

workshop verpakkingen



Nationale Wiskunde Dagen 18
3&4 februari 2012

Hans Melissen & Rob van Oord

Keuzemenu

In deze workshop kunt u kiezen uit:

- 1- het vouwen van *een goot*; daarna het zoeken naar het optimale doorstroomprofiel van de goot vervolgens het ontwerpen van een bouwplaat van *een bakje met schuine wanden, en schuine wanden met opstaande randen*; daarna het zoeken naar een formule voor de inhoud; eventueel zoeken naar optimale vormen
- 2- het maken van *een opvouwbare halve bol*; daarna enkele berekeningen aan de doorsneden; zie ook het artikel van Marianne Lambriex in de Nieuwe Wiskrant van december 2011: De wraak van de juf
- 3- *het inpakken van een kubus*; daarna zoeken naar een bewijs dat de oppervlakte van het kleinste rechthoekige stuk papier dat 10% besparing oplevert met de gebruikelijke manier van inpakken
- 4- het maken van *een opvouwbare kubus*; daarna zelf de bouwplaat ontwerpen van een ander opvouwbaar voorwerp
- 5- het maken van een *fractal in 3D*; daarna zelf een fractal of trappenfiguur ontwerpen in het pakketje zitten ook bouwplaten van het *nwd 18 – logo*; van *een kerstsfeerkaart*; van een *trappenfiguur*

3D logo van NWD 18

Nodig zijn:

- Een bouwplaat van het 3D logo en een voorbeeld(foto)
- Als je een mooi wilt maken: een A4-tje 160 g wit papier en een schutblad
- Een passer, een liniaal en een snijmes
- Een dik stuk karton om eronder te leggen



Aan de slag:

Gebruik je een blanco wit 160 g A4-tje? Voer dan punt 1 t/m 3 uit, zo niet, dan ga je naar punt 4.

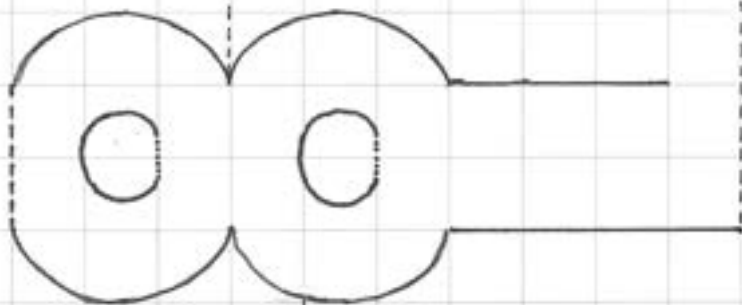
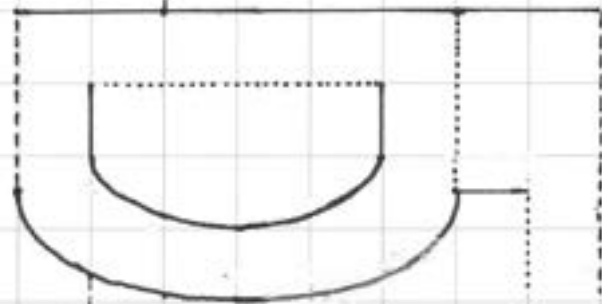
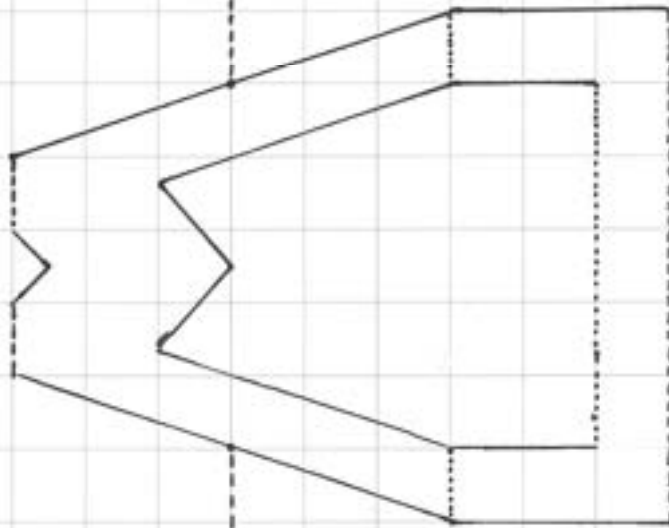
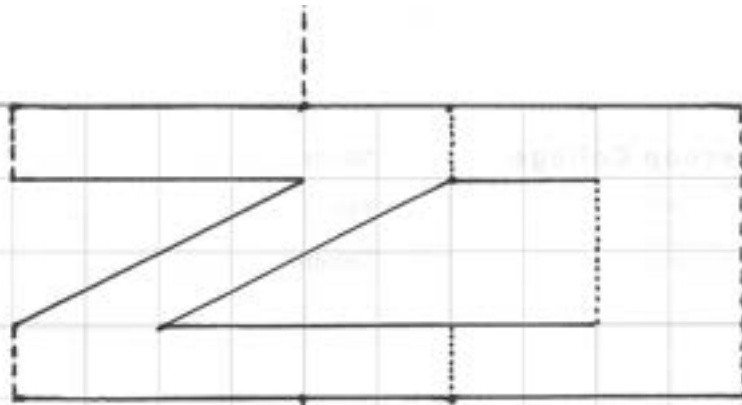
- 1 Leg de bouwplaat van het logo boven op het blanco blad.
- 2 Prik op alle eindpunten en hoekpunten met een passer een gaatje door de bouwplaat en het blanco blad heen; zorg ervoor dat je eerst een dik stuk karton of snijmat eronder legt, om de tafel niet te beschadigen. Ronde vormen moeten met enkele kleine prikjes gevolgd worden.
- 3 Als je denkt dat je alle punten gehad hebt, niet losmaken!, maar houd het geheel tegen het licht om te zien of je echt alles gehad hebt; denk er ook aan dat je de midden vouwlijn aan de randen ook hebt geprikt. Vraag zo nodig hulp van een ervaren architectrist.

- | verticale/schuine/gebogen dichte lijnen moeten helemaal door gesneden worden
- horizontale stippellijnen moeten aan de voorkant geritst worden
- - - horizontale gestreepte lijnen moeten aan de achterkant geritst worden; papier omdraaien, goed kijken; vergeet de middenvouw aan de zijkanten niet!

- 4 Snij de verticale/schuine/gebogen dichte lijnen helemaal door in het papier. Snij de ronde dichte lijnen zo vloeiend mogelijk door. Controleer of de sneden echt los zijn. Bij het blanco blad met de gaatjes het voorbeeld ernaast leggen, kijk goed tussen welke gaatjes je moet snijden.
 - 5 Rits met een scherp voorwerp de gestippelde lijnen van de figuur aan de bovenkant; je kunt ook heel licht een snede maken met het mes, maar denk erom dat je niet helemaal door snijdt. Kijk goed naar het voorbeeld.
 - 6 Draai het blad om en rits met een scherp voorwerp de lijntjes die op de bouwplaat gestreept zijn weergegeven.
 - 7 Probeer nu voorzichtig het logo in zijn vorm te vouwen. De geritste lijntjes zouden je daarbij moeten helpen. Op het eind moet het logo helemaal plat, dubbelgevouwen liggen.
 - 8 Plak desgewenst het dubbelgevouwen schutblad aan de buitenkant.
- 9 Ontwerp een bouwplaat van een eigen logo of naam op halve cm ruitjes; een kwestie van redeneren en tellen.
- * Wat vind je van deze activiteit voor een klas?

foto logo nwd 18





Fractals

Nodig zijn:

- Een bouwplaat van de fractal en een voorbeeldfoto
- Als je een mooi wilt maken: een A4-tje 160 g wit papier en een (gekleurd) schutblad
- Een passer, een liniaal en een snijmes of een schaar
- Een dik stuk karton om eronder te leggen

Aan de slag:

Gebruik je een blanco wit 160 g A4-tje? Voer dan punt 1 t/m 3 uit, zo niet, dan ga je naar punt 4.

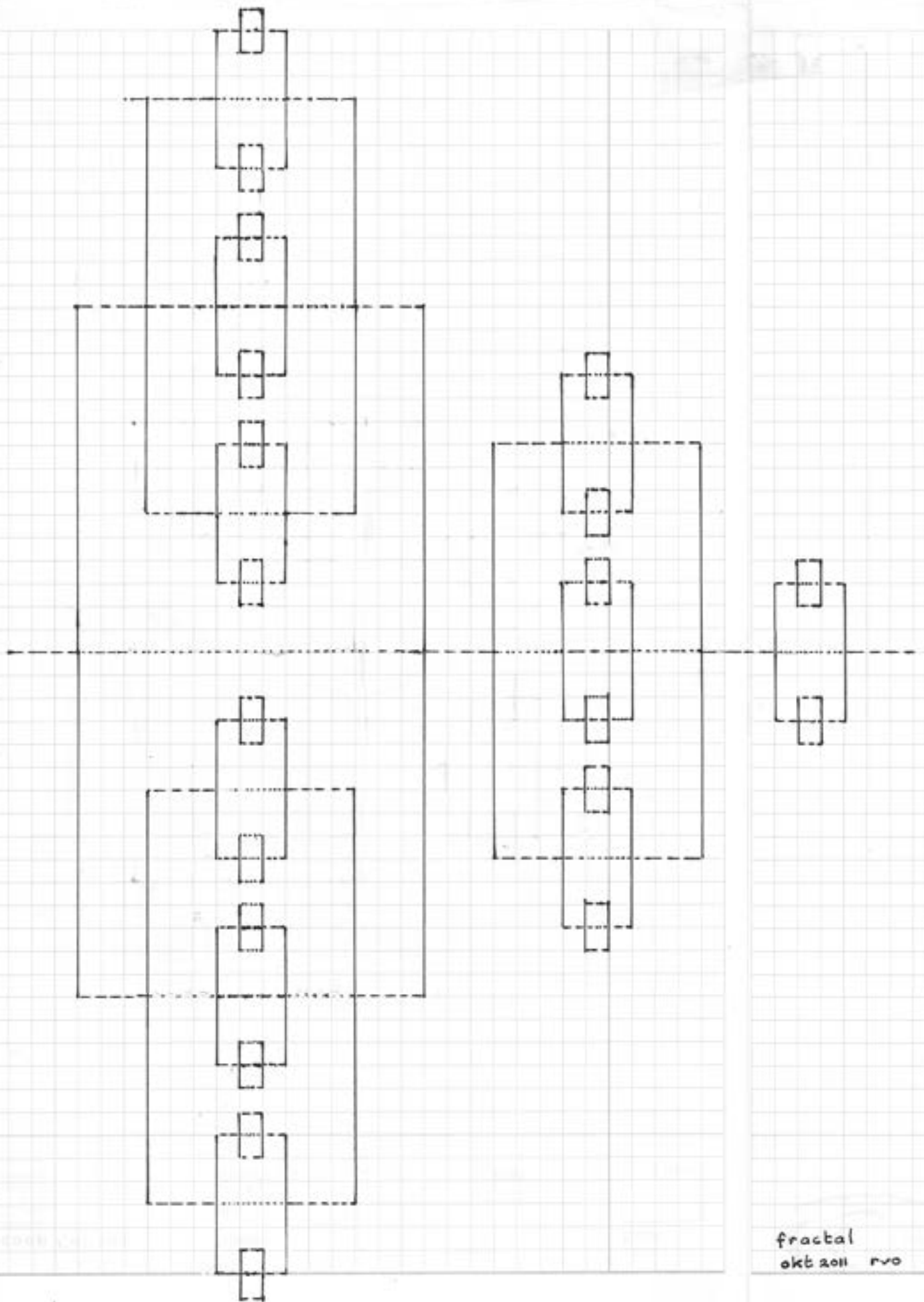
- 1 Leg de bouwplaat van de fractal boven op het blanco blad.
- 2 Prik op alle eindpunten en hoekpunten met een passer een gaatje door de bouwplaat en het blanco blad heen; zorg ervoor dat je eerst een dik stuk karton of snijmat eronder legt, om de tafel niet te beschadigen.
- 3 Als je denkt dat je alle punten gehad hebt, niet losmaken!, maar houd het geheel tegen het licht om te zien of je echt alles gehad hebt; denk er ook aan dat je de midden vouwlijn aan de randen ook hebt geprikt.
Vraag zo nodig hulp van een ervaren architectrist.

- | verticale dichte lijnen moeten helemaal door gesneden worden
- horizontale stippellijnen moeten aan de voorkant geritst worden
- - - horizontale gestreepte lijnen moeten aan de achterkant geritst worden; papier omdraaien, goed kijken; vergeet de middenvouw aan de zijkanten niet!

- 4 Knip of snij de verticale rechte lijnen helemaal door in het papier. Controleer of de sneden echt los zijn.
Bij het blanco blad met de gaatjes het voorbeeld ernaast leggen, kijk goed tussen welke gaatjes je moet snijden.
 - 5 Rits met een scherp voorwerp de gestippelde lijnen van de figuur aan de voorkant; je kunt ook heel licht een snede maken met het mes, maar denk erom dat je niet helemaal door snijdt. Kijk goed naar het voorbeeld.
 - 6 Draai het blad om en rits met een scherp voorwerp de lijntjes die op de bouwplaat gestreept zijn weergegeven.
 - 7 Probeer nu voorzichtig de fractal in zijn vorm te vouwen. De geritste lijntjes zouden je daarbij moeten helpen.
Gebruik waar nodig een schaarpunt om de delen open te trekken.
Op het eind moet de fractal helemaal plat, dubbelgevouwen liggen.
 - 8 Plak desgewenst het dubbelgevouwen (gekleurde) schutblad aan de buitenkant. Dan worden de gaten van de figuur afgeschermd door een mooi kleurtje.
- 9 Ontwerp een bouwplaat van een fractal of trappenfiguur op halve cm ruitjes; een kwestie van redeneren en tellen.
- * Wat vind je van deze activiteit voor een klas?

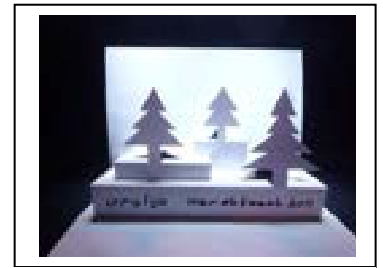
foto fractal





fractal
okt 2011 rvo

bouwplaat kerstfeer; werk volgens het principe van de fractal;
 alle dichte lijnen moeten worden uitgesneden (of geknipt);
 let op bij de voet van de stammen van de bomen,
 niet doorsnijden en ook niet vouwen!



kerstfeer 2011

- vouw het karton strak tussen de klembouwen
- prik met de passer punt alle hoekpunten \leftarrow door dus ook de T-splitsingen; houd het geprikte zerk tegen het li' dik!
- snijd de dichte lijnen open (houd die voorbedd ernaast)

rvo

- rits de bergvouwen aan de voorkant; draai het blad om
- rits de dalvouwen --- aan de achterkant
- drak de kaart voor zichtig uit de achtergrond.

bovenste klembouw

middenbouw

← bergbouw

← dalbouw

R blanco A5 vel, dik wit karton, inklemmen

A onderste klembouw

Opvouwbare kubus (180°)

Nodig zijn:

- Een bouwplaat van de kubus en een voorbeeldfoto
- Als je een mooi wilt maken: een A4-tje 160 g wit papier en een schutblad, anders alleen een schutblad
- Drie draadjes van 15 cm en plakband
- Een liniaal en een snijmes
- Een dik stuk karton om eronder te leggen

Aan de slag:

Gebruik je een blanco wit 160 g A4-tje? Voer dan punt 1 t/m 3 uit, zo niet, dan ga je naar punt 4.

- 1 Leg de bouwplaat van de kubus boven op het blanco blad.
- 2 Prik op alle eindpunten en hoekpunten met een passer een gaatje door de bouwplaat en het blanco blad heen; zorg ervoor dat je eerst een dik stuk karton of snijmat eronder legt, om de tafel niet te beschadigen.
- 3 Als je denkt dat je alle punten gehad hebt, niet losmaken!, maar houd het geheel tegen het licht om te zien of je echt alles gehad hebt.
Vraag zo nodig hulp van een ervaren architectrist.

- | dichte lijnen moeten helemaal door gesneden worden
- - - gestreepte lijnen moeten geritst worden

- 4 Snij de bouwplaat inclusief plakrandjes uit het papier, of, voor de snelle manier:
Knip de gehele bouwplaat uit inclusief de plakrandjes.
Bij het blanco blad met de gaatjes het voorbeeld ernaast leggen, kijk goed tussen welke gaatjes je moet snijden.
Voor het ultieme resultaat moeten alle plakrandjes worden afgesneden en moet de bouwplaat met rijstpapier aan elkaar geplakt worden.
- 5 Rits met een scherp voorwerp de gestippelde lijnen van de figuur; je kunt ook heel licht een snede maken met het mes, maar denk erom dat je niet helemaal door snijdt. Kijk goed naar het voorbeeld.
- 6a Wil je een mooie opvouw kubus? Snij dan de plakrandjes tussen AB en AD weg en plak bij de aangegeven hoekpunten A, B en D een draadje op de bouwplaat.
- 9b Wil je een snel resultaat? Dan hoeft je geen draadjes te plakken.
- 7 Plak de plakrandjes x, y en z vast; de kubus kan nu platgedrukt worden in de vorm van twee "huisjes" aan elkaar.
- 8 Vouw het schutblad dubbel en weer open. Zet de kubus diagonaal op de vouwlijn van het schutblad.
- 9a Prik met een passer gaatjes, eentje op de diagonaal waar het draadje van A doorheen moet, en op de plaatsen waar B en D terecht zijn gekomen; trek de draadjes erdoorheen en plak ze vast op het schutblad.
Plak desgewenst een tweede schutblad over de buitenkant van het eerste schutblad om de draadjes te verbergen.
- 9b Plak de plakrandjes tussen AB en AD op het schutblad, waarbij A op de diagonaal moet komen.

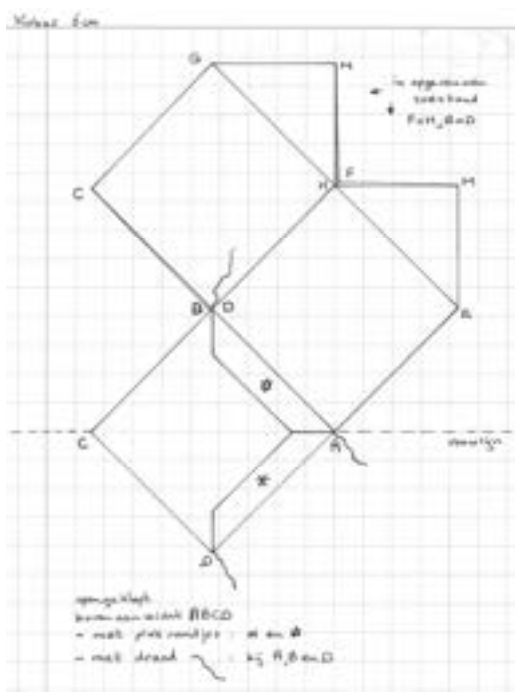
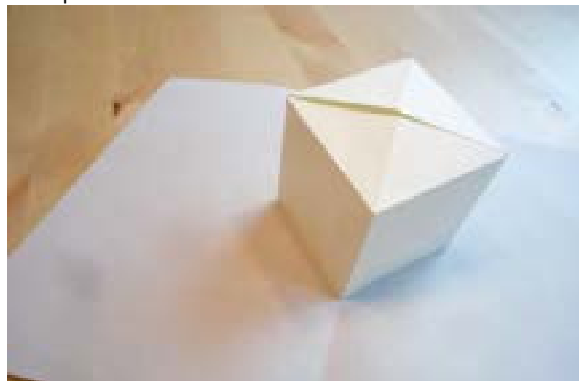
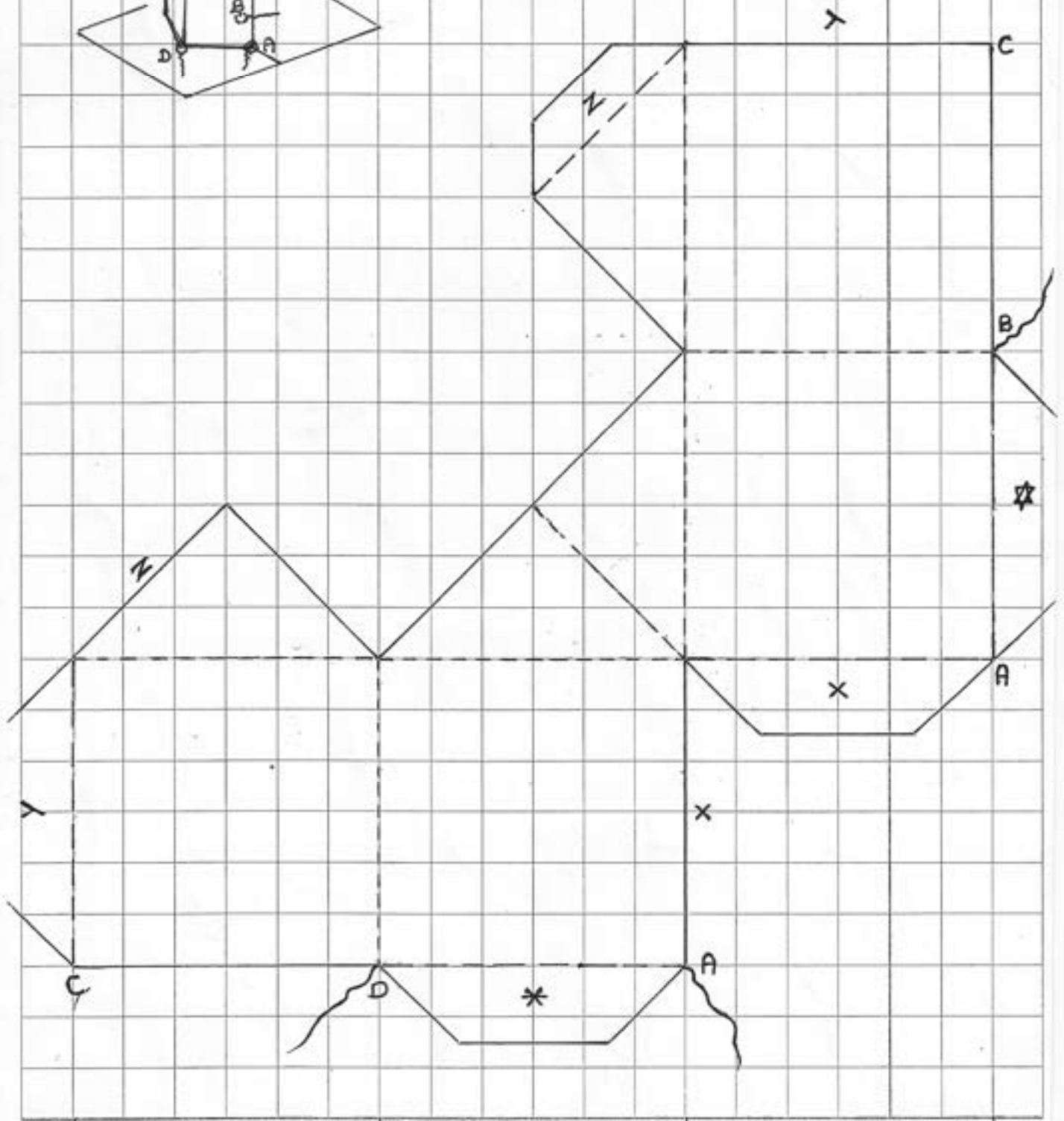
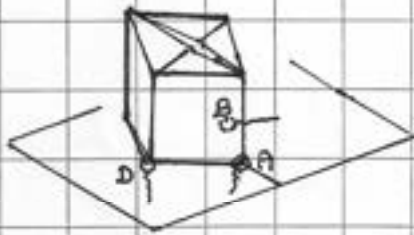


foto opvouwbare kubus 180°



bouwplaat kubus 6cm

180° model



Opvouwbare kubus (360°)

Nodig zijn:

- Een bouwplaat van de kubus en een voorbeeldfoto
- Als je een mooi wilt maken: een A4-tje 160 g wit papier en een schutblad, anders alleen een schutblad
- Vier (of 5) draadjes van 15 cm en plakband
- Een liniaal en een snijmes
- Een dik stuk karton om eronder te leggen

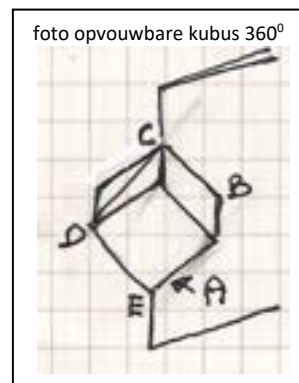
Aan de slag:

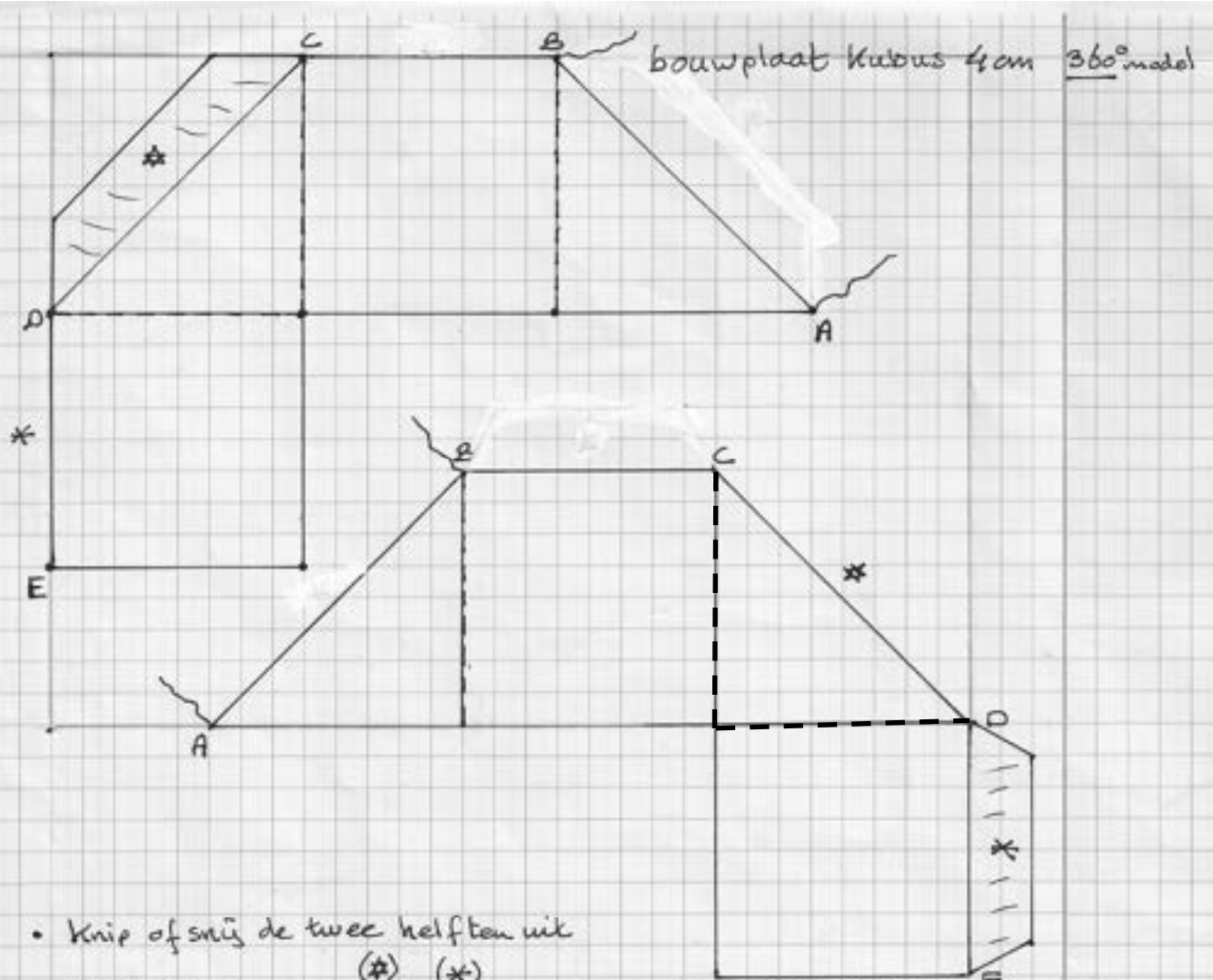
Gebruik je een blanco wit 160 g A4-tje? Voer dan punt 1 t/m 3 uit, zo niet, dan ga je naar punt 4.

- 1 Leg de bouwplaat van de kubus boven op het blanco blad.
- 2 Prik op alle eindpunten en hoekpunten met een passer een gaatje door de bouwplaat en het blanco blad heen; zorg ervoor dat je eerst een dik stuk karton of snijmat eronder legt, om de tafel niet te beschadigen.
- 3 Als je denkt dat je alle punten gehad hebt, niet losmaken!, maar houd het geheel tegen het licht om te zien of je echt alles gehad hebt.
Vraag zo nodig hulp van een ervaren architectrist.

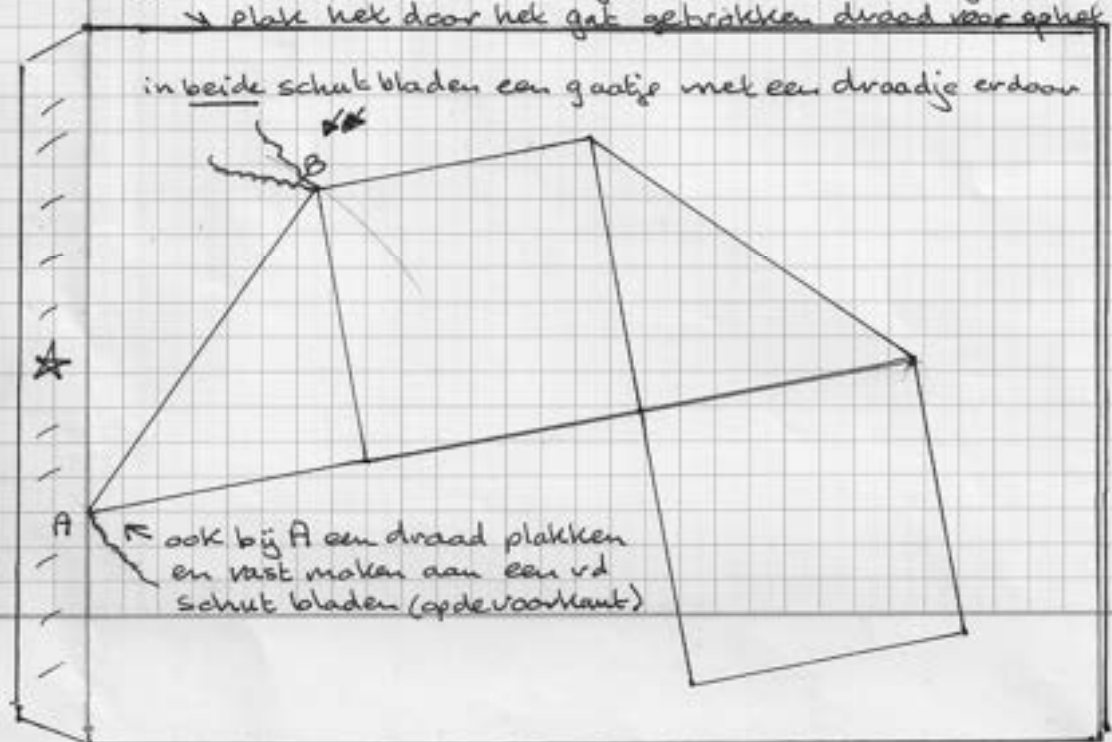
- | dichte lijnen moeten helemaal door gesneden worden
- - - gestreepte lijnen moeten geritst worden

- 4 Snij de bouwplaat inclusief plakrandjes uit het papier, of, voor de snelle manier:
Knip de gehele bouwplaat uit inclusief de plakrandjes.
Bij het blanco blad met de gaatjes het voorbeeld ernaast leggen, kijk goed tussen welke gaatjes je moet snijden.
Voor het ultieme resultaat moeten alle plakrandjes worden afgesneden en moet de bouwplaat met rijstpapier aan elkaar geplakt worden.
- 5 Rits met een scherp voorwerp de gestippelde lijnen van de figuur; je kunt ook heel licht een snede maken met het mes, maar denk erom dat je niet helemaal door snijdt. Kijk goed naar het voorbeeld.
- 6 Plak de zijden CD en DE aan elkaar, met de plakrandjes of met een strookje rijstpapier (aan de binnenkant).
- 7 Plak een draadje op beide punten A en beide punten B op de bouwplaat.
- 8 Vouw het schutblad dubbel en weer open. Leg de dubbele bouwplaat met de draadjes van A op de vouwlijn tussen het schutblad. Op de plaats van A en van B (in beide helften van het schutblad) moet een gaatje geprikt worden. B moet zo gekozen worden dat ABCD een diagonaalvlak van de kubus is met lichaamsdiagonaal AC.
Later komt punt E, na het omvouwen en openklappen ook op punt A terecht. Het kan handig zijn om op de bouwplaat bij E ook een draadje te plakken en dat beweegbaar door het gaatje van A te steken. De kubus kan dan strak getrokken worden als hij eenmaal is opnegeplapt.
- 9 Steek beide draadjes van A door hetzelfde gat, en steek op de plaatsen waar B zit de draadjes erdoorheen en plak ze vast op de andere kant van het schutblad.
Eventueel dus het draadje van E ook bij A doorsteken NIET VASTPLAKKEN.
Plak desgewenst een tweede schutblad over de buitenkant van het eerste schutblad om de draadjes te verbergen.





- knip of snij de twee helften uit
- plak de randen $(*)$ $(*)$ CD en DE aan elkaar; AB en BC niet plakken
- plak de twee halve schutbladen aan elkaar $(*)$
 - neem twee halve schutbladen (dubbel); prik op plaats B een gaatje;
 - plak een draadeind bij B aan de bouwplaat; duw de vast erdoor
 - plak het door het gat gebrakken draad ~~aan~~ op het schutblad.



in beide schutbladen een gaatje met een draadje erdoor

ook bij A een draad plakken en vast maken aan een vd schutbladen (op de voorkant)

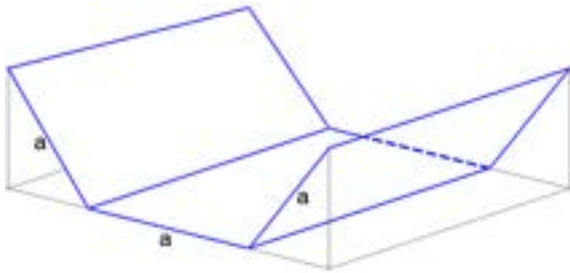
Optimale goot

Nodig zijn:

- enkele stroken papier

Aan de slag:

1. Vouw van de strook papier in de lengte in drieën, zodat je er een goot van kunt vouwen waarbij de bodem even groot is als de opstaande randen. Zie figuur.
2. Stel een formule op voor de verticale doorsnede van de goot.
Welke variabele is handig? Welke voorwaarden stel je aan de goot?



3. Bereken de vorm met de maximale doorstroming. Valt je wat op aan het resultaat?
4. Hoe gaat het als de randen een kwart van de strook hoog zijn? Of een vijfde? En hoe bij een V-goot?

* Wat vind je van deze activiteit voor een klas?

Bakjes met schuine wanden

Nodig zijn:

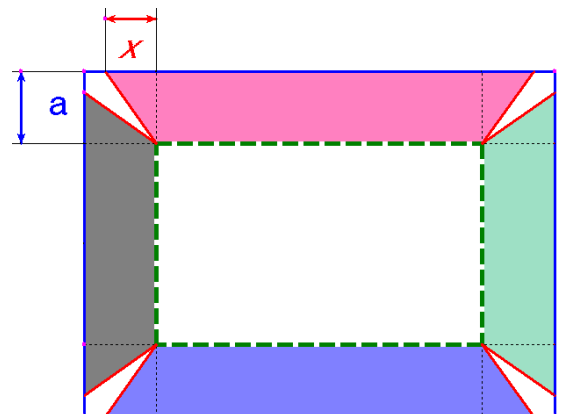
- enkele A4-tjes

Aan de slag:

Wanneer het vierkantje met zijde a niet wordt weggeknipt (of gevouwen), maar schuin wordt uitgeknipt, dan ontstaat een bakje met een schuin oplopende rand (zie figuur).

1. Vouw rondom een rand van $a=5$ cm om; knip vervolgens in de vier hoekpunten een stukje uit zoals in de figuur is aangegeven met resp. $x=1$, $x=2$, $x=3$ en $x=4$.
Voor elke waarde van x staat de rand onder een andere hoek.
2. Stel een formule op van de inhoud van de doos, uitgedrukt in x .
3. Voor welke waarde van x is er een maximale inhoud?

Met $l = 29,7$ en $b = 21,0$ en $a = 5$ vinden we maximale inhoud $1743,9$ als $x = 3,45$.



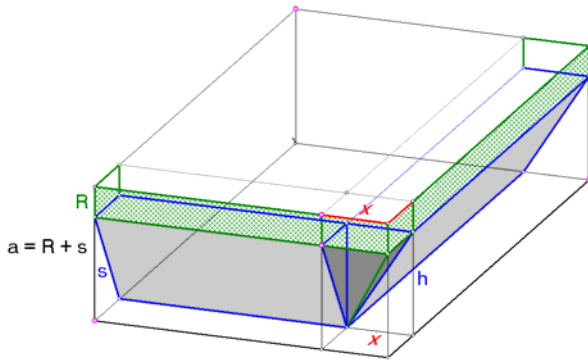
* Wat vind je van deze activiteit voor een klas?

Schuine bakjes met opstaande randen

Zou de inhoud nog groter kunnen worden als een deel van de schuine rand recht omhoog gevouwen wordt? De bak komt dan minder breed, maar wel iets hoger. In deze paragraaf gaan we onderzoeken hoe dat zit. Hieronder is al vast een deel van de bak getekend met daarin de verdeling in handige stukken te zien.

Voorste deel van een bak met schuine en opstaande rand;

probeer te ontdekken in welke basisvormen de inhoud verdeeld kan worden: balkjes, prisma's en piramides



Nodig zijn:

- enkele A4-tjes

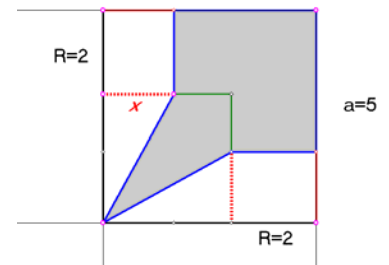
Aan de slag:

1. Vouw rondom een rand van $a=5$ cm om.
2. Knip in plaats van vier vierkantjes uit de hoeken een kleiner vierkantje uit met een uitlopende punt (zie arcering in de figuur).

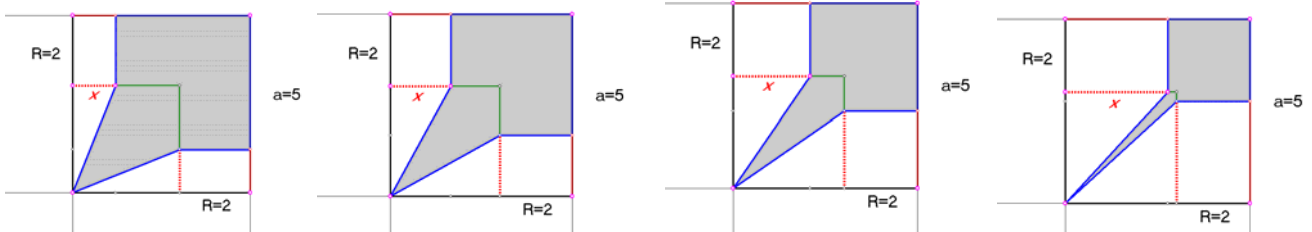
Bij het dichtplakken ontstaat vanaf de bodem een schuin oplopende rand met daarop een rechtopstaande rand (zie figuur hierboven).

Het berekenen van de inhoud hangt af van verschillende aannames:

- de rand a die van de zijkant van het karton wordt omgevouwen,
- de hoogte R van de rechtopstaande rand,
- en de breedte x waarover de schuine rand uitsteekt buiten de bodem.



De hoeken van verschillende bouwplaten bij vouwrand $a=5$ en opstaande rand $R=2$

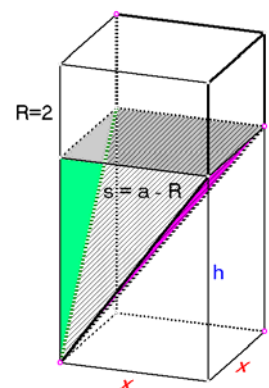


3. Stel een formule op van de inhoud van de bak uitgedrukt in x , bij $a=5$ en $R=2$.

Deel de bak nu op in verschillende ruimtelijke vormen:

4. Voor welke waarde van x heeft de bak een maximale inhoud?

* Wat vind je van deze activiteit voor een klas?



$$h = \sqrt{(s^2 - x^2)}$$

Lees meer hierover in het verslag van de workshop in de Nieuwe Wiskrant

Inpakken van een kubus

We willen een kubus inpakken **in een rechthoekig stuk papier**.

We willen dat er zo min mogelijk papier verloren gaat bij het inpakken.

Als het niet hoeft dan mogen de uiteinden precies tegen elkaar komen en zal er geen overlappend randje zijn.

Nodig zijn:

- een houten kubus van 45 bij 45 bij 45 mm; **of 30 x 30 x 30 mm**
- enkele rechthoekige blaadjes; eentje waar stroken afgeknipt moeten worden; eentje die met recht vouwen volstaat; eentje waar het **grijze** vierkantje schuin op staat (beetje hulp); tenslotte eentje met het inpakpatroon op ruitjes met de oplossing (geheim in een envelop)
- een papier met ruitjes patroon en een assenstelsel Oxy erop getekend met een gearceerd **grijs** vierkant met zijde 1 (dus de eenheid van het assenstelsel is 45 mm **of 30 mm**)

Aan de slag:

Voor de SNELLE versie sla je stap 1 t/m 5 over; begin bij 6.

1. Pak de houten kubus in het grootste van de drie papiertjes in.
2. Knip randen van het papier af, of vouw randen om totdat je een zo klein mogelijke rechthoek hebt waarin de kubus nog net past.
3. Welke afmetingen heeft het papier waarvan je vindt dat het niet kleiner kan? ... bij ... mm
Druk de oppervlakte uit in het aantal vierkanten van 45 bij 45 mm **of 30 x 30 mm**. ...
4. Het een na grootste papier heeft deze afmetingen; leg het even op het ruitjespapier om dat te controleren.
Leg ook het kleinste papier even op het ruitjespapier en zie dat dat echt kleiner is.

BONUS:

5. Er is ook een vierkant stuk papier met totale oppervlakte van 8 vierkanten waarin de kubus precies kan worden ingepakt. Zoek uit hoe de kubus in dat vierkante stuk papier kan worden ingepakt.
Teken het inpakpatroon van dit vierkante stuk op een kant van het ruitjespapier, arceer de stukken die overlappen.
Tip: Hoe groot zijn de zijden van het vierkante stuk papier? Hoe kun je zo'n zijde makkelijk tekenen op de ruitjes?

GA HIER VERDER:

6. Maar het is een wonder, de kubus kan ook worden ingepakt in het kleinste stuk papier. Neem de kleinste rechthoek waar alleen een vierkant op gearceerd is. Leg de kubus op het **grijs** gearceerde vierkant op deze rechthoek en vouw het papier zo om de kubus dat hij er helemaal in zit. Er zijn ook stukjes die overlappen.
7. Zit hij er in? Neem dan een markeerstift en kleur de 12 ribben van de kubus op het papiertje.
8. Vouw het open en breng het patroon over op de zijde van het ruitjespapier met het assenstelsel; verleng eerst de gekleurde ribben tot aan de randen; bedenk hoe het rechthoekige papier precies op de ruitjes moet worden getekend. De randen lopen schuin, maar de hellingen zijn wel onderling loodrecht.
Probeer te ontdekken welke hoekpunten van de kubus precies op de randen van het papiertje liggen; dat worden roosterpunten in het assenstelsel Oxy van de ruitjes; een daarvan is $O(0,0)$. Noem de rechthoek OABC.
9. Volg nu de berekeningen van de **bijlage** wiskunde waarmee je de coördinaten van de hoekpunten van de rechthoek worden berekend en de zijden van de rechthoek.
Je kunt ook met gelijkvormigheid van driehoeken de zijden van de rechthoek berekenen. Voor de liefhebber.
10. Vouw nu nog eens de kubus in de andere kleine rechthoek die schuin op het ruitjespapier is getekend.
Kleur de vlakjes die samen een zelfde zijkant vormen; arceer de helft van delen die elkaar overlappen.

Je hebt nu een inpakpatroon van een kubus die 10% minder papier vraagt dan de "normale", rechte manier.

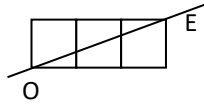
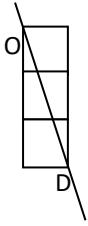
Wat heb je er van geleerd?

Wat vond je ervan?



Bijlage berekeningen inpakpapier kubus

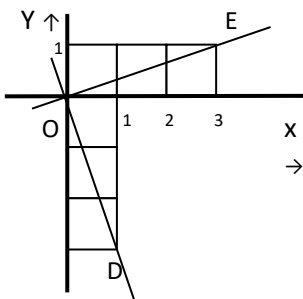
1. Geef de helling van lijn OD. ...



2. Geef de helling van lijn OE. ...

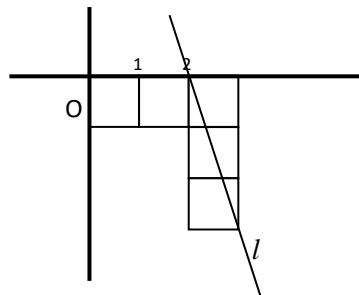
3. Staan de lijnen OD en OE loodrecht op elkaar? Hoe kun je dat zien?

4. Geef de formules van de lijnen OD en OE in het assenstelsel Oxy.



$$OD: y = \dots \dots \dots$$

$$OE: y = \dots \dots \dots$$



5. Geef de formule van lijn l door punt $(2,0)$ die evenwijdig loopt aan OD. Bedenk helling en startwaarde.

$$l: y = \dots \dots \dots$$

C is het snijpunt van lijn l met OE.

6. Bereken de coördinaten van punt C.

Voor de zijden van de rechthoek geldt:

$$OA = BC \text{ en } OC = AB$$

7. Bereken de lengte van OC met de stelling van Pythagoras.

Punt B is ook een roosterpunt.

8. Welke coördinaten heeft punt B?

Bereken nu ook de lengte van BC.

9. Schrijf de exacte lengten van OC en BC als breuken met noemer $\sqrt{10}$: $OC = \frac{\dots}{\sqrt{10}}$ en $BC = \frac{\dots}{\sqrt{10}}$

10. Bereken de oppervlakte van de rechthoek OABC: $OC \cdot BC = \dots$

De oppervlakte van de grotere rechthoek was 8 (vierkanten).

11. Hoeveel % besparing levert de getoonde manier van inpakken? ..

Merk op dat de beide rechthoeken gelijkvormig zijn.

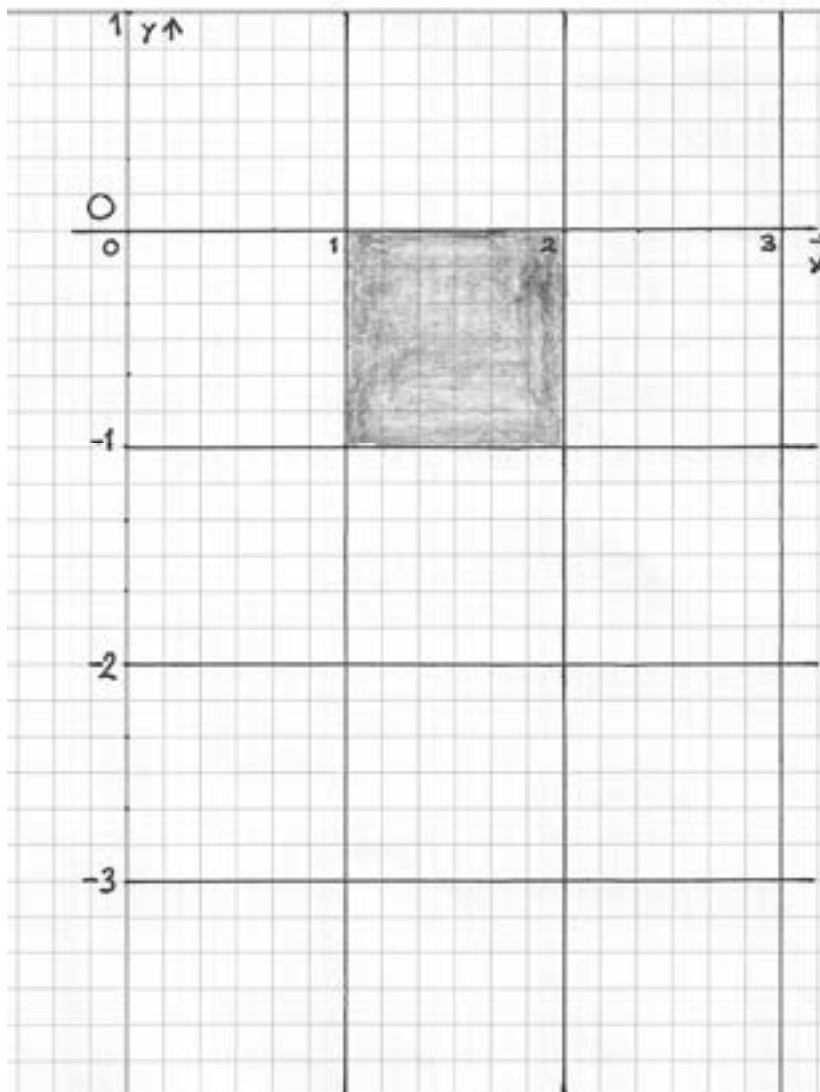
Voor beide geldt dat de lengte 2 maal de breedte is.

Vervolg het andere blad bij punt 10.

Antwoorden:

$$y = -3x; y = \frac{1}{3}x; y = \frac{1}{3}(x-2); \text{ snijpunt } x = 1,8, y = 0,6; OC = \frac{6}{\sqrt{10}}, OD = \frac{12}{\sqrt{10}}; \text{ dus oppervlakte} = \frac{72}{10} = 7,2$$

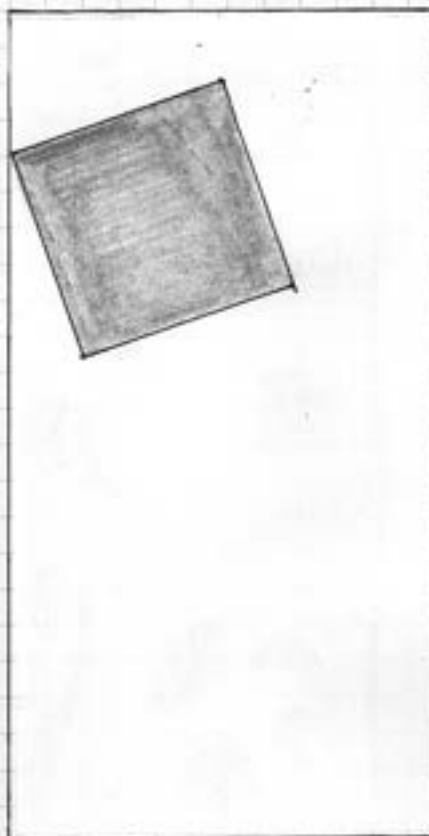
Kubus inpakken met $r=3\text{ cm}$



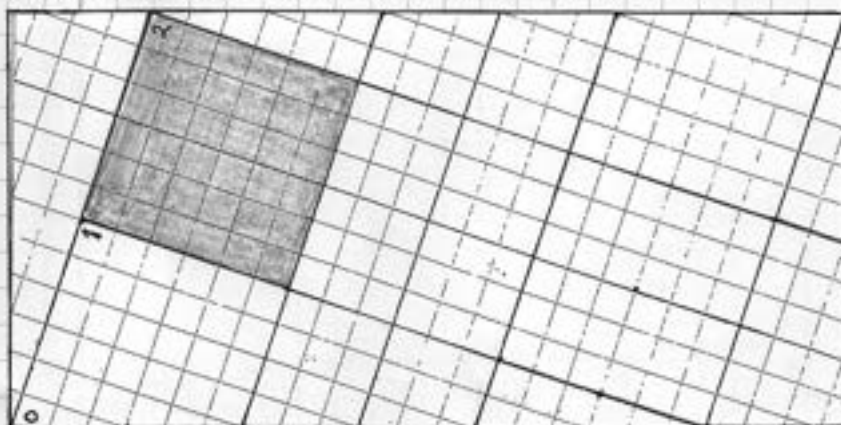
gevonden
vouwpatroon
overbrengen
in dit assenstelsel

① uitproberen

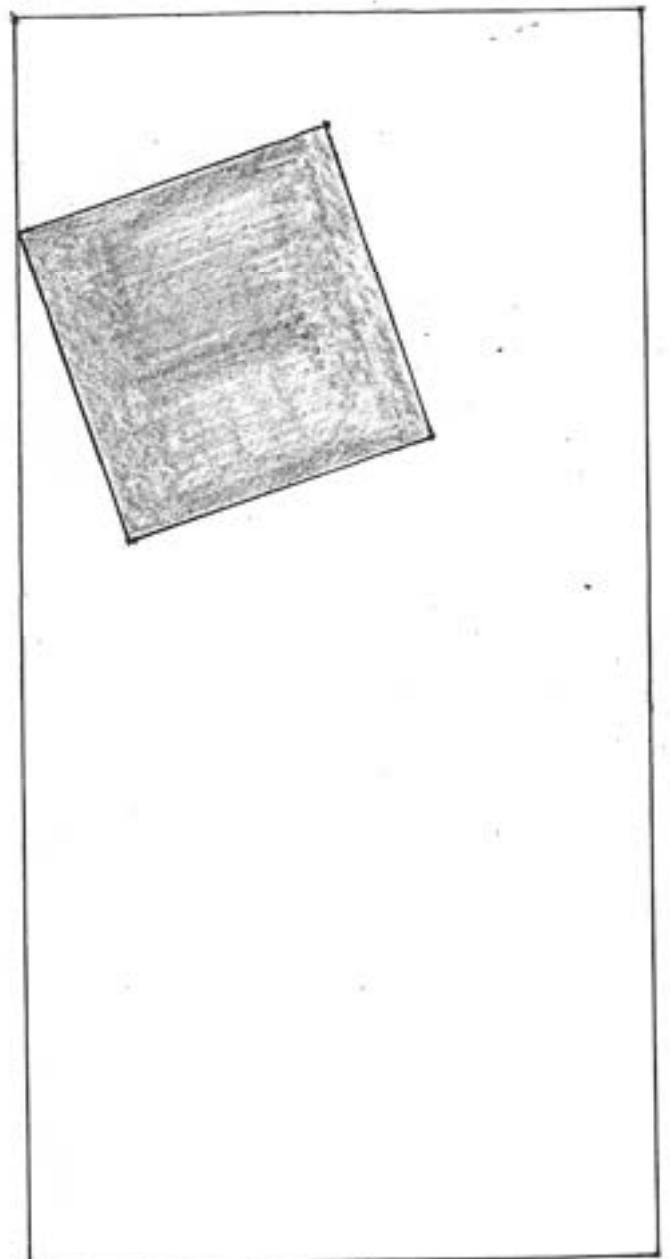
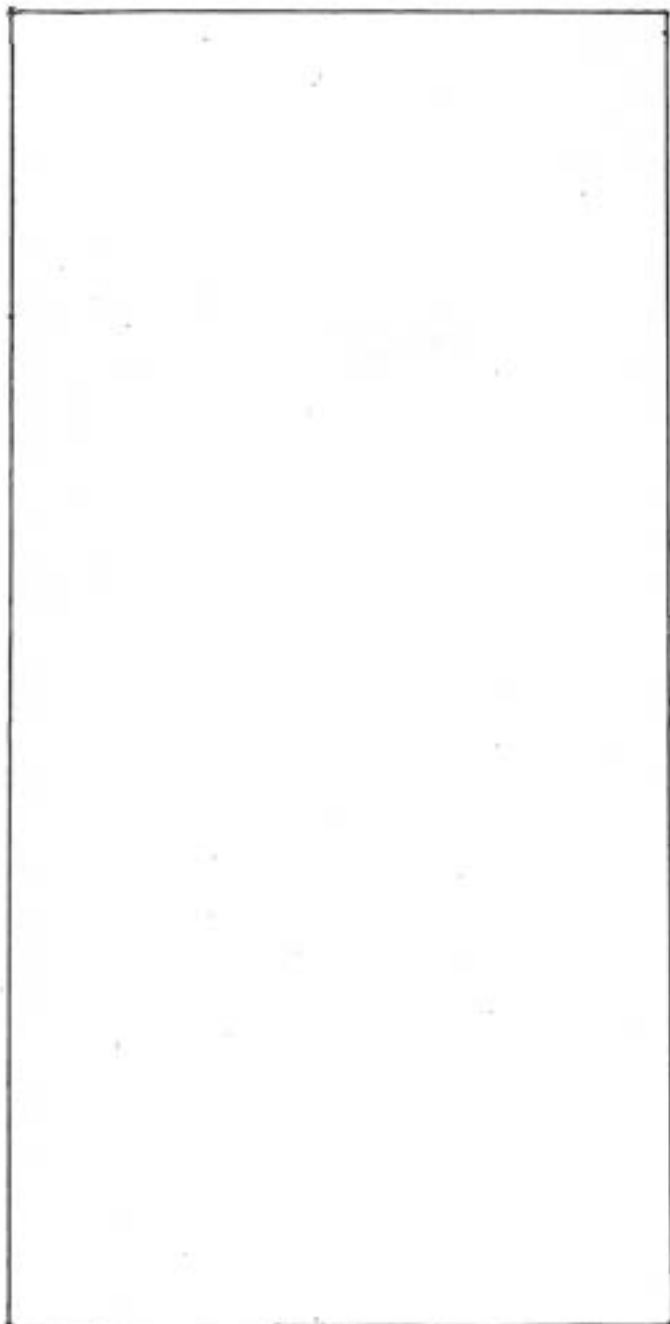
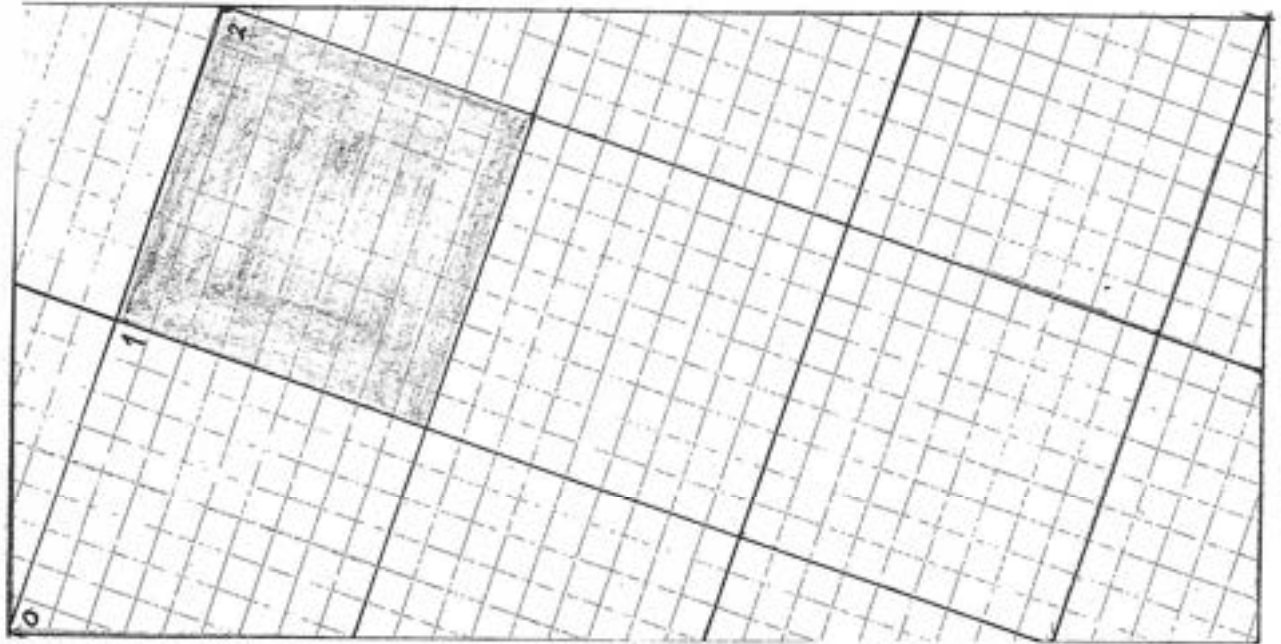
② het kan met minder



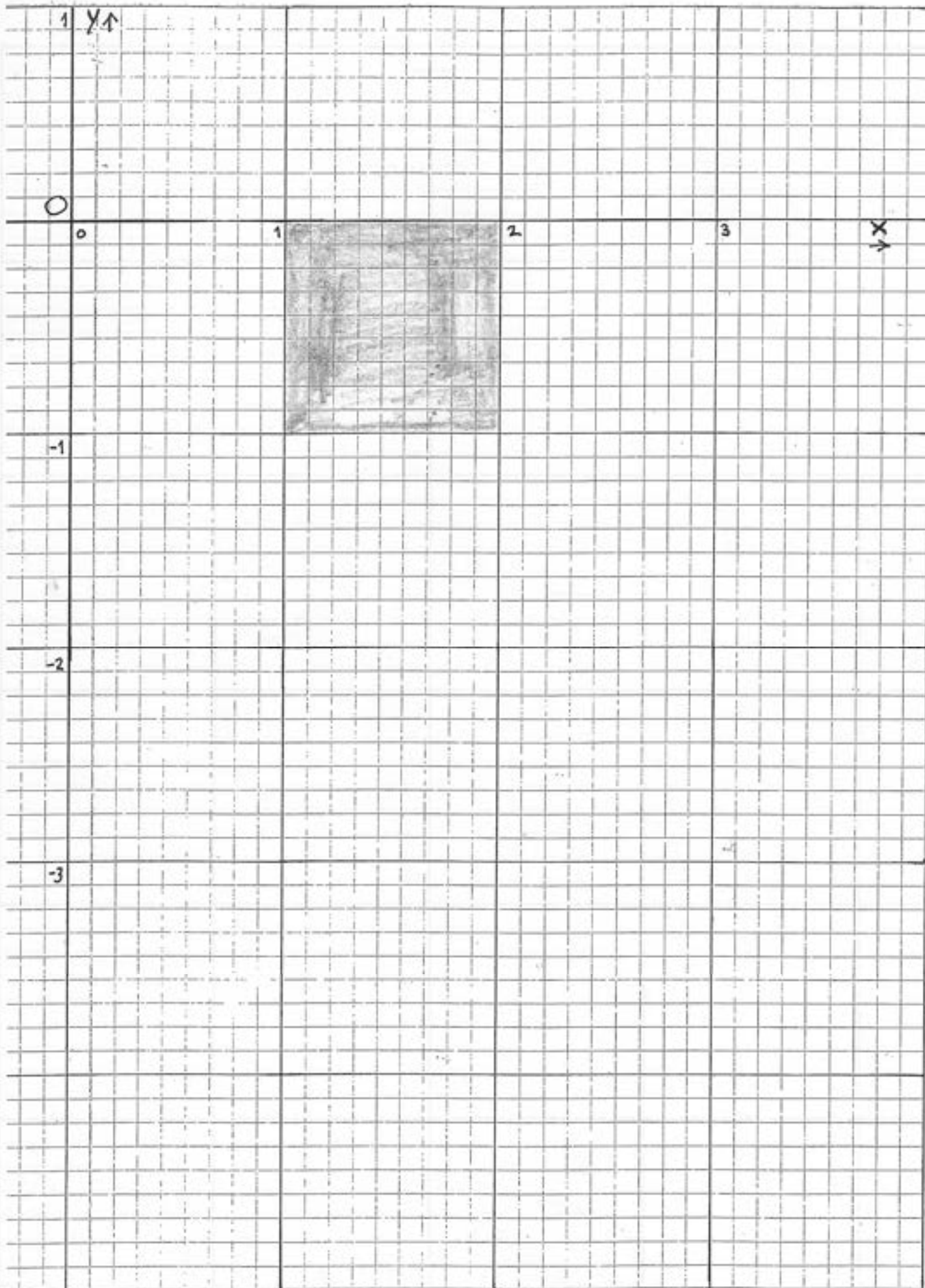
③ oplossing: achteraf uitdelen



inpakken kubus van 45 mm; papier voor echt inpakken, papier voor schuin inpakken (met grijs vierkant); antwoordpapier



inpakken kubus van 45 mm; assenstelsel



Opvouwbare halve bol

1 Het opvouwprincipe.

Dit principe is toepasbaar op elk willekeurig ruimtemodel. Het gaat er om dat je een aantal verticale doorsneden maakt in twee onderling loodrechte richtingen. In de doorsneden worden op de juiste plaatsen insneden gemaakt. Vervolgens worden de doorsneden in elkaar geschoven. Het model zit op twee of drie bevestigingspunten met draad vast aan het vouwblad. Dichtgeklapt zitten twee bevestigingspunten precies boven elkaar, een eventueel derde bevestigingspunt zit op de vouwlijn. Bij dit principe komt een voorwerp uit een dubbelgevouwen blad te voorschijn en staat klaar als het blad 180° is uitgevouwen. Omgekeerd verdwijnt het openstaande model bij het dichtvouwen geheel tussen het dubbelgevouwen blad.

Het is handig is om bij het ontwerpen ruitjespapier of mm-papier te gebruiken. In dit geval wordt een halve bol met straal 6 cm gebruikt met 8 verticale doorsneden.

De opengeklapte halve bol staat altijd met een middellijn op de vouwlijn. In figuur 1 is het bovenaanzicht getekend. In figuur 2 zijn wat letters aangebracht om er makkelijker over te kunnen schrijven.

a) Begin met het tekenen van vierkant ABCD, met A en C op de vouwlijn, en de bevestigingspunten B en D waar later een draad aan wordt geplakt. Die draden worden later door het schutblad heen getrokken en aan de buitenkant vastgelijmd. Om de draden te verbergen is het mooier om tot slot over beide helften van het vouwblad een schutblad te plakken.

b) De verticale doorsneden met de halve bol zijn halve cirkels; in dit voorbeeld zijn de zijden van het vierkant in drie gelijke stukken verdeeld en zijn er dus vier halve cirkels evenwijdig aan AB en vier halve cirkels evenwijdig aan AD. Je kunt de zijden ook in meer gelijke stukken verdelen waarop de verticale doorsneden moeten komen. Het is meer werk, maar toont spectaculairder. Nog mooier wordt het als je stroken cirkelbogen neemt ipv halve cirkels.

c) De middellijnen, dus ook de stralen van de halve cirkels kun je in het bovenaanzicht meten. De middellijnen zijn precies de koorden die in het bovenaanzicht van de cirkel getekend zijn. Zie figuur 3 en figuur 4.

Als de straal van de bol bekend is kun je ze ook uitrekenen.

Later zie je hoe eenvoudig dit bij de bol met straal 6 cm gaat.

In dit voorbeeld komen slechts twee verschillende stralen voor:

Vier keer van de kleine halve cirkels boven de zijden van vierkant ABCD, en vier keer van de halve cirkels die de zijden in gelijke stukken delen.

d) Om het geheel in elkaar te kunnen schuiven moet in de parallelle cirkels in de ene richting van onder tot halverwege worden ingesneden, en voor de andere richting van boven. Doe dit net iets verder dan de helft en knip bij dikker papier iets bredere sleufjes. In figuur 3 en figuur 4 zijn die al aangegeven.

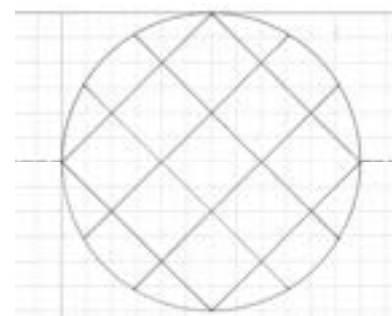
Opgabe: Bereken de stralen van de verticale cirkels in de doorsnede van de halve bol. Bereken ook hoe hoog de sleuven die moeten worden uitgeknipt precies zijn.

e) Met twee grote en twee kleine cirkels is het aantal halve cirkels compleet.

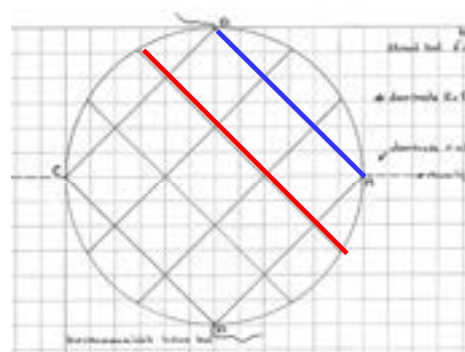
Uitknippen, in elkaar schuiven, in de punten B en D een draad plakken (aan de binnenkant), de draden door een gaatje in het vouwblad (op de plek waar B en D in het bovenaanzicht in figuur 2 staan) trekken. Draden vastplakken, schutblad eroverheen en klaar.

Het is wel handig als de verschillende delen met rijstpapier of plakband aan elkaar worden geplakt.

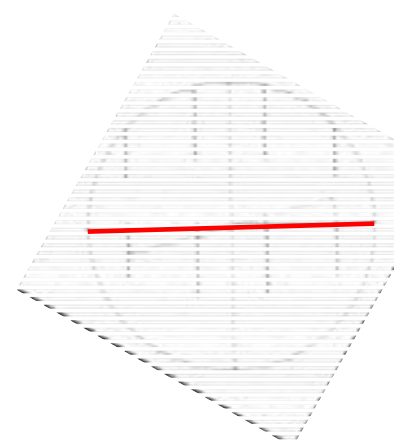
Anders is er grote kans dat het hele bouwsel uit elkaar valt. Bij dikker karton hoeft dat niet zo nodig.



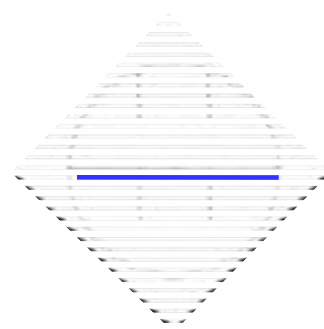
figuur 1 bovenaanzicht halve bol met verticale doorsneden



figuur 2 nogmaals het bovenaanzicht



figuur 3 grote verticale halve cirkels



figuur 4 kleine verticale halve cirkels

2 De afmetingen

Het werkt altijd makkelijk en secuur te ontwerpen op ruitjespapier of mm-papier.

Met een straal van 6 cm worden zijden van het vierkant $6\sqrt{2}$ cm lang.

Dit zijn 6 diagonaaltjes van 1 cm hokjes op het ruitjespapier, dus $6 \cdot \sqrt{2}$ cm.

Maar dit zijn ook de middellijnen van *de kleine verticale cirkels* op het vierkant.

Twee cirkels met straal $r = 3\sqrt{2}$ geven de bouwplaat van de vier halve cirkels op het vierkant.

Waar zitten *de grote verticale cirkels* nu precies?

Daarvoor moet de zijde van het vierkant in drie gelijke stukken worden verdeeld.

Dat betekent drie keer $2\sqrt{2}$.

Vanuit het middelpunt van de grote cirkel (met straal 6 cm) moet dus $\sqrt{2}$ op de (diagonale) straal genomen worden.

De straal R van de cirkel van de grote verticale doorsnede kan met Pythagoras worden berekend. $R = \sqrt{(6^2 - (\sqrt{2})^2)} = \sqrt{(36 - 2)} = \sqrt{34} = \sqrt{(9+25)}$.

Deze straal kan dus mooi op ruitjes worden getekend als schuine zijde van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van 3 en 5 cm.

Blijft nog over om *de hoogte van de sleuven* te berekenen waarmee de halve cirkels in elkaar moeten worden geschoven.

In de kleine halve cirkel (met straal $3\sqrt{2}$) zit de sleuf op $2\sqrt{2}$ cm van de rand, en ook op $\sqrt{2}$ cm van het midden.

Met Pythagoras vinden we dan *de hoogte van de sleuf h in de kleinste cirkel*:

$$h = \sqrt{((3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2)} = \sqrt{(18 - 2)} = \sqrt{16} = 4. \text{ Zie figuur 6.}$$

Dat is eigenlijk verrassend mooi.

De hoogte van de kleinste sleuf h kan ook berekend worden in de grote halve cirkel. Daar ligt hij $3\sqrt{2}$ van het middelpunt af. Zie het bovenaanzicht.

We cirkelen die $3\sqrt{2}$ even om naar de straal $\sqrt{34}$ en tekenen loodrecht daarop de gevraagde sleuf. Met Pythagoras berekenen we de hoogte :

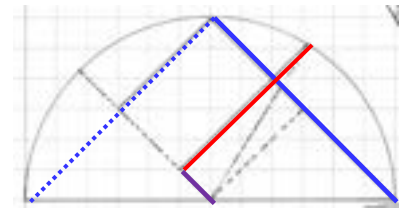
$$h = \sqrt{(\sqrt{34})^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{(34 - 18)} = \sqrt{16} = 4. \text{ Zie figuur 7}$$

Op een soortgelijke manier vinden we *de hoogte van de grootste sleuf H in de grote cirkel*.

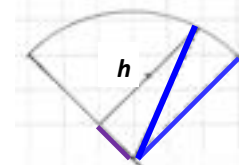
Die zit in alle vier de grote halve cirkels op $\sqrt{2}$ van het middelpunt.

Ook weer met Pythagoras te berekenen:

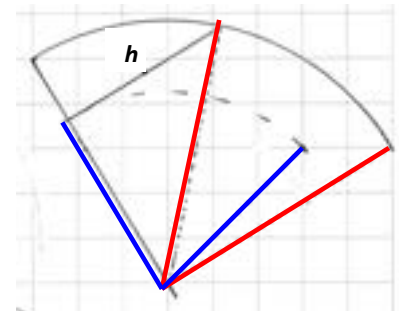
$$H = \sqrt{(\sqrt{34})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(34 - 2)} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}. \text{ Zie figuur 8.}$$



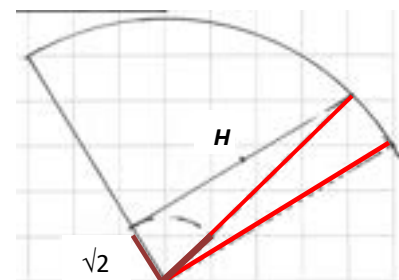
figuur 5 straal grote doorsnede



figuur 6 hoogte van de sleuf in de kleine halve cirkel



figuur 7 hoogte van de kleinste sleuf in de grote halve cirkel



figuur 8 hoogte van de grootste sleuf in de grote halve cirkel

3 Hoe maak je die halve bol?

Nodig:

- een *bouwplaat* voor 8 halve cirkels; vier cirkels op een A4-tje
- voor een mooi werk een *blanco blad* A4 160 g papier, waarop het patroon van de bouwplaat wordt overgebracht door middel van prikken van gaatjes in de eindpunten en hoekpunten van de bouwplaat
- een *vouwblad* en een *schutblad* waartussen de halve bol opgevouwen komt te zitten; deze doormidden vouwen
- twee *stukjes draad* van ongeveer 8 cm om de halve bol mee te bevestigen aan het vouwblad
- een *snijmes (of schaar)* en een *passer*; er bestaan ook cirkelsnijmessen met een beperkte straal
- aanbevolen een *dik stuk karton* om bij het prikken en snijden de bouwplaat op te leggen, zodat de tafel niet wordt beschadigd
- een *voorbeeldfoto en/of een bovenaanzicht* om te zien hoe de in elkaar geschoven stukken uiteindelijk komen te zitten, en om te zien waar de gaatjes waar de draadjes door het vouwblad moeten komen
- *plakband (of rijstvloei met lijm)*

Opmerkingen vooraf:

Meestal gebruik je kopieën van de bouwplaten, zo mogelijk op dikker papier, van de originele bouwplaat. Nadeel daarvan is dat alle lijntjes er dan ook op staan.

Een mooiere methode is dat je de bouwplaat op een blanco stuk karton, of dik papier (160 grams) legt.

Vervolgens prik je met een passerpunt een klein gaatje in alle eindpunten van lijnstukken en middelpunten van cirkels van de bouwplaat. Met potlood kun je nu de cirkelbogen tekenen. Later kun je dat potlood weer uitgummen. Met de bouwplaat er naast kun je precies zien welke lijntjes tussen twee gaatjes je moet snijden/knippen.

De sleuven moeten telkens voor de helft langs een ijzeren liniaal worden ingesneden. Maar voor een uitprobeersel is knippen ook goed.

In elk geval moeten er 8 halve cirkels worden uitgeknipt, dan wel gesneden.

Vervolgens moeten de sleuven worden aangebracht. In vier halve cirkels van onder af, in de andere vier van bovenaf. Denk er aan dat je de sleuven een klein beetje wijder maakt dan alleen een snee. En ook iets langer dan de helft.

Om de bol te kunnen opvouwen moet er voordat hij in elkaar wordt geschoven op twee plaatsen een draad van ongeveer 8 cm worden geplakt. Ook is het bij een uitprobeersel handig om de in elkaar geschoven halve cirkels met een klein stukje plakband aan elkaar te plakken. Anders bestaat de kans dat hij bij het uitvouwen uit elkaar valt. Dan nog de laatste klus.

In het bovenaanzicht van figuur 2 kun je zien dat de draden in de punten B en D door het vouwblad moeten worden gestoken. Prik daar met de passer een gaatje. Probeer met de passerpunt het draad erdoorheen te wurmen.

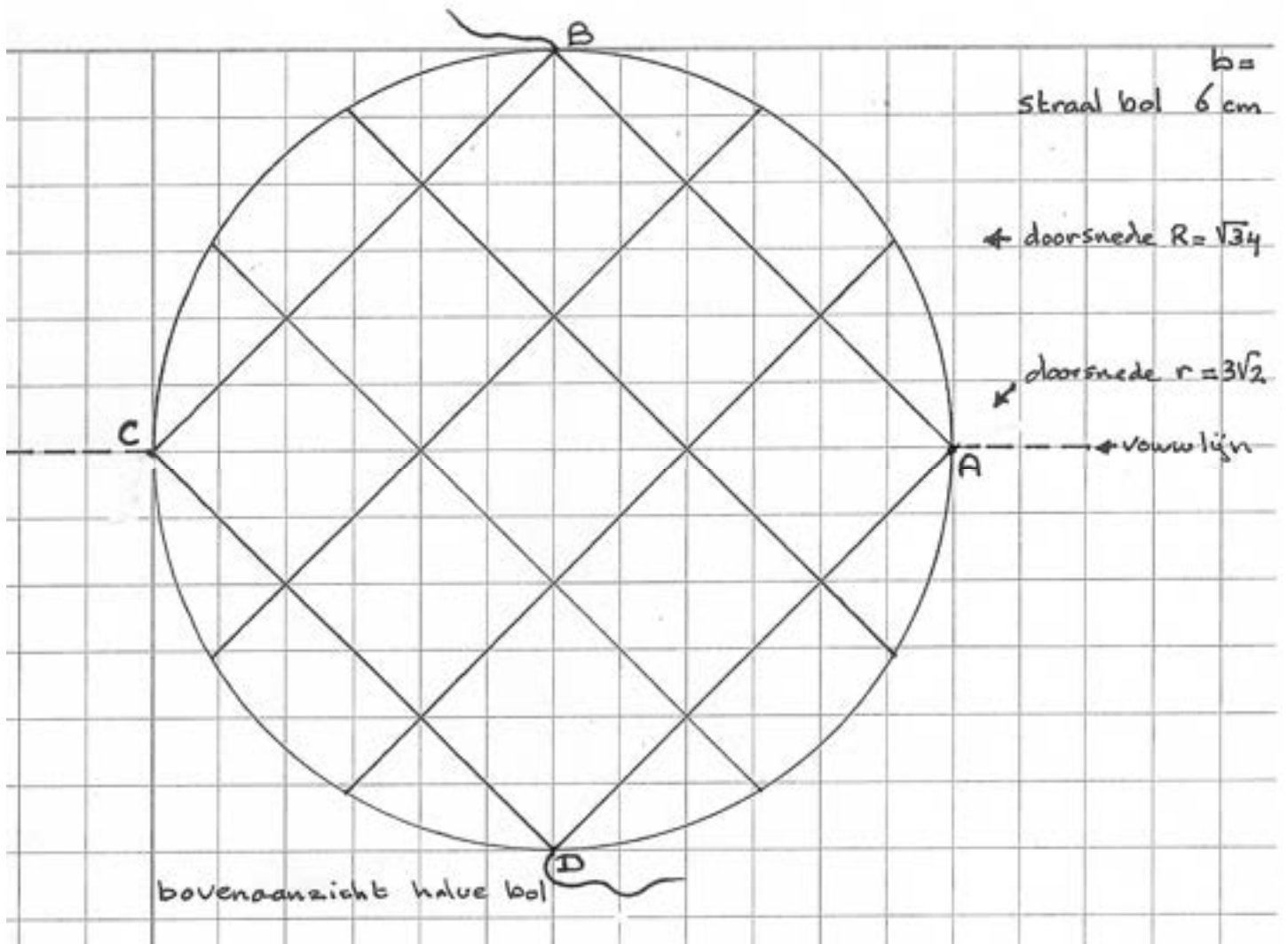
Aan de buitenkant de draad strak trekken en erop vastplakken. Het mooiste resultaat is er als je een strookje rijstpapier (vloeipapier) erover plakt. Maar bij uitprobeersels volstaat plakband.

Voor de afwerking plak je op de beide helften van het vouwblad nog een schutblad.

Dan zie je de geplakte draad niet meer.

Aan de slag: Gebruik je een blanco wit 160 g A4-tje? Voer dan punt 1 t/m 3 uit, zo niet, dan ga je naar punt 4.

- 1 Leg de bouwplaat van de vier cirkels boven op het blanco blad.
- 2 Prik op alle eindpunten en hoekpunten met een passer een gaatje door de bouwplaat en het blanco blad heen; zorg ervoor dat je eerst een dik stuk karton of snijmat eronder legt, om de tafel niet te beschadigen; zie voorbeeld.
- 3 Teken met dun potlood de vier cirkels en de sleuven op het blanco blad; later moeten die weer worden uitgummd; leg de bouwplaat ernaast om goed te zien waar de cirkels en de (halve) sleuven moeten komen.
- 4 Knip of snij de acht halve cirkels uit het papier.
- 5 Knip of snijd langs een liniaal de sleuven uit de halve cirkels; bij dik papier echt een 1 mm sleuf maken; maak de sleuven 1 mm dieper dan getekend om er later zeker van te zijn dat alles goed in elkaar past.
- 6 Plak met plakband of rijstvloei op het eind van twee kleine halve cirkels een draadje; die moeten later door een gaatje in het vouwblad worden gepriegeld.
- 7 Schuif de halve cirkels in elkaar; begin met een grote halve cirkel met sleuven aan de onderkant in de vier halve cirkels met de sleuven aan de bovenkant te steken; daarna de andere grote halve cirkel ernaast; tenslotte de twee kleine halve cirkels inpassen.
- 8 Prik op de juiste plaats een gaatje in het dubbelgevouwen vouwblad; gebruik het boven aanzicht van figuur 2; vouw het open en steek een draadje door elk van beide gaatjes; vouw het bouwsel tussen het vouwblad en trek de draadjes aan beide kanten strak; plak beide draadjes vanuit het gat aan de buitenkant vast.
- 9 Plak het dubbelgevouwen schutblad aan de buitenkant; daardoor zie je de bevestigingsdraadjes niet meer.



Voorbeeld van bouwplaat met gaatjes; bouwplaat op de volgende bladzijde

