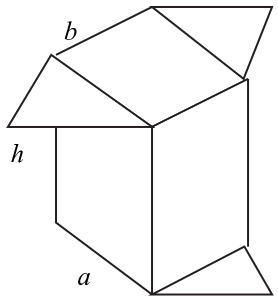
Opdracht 4
- a. $^1/_3$ × Grondvlak × Hoogte
- b. opp drh ABH = ½ × 10 × 12 = 60; inh ABHC = $^1/_3$ × ABH × HC = $^1/_3$ × 60 × 5 + = 100; inh ABCD = 200

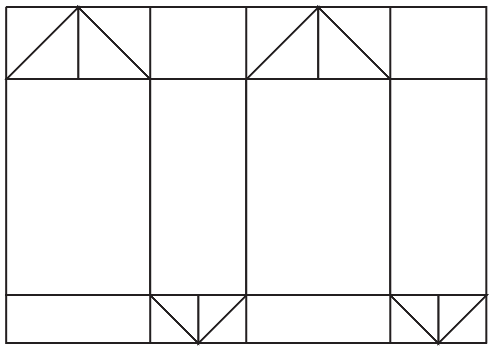
Opdracht 5
- a. 9,1 x 6,5 x 17,1 = 1011,465 cm$^3$
- b. 24,9 cm bij 31,2 cm [ opp = 776,88 cm² ]
- c. $h = {}^{1000}/_{(6{,}5a)}$; $2a + 2b = 2a + 13$; $h + \tfrac12 a + \tfrac12 b = {}^{1000}/_{(6{,}5a)} + \tfrac12 a + 3{,}25$;
  $C = (2a + 13)({}^{1000}/_{(6{,}5a)} + \tfrac12 a + 3{,}25)$; haakjes uitwerken tot de formule van $C$
- d. $C$ is minimaal bij $a$ = 8,24 cm en $h$ = 18,68 cm; de afmetingen zijn dan 26,05 cm bij 29,48 cm
- e. de oppervlakte is nu 26,05 x 29,48 = 768 cm²; dit is ongeveer 10 cm² minder dan bij de echte koffiepakken dit is ongeveer 1,3 % voordeliger; de grondstofbesparing kan beter
- f. $C = 6b\cdot({}^{1000}/_{(2b^2)} + 1\tfrac12 b) = {}^{3000}/_b + 9b^2$; $C' = -{}^{3000}/_{b^2} + 18b$; $C' = 0$ geeft $b^3 = {}^{1000}/_6$ dus $b = 10 / \sqrt[3]{6}$
  afmetingen $60 / \sqrt[3]{6}$ = 33,02 bij 24,76 cm; opp = 817,72 cm²



**Workshop** **Nationale Wiskunde Dagen 2007**

**Cellofaan van Koffiepakken 13** $\times$ 20



**Instructie**

- Er wordt gewerkt in groepen van 3 of 4 personen; in mijn lessen gaat het dan als volgt: het is de bedoeling dat elk onderdeel door elk groepslid wordt begrepen, dus leg elkaar telkens uit hoe het zit; wanneer ik langs kom moet elk groepslid afzonderlijk de antwoorden op de vragen kunnen uitleggen, alleen dan kan de groep als geheel in aanmerking komen voor de hoofdprijs.

- Eerst wordt **de vorm** van het koffiepak gemaakt; er zijn 4 speciale werkbladen, scharen en plakband; ook is er cellofaan van lege koffiepakken. Volg de aanwijzingen op p. 1; verdeel het werk. Rond dit deel af met opdracht 1.

- Gezien de uitkomst van opdracht 1 kun je de vraag stellen welke waarden van $a$ en $b$ ervoor zorgen dat het pak dat op de besproken manier uit het blaadje van 13 x 20 gevouwen kan worden een maximale inhoud heeft. Bereken samen hoe groot de maximale inhoud is of voer opdracht 2 over **de inhoud (1)** met elkaar uit.

- Maak nu een keuze met je groepje of je met **de inhoud (2)** verder gaat (niveau 6 vwo) * Opdrachten 3 en 4 * of met **de oppervlakte** van het cellofaan (niveau 5 vwo) op p. 3 * Opdracht 5 a t/m e *; gebruik de bouwplaten en modellen die je eerde geplakt hebt om je berekeningen te ondersteunen.

  Een **uitdaging** is om de opdrachten, die in deelstappen worden gegeven, zonder deze hulpvragen geheel zelfstandig te maken:

  ■ Ga uit van het viervlak dat je kunt vouwen uit een blaadje van 13 $\times$ 20.
  De vraag bij **de inhoud (2)** is:
  Bereken met behulp van de figuur op p. 2 de inhoud van dit viervlak met een integraal;
  controleer je antwoord door op een meetkundige manier de inhoud van het viervlak uit te rekenen.

  ■ De (nagemeten) afmetingen van een koffiepak van 1000 cm$^3$ zijn 6,5 cm bij 9,1 cm bij 17,1 cm.
  De vraag bij **de oppervlakte van het cellofaan** is:
  Bereken hoeveel cm$^2$ cellofaan je nog kunt besparen als je koffiepakken wilt met een inhoud van 1000 cm$^3$ en een vaste breedte van 6,5 cm (dit ivm maten van de inpakbranche), door de afmetingen van het cellofaan zo te kiezen dat de oppervlakte ervan minimaal is.

- Voor de 90 minuten sessie is er misschien nog tijd om aan de overige opdrachten te werken of te discussiëren over de mogelijkheden die jullie zien om op deze manier betekenisvolle problemen in de klas te laten uitvoeren.

**Evaluatie**

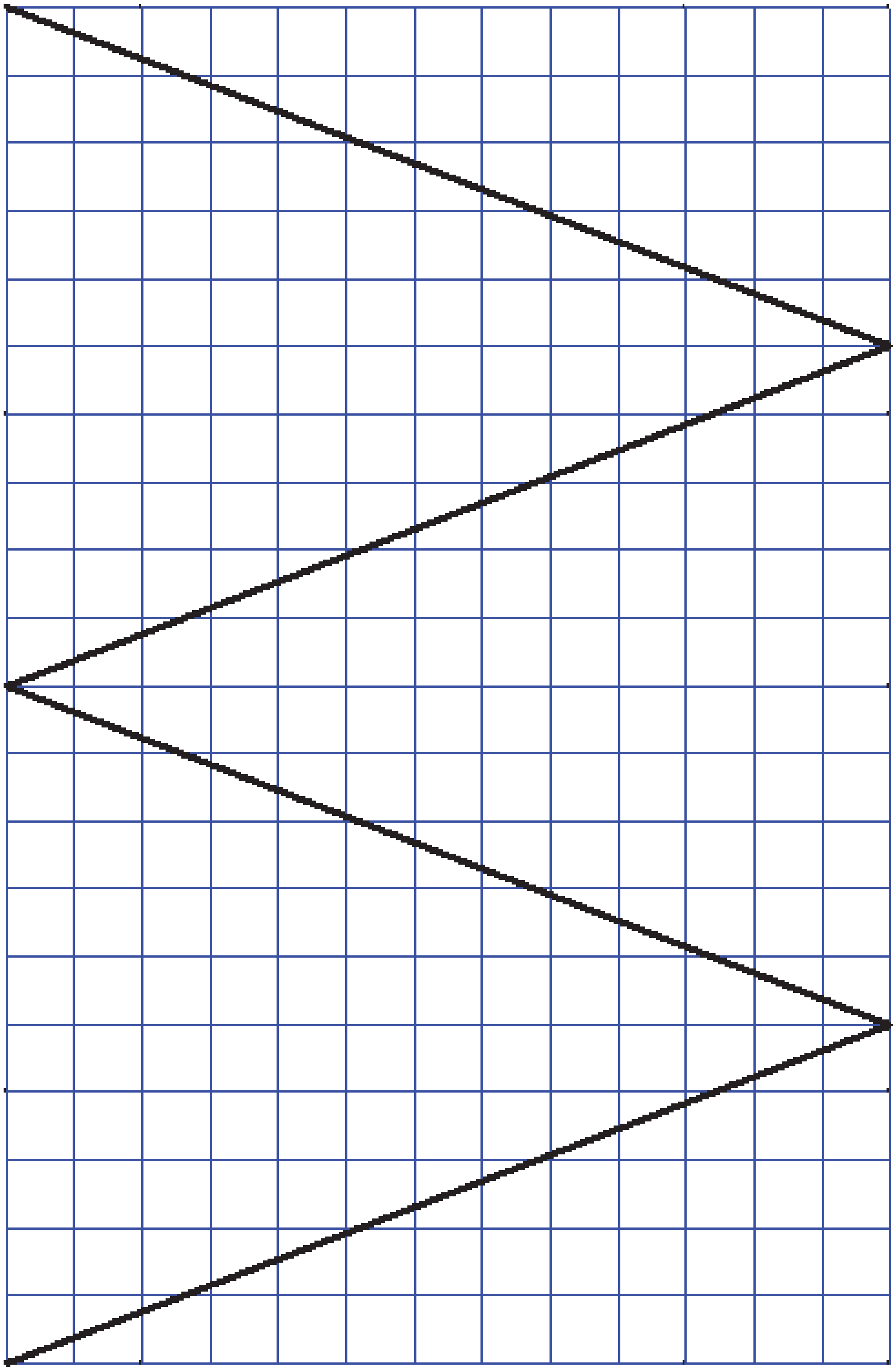
. Hoe vond je het om zelf eens op deze manier aan een wiskundig probleem te werken?
. Wat vond je het meest bijzondere, verrassende?
. Welk onderdeel zou wat jou betreft beter, of anders kunnen of moeten vervallen?
. Wat vind je van deze manier van werken, afgezien van het feit dat plakken en knippen nu eenmaal tijd vergt?
. Zou je een dergelijke “wedstrijd”ook in je eigen les willen houden?
. Heb je zelf suggesties of ervaringen met vergelijkbare betekenisvolle algebra?

ruitjes koffiepakken 13 x 20 cm

NWD 2007

<u>figuur 1</u>          bouwplaat viervlak

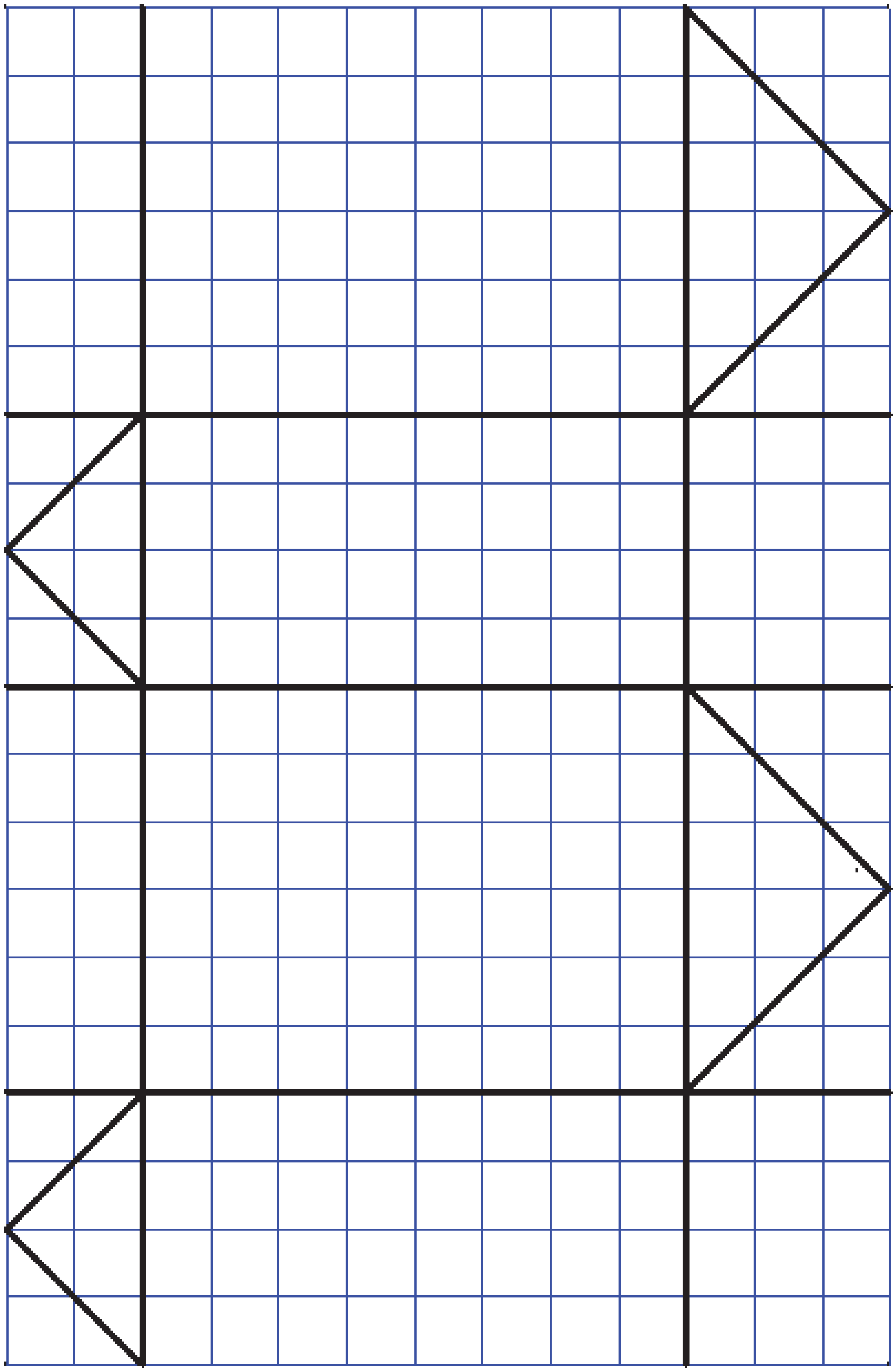
. ruitjesrechthoek uitknippen
. de dikke lijnen voorvouwen
. randen van het viervlak aan elkaar plakken



NWD 2007

<u>figuur 2</u> bouwplaat koffiepak 4 + 6

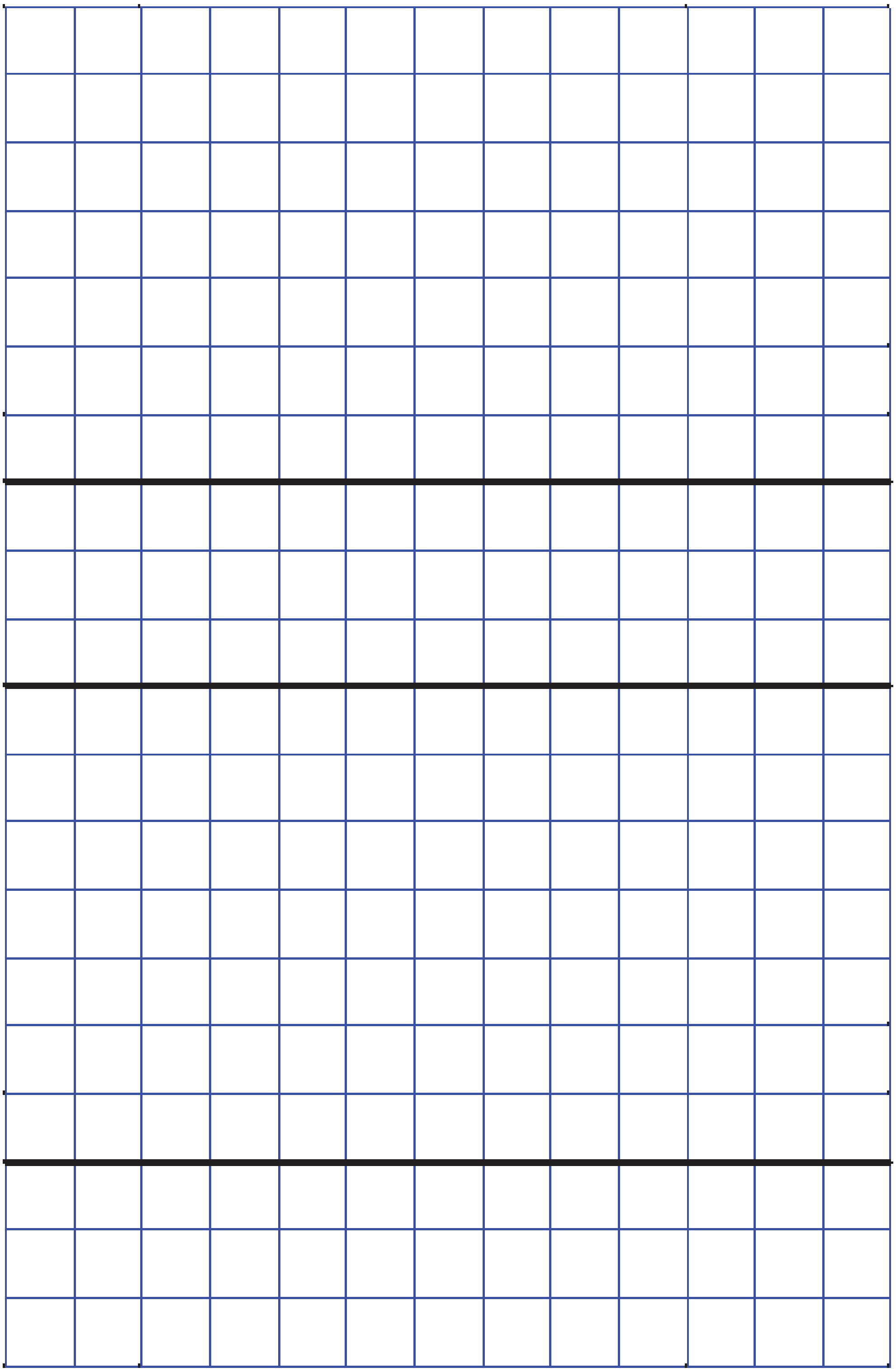
. ruitjesrechthoek uitknippen
. alle dikke lijntjes voorvouwen
. randen van het pak aan elkaar plakken



NWD 2007

figuur 3 bouwplaat koffiepak 3 + 7

. ontbrekende vouwlijnen tekenen
. ruitjesrechthoek uitknippen
. alle vouwlijnen voorvouwen
. randen van het pak aan elkaar plakken



NWD 2007

<u>figuur 4</u> bouwplaat koffiepak *b*

. *b* heeft een willekeurige waarde (tussen 2 en 3)
. teken alle vouwlijnen bij deze waarde van *b*
. toon aan dat de hoogte van alle pakken even groot is