Vijf beeldverhalen **(leerlingentekst)**

Op **bijlage 1** staat een vijftal beeldverhalen. Maak ze af, netjes tekenen!
Je kunt Y3 = Y1 × Y2 invoeren op de GR met VARS → Y-Vars 1: Function 1 resp. 2

Bedenk bij elk verhaal het volgende (*gebruik hiervoor de tabel op* **bijlage 2 = aparte bijlage liggend A4 !!**):

a Welke formules horen bij de lijnen Y1 en Y2? Schrijf dit ook bij het beeld.
b Zet van Y1 en van Y2 de coördinaten van het snijpunt met de x-as in de tabel.
c Y3 = Y1 × Y2 ; schrijf de formule van Y3 mét en zonder haakjes correct op.
d Welke coördinaten hebben de snijpunten met de x-as en de top van Y3? Vul ze in de tabel in.
e Teken in de derde figuur de grafiek van Y3. Let daarbij op de exacte plaats van de snijpunten met de x-as en de top.
f Bereken van elke parabool de exacte waarden van de top.
g Bereken bij elk beeldverhaal het getal dat **het gemiddelde** is van de x-coördinaten van de snijpunten van Y1 en Y2 met de x-as. Vermenigvuldig de bijbehorende y-coördinaten van Y1 en Y2 en schrijf het antwoord op.
h Als je goed naar de tabel kijkt valt je iets op over de snijpunten van de Y1 en Y2 met de x-as en die van Y3 met de x-as, maar ook over de coördinaten van de top van Y3. Verklaar deze overeenkomsten uit de formules.

. . . .
. . . .
. . . .

Wanneer is het niet juist dat lijn × lijn = parabool? . . . .
. . . .

Wanneer is er sprake van een berg- wanneer van een dal-parabool? . . . .

Vul in: dalende lijn × dalende lijn = ... –parabool

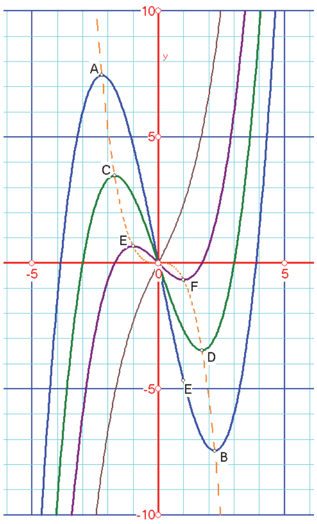
dalende lijn × stijgende lijn = ... -parabool

Verzin zelf nog twee van dit soort uitspraken:

. . . .

. . . .

Kromme door de toppen **(workshoptekst)**
In de voorbereiding moeten de leerlingen voor verschillende (negatieve) waarden van a de coördinaten van de toppen van een familie grafieken opschrijven. Als a > 0 is, dan zijn er geen toppen. Dat zie je zo als je de grafieken PLOT.
Deze figuur staat ook in het programmaboekje afgebeeld.



In de eerste tabel op **bijlage 3** staan hun (decimale) resultaten.

a Probeer de x_{top} en de y_{top} uit te drukken in a. x_{top} = … … y_{top} = … …

het helpt als je de decimale getallen herkent als benadering van exacte getallen

b Probeer (zonder te differentiëren) een formule te maken die y_{top} uitdrukt in x_{top}.

y = … … … …

het helpt als je bedenkt bij wat voor soort formule de grafiek van de toppen hoort, ik noem dat" truc" je maakt een schaduwtabel met de "truc"

c [voor wie het exact wil weten]

De familie werd gegeven door $f(x) = {}^{1}/_{3}x^3 + \boldsymbol{a}x$. Bereken exact de kromme door de toppen.
Dit is een opgave die al vele jaren in de examenbundel staat.

Parabool " maal" lijn
Als voorbeeld wordt de familie $f(x) = (x^2 + \boldsymbol{a}) \cdot (x - 1)$ genomen, dwz parabool: $y=x^2 + \boldsymbol{a}$ *maal* lijn: $y = x - 1$.
Eerst moet voor verschillende waarde de grafiek gePLOT worden.
Er moet worden opgemerkt dat telkens de grafiek van een derdegraadsfunctie verschijnt.
Voor negatieve waarden van ***a*** zijn er twee toppen, maar voor $\boldsymbol{a} \geq 0$ zijn die er niet.

a PLOT de bundel op je GR met WINDOW Xmin = -3 Xmax = 3 Ymin = -2 Ymax = 6.
Je kunt gebruik maken van de optie met accolades: $Y1 = (x^2 + \{-4,-3,-2,-1,0,1,2\})(x - 1)$

De toppen liggen allemaal op de grafiek van $f(x) = -2x(x - \ldots)^2$.

b Onderzoek welk (geheel) getal op de ... moet komen.

Tabellen van de leerlingen
De leerlingen kregen in tweetallen hun eindopdracht.
Bij de meeste opdrachten moesten ze (zonder dat ze kunnen differentiëren) een formule van de kromme door de toppen zoeken.
Op **bijlage 3** staan ook de tabellen van enkele koppels leerlingen.
Ze hebben via de GR of computergrafiekenprogramma's de coördinaten weten te vinden of benaderen.
Je kunt de punten uit de tabel als je wilt op ruitjespapier tekenen.
Daaruit valt vaak al op te maken welke formule de grafiek van de toppen heeft.
Om jullie niet in de verleiding te brengen om meteen te gaan differentiëren geef ik de functievoorschriften van de families nu niet.
Zo kunnen jullie je beter verplaatsen in de positie waarin de leerlingen zitten.

Na het toepassen van een truc kun je bedenken wat de x_{top} of y_{top} met de parameter ***a*** te maken heeft.

a Probeer bij een of meer tabellen x_{top} en/of y_{top} uit te drukken in ***a***.

b Teken de punten die de toppen voorstellen in een rooster. Herken je de vorm van een grafiek?

c Probeer een formule te vinden van de kromme waarop de toppen uit de tabel liggen.

Enkele voorbeelden van eindopdrachten // zie **bijlage 4**
Er zijn inmiddels 14 verschillende eindopdrachten ontstaan.
De eerste vier gaan over wanneer is parabool ÷ lijn = lijn, of wanneer is parabool = lijn × lijn?
Zie voorbeeld • •
Het betreft eenvoudige algebra. Maar deze worden dan ook gegeven aan de zwakkere leerlingen.
Die zijn heel blij als ze doorkrijgen hoe het zit.
De nummers 5 t/m 9 gaan over parabool × lijn, zie voorbeeld ••• ••• , en 10 t/m 14 over parabool ÷ lijn, zie • • •• • • • • • •• .

Deze opdrachten vragen iets meer inzicht, creativiteit en doorzettingsvermogen.
Daarom selecteer ik zelf de koppels leerlingen voor de PO.

a Kies een van de gegeven voorbeelden uit en probeer de vragen met behulp van je GR te beantwoorden.

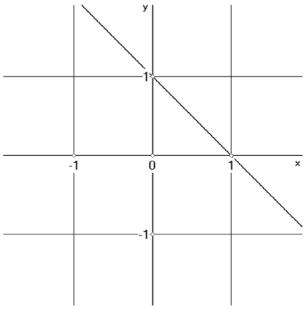
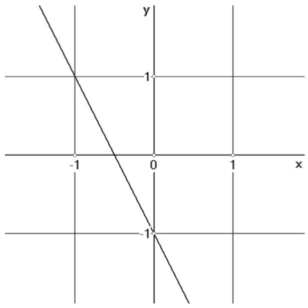
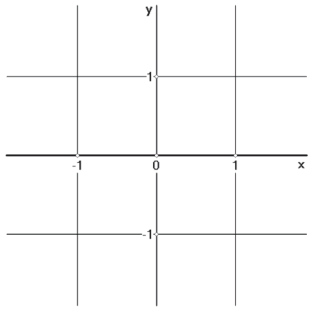
b Bespreek waarom je de opdracht een geschikte of juist geen geschikte vorm voor een PO vindt.

c Kun je je voorstellen dat de PO wiskunde op den duur verdwijnt, of ben je ook een voorstander van wiskunde PO's?

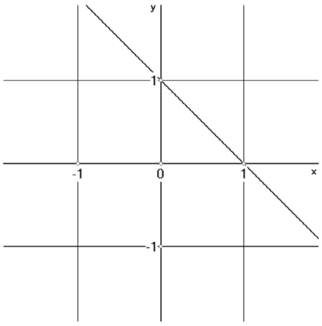
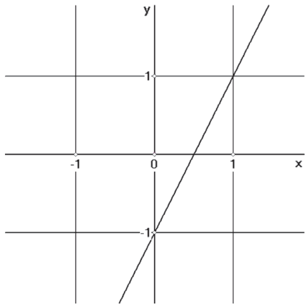
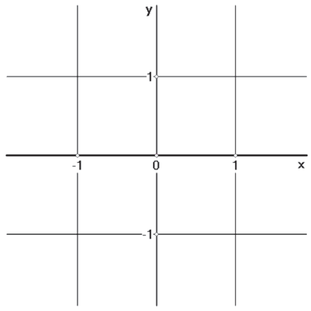
Het instructieblad
Op **bijlage 5** staat de instructie die de leerlingen aan het begin krijgen uitgedeeld.

De families
Op **bijlage 6** staan alle families die aan bod komen bij de PO.

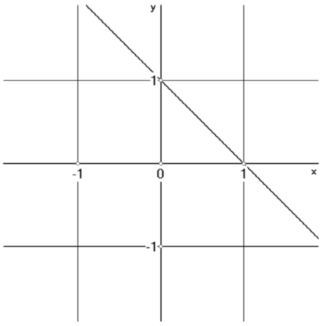
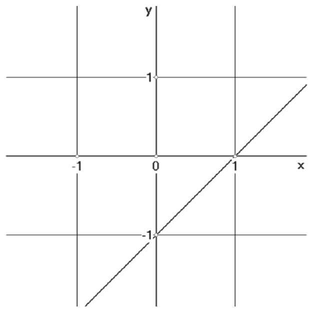
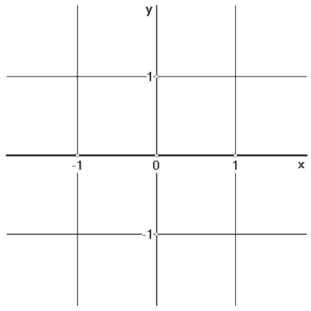
Bijlage 1 **Vijf beeldverhalen** **naam: . . . .**

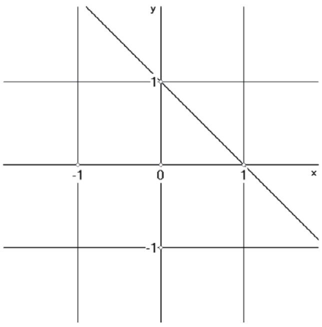
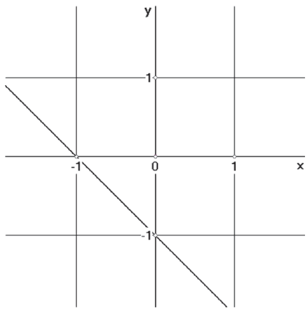
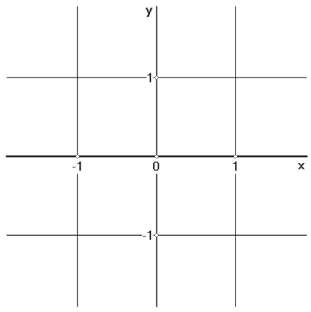
Y1 = × Y2 = = Y3 =

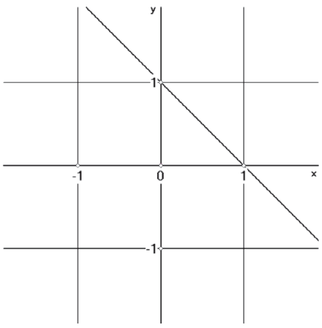
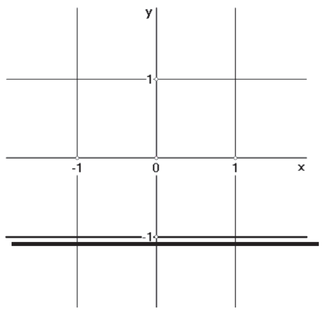
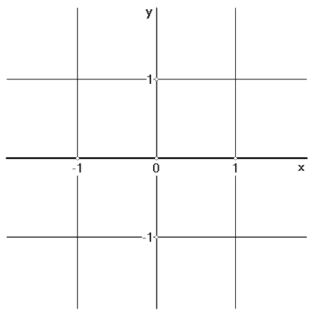
Y1 = × Y2 = = Y3 =

Y1 = × Y2 = = Y3 =

Y1 = × Y2 = = Y3 =


→



Y1 = × Y2 = = Y3 =

Bijlage 2 **naam: . . . .**

verhaal	Y1	snijpunt met x-as	Y2	snijpunt met x-as	Y3 = Y1 × Y2		snijpunt(en) Y3 met x-as		Y3	gemiddelde x_L en x_R (en Y1 × Y2 van x_{gem})	
					met ( )	zonder ( )	x_{links}	x_{rechts}	top		
1									(,)		
2									(,)		
3									(,)		
4									(,)		
5									(,)		

Bijlage 3

Tabel van toppen bij de getoonde grafieken in het programmaboekje

Als je tabel bekijkt zie je:
er zijn alleen toppen als …..

Druk uit in a:

x_{top} = …

y_{top} = …

Formule van de toppen:

y = … … …

a	x_{top} links	y_{top} links	truc [3^e macht van x]	x_{top} rechts	y_{top} rechts
2	-	-		-	-
1	-	-		-	-
0	-	-		-	-
-1	-1	0,67		1	-0,67
-2	-1,42	1,9		1,42	-1,9
-3	-1,73	3,47		1.73	-3,47
-4	-2	5,33		2	-5,33
-5	-2,23	7,45		2,23	-7,45
-9	-3	18		3	-18

Tabel bij de toppen van Yanick en Birdja

Druk uit in a:

x_{top} = …

y_{top} = …

Formule van de toppen:

y = … … …

a	x_{top}	truc [deel door 2]	y_{top}	truc [deel door 4]
1	-2		-4	
2	-4		-8	
3	-6		-12	
4	-8		-16	
5	-10		-20	

Tabel bij de grafieken van Sander en Brend

Druk uit in a:

x_{top} = …

y_{top} = …

Formule van de toppen:

y = … … …

a	x_{top}	truc [zelf bedenken]	y_{top}	truc [zelf bedenken]
1	1		0,5	
4	2		1	
9	3		1,5	
16	4		2	
25	5		2,5	

Tabel bij de grafieken van Joep en Rolf

Druk uit in a:

x_{top} = …

y_{top} = …

Formule van de toppen:

y = … … …

a	x_{top}	truc	y_{top}	truc
0,25	2		1	
0,5	1,41		1,41	
1	1		2	
2	0,71		2,83	
4	0,5		4	

Tabel bij de grafieken van Merenique en Laura

Druk uit in a:

x_{top} = …

y_{top} = …

Formule van de toppen:

y = … … …

a	x_{top}	truc [kwadrateer x]	y_{top}	truc [probeer x^3]
-1	-0,577		0,385	
-2	-0,816		1,09	
-3	-1		2	
-4	-1,155		3,08	
-5	-1,291		4,3	
-6	-1,414		5,66	

Bijlage 4 **Enkele eindopdrachten**:

• • Wanneer is $\dfrac{parabool}{lijn} = lijn$?

Neem alleen de formule $y = \dfrac{x^2 + c}{x + d}$, zoals b.v. $y = \dfrac{x^2 + (-2)}{x + 2}$ oftewel $y = \dfrac{x^2 - 2}{x + 2}$.

(a) Onderzoek welk verband er tussen *c* en *d* moet bestaan zodat $y = \dfrac{x^2 + c}{x + d}$ een lijn wordt.
Neem eerst b.v. $c = 0$ en/of $d = 0$. Neem ook negatieve waarden voor *c* en *d*, en pos/neg breuken.
Geef duidelijke voorbeelden. Geef een (naderhand) verklaring met wiskunde van wat je hebt ontdekt.

(b) Druk coördinaten van snijpunt(en) met de x-as uit in *c* en *d*. Gebruik zo nodig wortels.
Maak een overzichtelijke tabel met (minimaal 12) waarden van *c* en *d*.
Je kunt door in de tabel te zoeken op een idee komen.

• • • Wat is $parabool \times lijn$?
• • •

Neem alleen de formule $y = x^2 \cdot (x + a)$, zoals b.v. $y = x^2 \cdot (x + (-6))$ oftewel $y = x^2 \cdot (x - 6)$.

(a) Onderzoek welke vormen de grafiek kan hebben bij allerlei verschillende waarden van *a*.
Neem eerst b.v. $a = 0$. Neem positieve en negatieve waarden voor *a*, ook pos/neg breuken.
(b) Zoek een formule van de grafiek waar alle toppen van de grafieken van de gegeven formule op liggen.
Maak een overzichtelijke tabel met (minimaal 12) waarden van *a* en de toppen (…,…) en (…,…), als die er zijn.
(c) Druk coördinaten van snijpunt(en) met de x-as, of van mogelijke asymptoten uit in *a*.
(d) Lukt het om de coördinaten van de toppen (als die er zijn) uit te drukken in *a*?
Je kunt door in de tabel te zoeken op een idee komen.

Geef duidelijke voorbeelden. Geef (naderhand) een verklaring met wiskunde van wat je hebt ontdekt, als dat lukt.

• • • • Wat is $parabool \div lijn$?
• • •
• • • •

Neem alleen de ormule $y = \dfrac{x^2}{x + a}$, zoals b.v. $y = \dfrac{x^2}{x + (-11)}$ oftewel $y = \dfrac{x^2}{x - 11}$.

(a) Onderzoek welke vormen de grafiek kan hebben bij allerlei verschillende waarden van *a*.
Neem eerst b.v. $a = 0$. Neem positieve en negatieve waarden voor *a*, ook pos/neg breuken.
(b) Zoek een formule van de grafiek waar alle toppen van de grafieken van de gegeven formule op liggen.
Maak een overzichtelijke tabel met (minimaal 12) waarden van *a* en de toppen (…,…) en (…,…), als die er zijn.
(c) Druk coördinaten van snijpunt(en) met de x-as, of van mogelijke asymptoten uit in *a*.
(d) Lukt het om de coördinaten van de toppen (als die er zijn) uit te drukken in *a*?
Je kunt door in de tabel te zoeken op een idee komen.

Geef duidelijke voorbeelden. Geef (naderhand) een verklaring met wiskunde van wat je hebt ontdekt, als dat lukt.

Bijlage 5 De opdracht 4vwo Coenecoopcollege Waddinxveen Praktische Opdracht Wiskunde B

Productfuncties / qoutiëntfuncties

Doelen:
. het verrichten van een onderzoek met gebruikmaking van computer en grafische rekenmachine
. het leren aanpakken van een (praktische) groepsopdracht
. het gebruiken van wiskundige vaardigheden bij een wiskunde opdracht

Voorbereiding:
Om thuis te raken in de computerprogramma's en het gebruik van de GR moet iedereen eerste een algemeen gedeelte doorwerken. Er wordt gewerkt in tweetallen.
Zorg ervoor dat ieder van jullie elk onderdeel volledig begrijpt voordat je aan het volgende onderdeel begint.
Je gaat (weer) oefenen met de computerprogramma's VU-grafiek en Geocadabra.
Denk aan de opdracht van de zebra en de cheetah.
Ook ga je ontdekken wat er allemaal nog meer op de GR kan dan je tot nu toe weet.

Kern van het onderzoek:
Het uitvoeren van een onderzoek aan productfuncties of quotiëntfuncties.
Aandachtspunten bij het onderzoek zijn:
keuze van het onderwerp / partner (nu door de docent bepaald)
voorbereidende opdrachten / laten aftekenen door de docent
onderzoeksvraag / hoofd- en deelvragen
plan van aanpak opstellen / taken verdelen
grafieken tekenen / computerprogramma's/GR
berekeningen uitvoeren / notities maken
wiskundige zaken / theorie gebruiken
voorlopige versie eindproduct
eindpresentatie / verslag

Beoordeling
Maak een schriftelijk verslag van je onderzoek.
De punten voor je cijfer worden als volgt verdeeld:

* indeling / leesbaarheid / lay-out e.d.		2 punten
* beschrijving van het probleem dat je hebt onderzocht		½ punt
* hoe je de programma's uit de voorbereidende delen hebt gebruikt		1 punt
* gebruik van overzichtelijke tabellen / verduidelijkende grafieken		2 punten
* wiskundige berekeningen / theorie van grafieken / formules		3 punten
* de conclusies van je onderzoek		½ punt
* wat je ervan geleerd hebt	**(ieder voor zichzelf)**	½ punt
* wat je van dit onderzoek vond	**(ieder voor zichzelf)**	½ punt

De voorbereiding:

1 Voer de opdrachten uit van het werkblad VU-grafiek	(laten aftekenen bij de docent)	☐
2 Voer de opdrachten uit van het werkblad Geocadabra	(laten aftekenen bij de docent)	☐
3 Voer de opdrachten uit van het werkblad Grafische Rekenmachine	(laten aftekenen bij de docent)	
4 Vraag nu de eindopdracht die speciaal voor jullie geselecteerd is	(verslag inleveren op gestelde datum)	☐

Bij de eindopdracht:
- Neem bij de keuze van de parameter(s), dat zijn de letters *a* (*b*, *c*, *d*), allerlei waarden: positieve, negatieve, maar ook positieve en negatieve breuken.
- Let bij de vorm van de grafieken op toppen en asymptoten.
- Kijk bij de grafieken naar de snijpunten met de x-as. Met welke berekeningen kun je ze exact vinden?
- Zoek via tabellen verbanden van de *x*-coördinaat van de toppen met de letter(s) in de formule.
- Evenzo van de *x*-coördinaten van de snijpunten met de *x*-as, en eventueel van de asymptoten.
- Probeer gevonden verbanden (naderhand) te verklaren door vergelijkingen op te lossen of op andere wijze.
- Probeer bij de grafieken van hellingfuncties die je vindt formules te vinden.
  Daarmee kun je exacte waarden van de coördinaten van de toppen vinden.

Bijlage 6 Alle families bij elkaar

1	$y = \frac{x^2 + bx}{x + c}$	wanneer een lijn?	
2	$y = \frac{x^2 + c}{x + d}$	wanneer een lijn?	
3	$y = x^2 + bx + c$	wanneer product van twee dezelfde lijnen, wanneer van twee verschillende?	
4	$y = ax^2 + c$	wanneer product van twee lijnen met dezelfde helling, resp. met tegengestelde hellingen	
5	$y = (x^2 + a) \cdot x$	formule van de toppen	$y = -2x^3$
6	$y = x^2 \cdot (x + a)$	formule van de toppen	$y = -2x^3$
7	$y = (x^2 + ax) \cdot x$	formule van de toppen	$y = -½x^3$
8	$y = (x^2 + ax) \cdot (x + a)$	formule van de toppen	$y = 4x^3$ en $y = 0$
9	$y = (x + a)^2 \cdot x$	formule van de toppen	$y = 4x^3$ en $y = 0$
10	$y = \frac{x^2 + a}{x}$	formule van de toppen	$y = 2x$
11	$y = \frac{x^2}{x + a}$	formule van de toppen	$y = 2x$
12	$y = \frac{x}{x^2 + a}$	formule van de toppen	$y = {}^1/_{2x}$
13	$y = \frac{ax}{x^2 + a}$	formule van de toppen	$y = ½x$
14	$y = \frac{ax^2 + 1}{x}$	formule van de toppen	$y = {}^2/_x$