Hand-out Workshop Zebrareeks

Mariken Barents
Marjan Botke
Peter Kop
Rob van Oord

In deze hand-out staan de opgaven die tijdens de workshop zijn uitgedeeld aan de deelnemers.
Omdat er in de workshop ook een activerende werkvorm werd aangeboden, “speeddaten” genaamd, zijn voor elk boekje drie tot vier versies opgaven gemaakt. Via een voor iedere deelnemer verschillende route, SomSom genaamd, werd achtereenvolgens in steeds wisselende drietallen aan een opgave gewerkt.
Bij het oplossen van de opgaven kon ook gekozen worden om een Tip of extra Hulp op te vragen.
Bij het vaststellen van het eindresultaat worden voor het aanboren van Tip en/of Hulp punten afgetrokken.
Voor de snelle werkers was er nog een Bonus opgave met iets meer uitdaging.

De opgaven gaan over delen van de boekjes uit de Zebrareeks van de Vereniging:
1 Kattenaids
4 De Gulden Snede
11 Schuiven met auto’s, munten en bollen
20 Babylonische Wiskunde
31 Meester Ludolph’s Koordenvierhoek

De collega’s die de workshop hebben gegeven zien graag dat steeds meer collega’s in hun lespraktijk gebruik gaan maken van de inspirerende en uitdagende boekjes uit deze unieke reeks.

In de workshop correspondeerden de versie met kleuren.
versie 1 = geel, versie 2 = blauw, versie 3 = groen, versie 4 = zalm

Versie 1

We gaan uit van twee steekproeven uit twee verschillende populaties katten.
De eerste groep zijn zwerfkatten die op straat zijn gevonden. De tweede groep zijn katten die naar een dierenasiel zijn gebracht uit een huishouden. Bij beide groepen is gekeken of ze besmet zijn met kattenaids. Dit is een virus zorgt er voor dat het immuunsysteem van katten niet meer goed werkt.

	besmet	niet besmet	totaal
Gevonden	28	438	466
Gebracht	4	253	257
Totaal			723

Kun je op basis van bovenstaande gegevens volgende conclusie trekken?
De kans op kattenaids bij gevonden katten is even groot als bij gebrachte katten.
Neem als onbetrouwbaarheid 1%.

Versie 2

We gaan uit van twee steekproeven uit twee verschillende populaties katten.
De eerste groep zijn zwerfkatten die op straat zijn gevonden. De tweede groep zijn katten die naar een dierenasiel zijn gebracht uit een huishouden. Bij beide groepen is gekeken of ze besmet zijn met kattenaids. Dit is een virus zorgt er voor dat het immuunsysteem van katten niet meer goed werkt.

	besmet	niet besmet	totaal
Gevonden	28	438	466
Gebracht	10	247	257
Totaal			723

Kun je op basis van bovenstaande gegevens volgende conclusie trekken?
De kans op kattenaids bij gevonden katten is even groot als bij gebrachte katten.
Neem als onbetrouwbaarheid 1%.

Versie 3

We gaan uit van twee steekproeven uit twee verschillende populaties katten.
De eerste groep zijn zwerfkatten die op straat zijn gevonden. De tweede groep zijn katten die naar een dierenasiel zijn gebracht uit een huishouden. Bij beide groepen is gekeken of ze besmet zijn met kattenaids. Dit is een virus zorgt er voor dat het immuunsysteem van katten niet meer goed werkt.

	besmet	niet besmet	totaal
Gevonden	28	438	466
Gebracht	4	253	257
Totaal			723

Kun je op basis van bovenstaande gegevens volgende conclusie trekken?
De kans op kattenaids bij gevonden katten is groter dan bij gebrachte katten.
Neem als onbetrouwbaarheid 1%.

Versie 4

We gaan uit van twee steekproeven uit twee verschillende populaties katten.
De eerste groep zijn zwerfkatten die op straat zijn gevonden. De tweede groep zijn katten die naar een dierenasiel zijn gebracht uit een huishouden. Bij beide groepen is gekeken of ze besmet zijn met kattenaids. Dit is een virus zorgt er voor dat het immuunsysteem van katten niet meer goed werkt.

	besmet	niet besmet	totaal
Gevonden	28	438	466
Gebracht	10	247	257
Totaal			723

Kun je op basis van bovenstaande gegevens volgende conclusie trekken?
De kans op kattenaids bij gevonden katten is groter dan bij gebrachte katten.
Neem als onbetrouwbaarheid 1%.

Bonusvraag
We gaan uit van twee steekproeven uit twee verschillende populaties katten.
De eerste groep zijn zwerfkatten die op straat zijn gevonden. De tweede groep zijn katten die naar een dierenasiel zijn gebracht uit een huishouden. Bij beide groepen is gekeken of ze besmet zijn met kattenaids. Dit is een virus zorgt er voor dat het immuunsysteem van katten niet meer goed werkt.

	besmet	niet besmet	totaal
Gevonden	28	438	466
Gebracht	4	n	4 + n
Totaal			470 + n

Neem als onbetrouwbaarheid 1%
Voor welke waarden van n kunnen we de volgende conclusie trekken bij de gegeven data:
De kans op kattenaids bij gevonden katten is even groot als bij gebrachte katten.

Tip algemeen
Het aantal katten met kattenaids in de steekproef is binomiaal verdeeld voor beide populaties.
Omzetten naar een normale verdeling.
Stel een hypothesetoets op waarbij de verwachtingswaarde van de populatiefractie van de eerste populatie gelijk is aan de verwachtingswaarde van de populatiefractie van de tweede populatie, dus waarbij je uitgaat van het verschil van de populatiefracties met een verwachtingswaarde 0.
Bereken de overschrijdingskans van het verschil van de steekproeffracties.
Let er bij je conclusie op of het een éénzijdige of tweezijdige toets betreft.

Hulp algemeen
Om de twee steekproeven te vergelijken, gaan we ze omzetten naar een normale verdeling.
De verwachtingswaarde is gelijk aan de $populatiefractie$
De standaardafwijking is gelijk aan $\sqrt{\dfrac{populatiefractie \cdot\ 1 - populatiefractie}{n}}$
Verder hebben we de volgende gegevens
Populatiefractie 1 = q_1
Populatiefractie 2 = q_2
Steekproefomvang 1= n_1 , steekproeffractie 1 = P_1
Steekproefomvang 2= n_2 , steekproeffractie 2 = P_2

P_1 is bij benadering normaal verdeeld met verwachtingswaarde q_1 en standaardafwijking s_1 $\quad s_1 = \sqrt{\dfrac{q_1 \cdot\ 1 - q_1}{n_1}}$

P_2 is bij benadering normaal verdeeld met verwachtingswaarde q_2 en standaardafwijking s_2 $\quad s_2 = \sqrt{\dfrac{q_2 \cdot\ 1 - q_2}{n_2}}$

$P_1 - P_2$ is dan normaal verdeeld met verwachtingswaarde $q_1 - q_2$ en standaardafwijking $\sqrt{\dfrac{q_1 \cdot\ 1 - q_1}{n_1} + \dfrac{q_2\ \ 1 - q_2}{n_2}}$

Helaas zijn q_1 en q_2 onbekend. We weten alleen P_1 en P_2.

$P_1 - P_2$ is bij benadering normaal verdeeld met verwachtingswaarde $P_1 - P_2$ en standaardfout $\sqrt{\dfrac{P_1 \cdot\ 1 - P_1}{n_1} + \dfrac{P_2\ \ 1 - P_2}{n_2}}$

We krijgen dan het gestandaardiseerde verschil in de steekproeffracties Z met $\quad Z = \dfrac{P_1 - P_2\ -\ q_1 - q_2}{\sqrt{\dfrac{P_1 \cdot\ 1 - P_1}{n_1} + \dfrac{P_2\ \ 1 - P_2}{n_2}}}$

Z is bij benadering standaard normaal verdeeld en kan als toetsingsgrootheid worden gebruikt.

Als $Z > 0$ dan is de overschrijdingskans $P\ \ Z > z$.
Als $Z < 0$ dan is de overschrijdingskans $P\ \ Z < z$.
Bij een tweezijdige toets moet de overschrijdingskans worden vergeleken met $\frac{1}{2}\alpha$, en bij een eenzijdige toets met α .

Als we willen toetsen of twee populatiefracties gelijk aan elkaar zijn, dan geldt onder de nulhypothese dat $q_1 - q_2 = 0$

Antwoord versie 1

$$Z=\frac{\left(\frac{28}{466}-\frac{4}{257}\right)-0}{\sqrt{\frac{\frac{28}{466}\cdot\frac{438}{466}}{466}+\frac{\frac{4}{257}\cdot\frac{253}{257}}{257}}}=\frac{0,0445}{0,01346}=3,31 \quad \text{[moet zijn } \frac{0,0445}{0,01345}\text{]}$$

$P\ \ Z>3,31\ \ =0,000466$; $\quad 0,000466<0,005$; $\quad$ We verwerpen H_0.

We geloven dat de kans op kattenaids bij gevonden katten niet even groot is als bij gebrachte katten.

Antwoord versie 2

$$Z=\frac{\left(\frac{28}{466}-\frac{10}{257}\right)-0}{\sqrt{\frac{\frac{28}{466}\cdot\frac{438}{466}}{466}+\frac{\frac{10}{257}\cdot\frac{247}{257}}{257}}}=\frac{0,0212}{0,01633}=1,30$$

$P\ \ Z>1,30\ \ =0,0968$; $\quad 0,0968>0,005$; $\quad$ We verwerpen H_0 niet.

We geloven dat de kans op kattenaids bij beide populaties even groot is.

Antwoord versie 3

$$Z=\frac{\left(\frac{28}{466}-\frac{4}{257}\right)-0}{\sqrt{\frac{\frac{28}{466}\cdot\frac{438}{466}}{466}+\frac{\frac{4}{257}\cdot\frac{253}{257}}{257}}}=\frac{0,0445}{0,01346}=3,31 \quad \text{[moet zijn } \frac{0,0445}{0,01345}\text{]}$$

$P\ \ Z>3,31\ \ =0,000466$; $\quad 0,000466<0,01$; $\quad$ We verwerpen H_0.

We geloven dat de kans op kattenaids bij gevonden katten groter is dan bij gebrachte katten.

Antwoord versie 4

$$Z=\frac{\left(\frac{28}{466}-\frac{10}{257}\right)-0}{\sqrt{\frac{\frac{28}{466}\cdot\frac{438}{466}}{466}+\frac{\frac{10}{257}\cdot\frac{247}{257}}{257}}}=\frac{0,0212}{0,01633}=1,30$$

$P\ \ Z>1,30\ \ =0,0968$; $\quad 0,0968>0,01$; $\quad$ We verwerpen H_0 niet.

We geloven dat de kans op kattenaids bij gevonden katten niet groter is dan bij gebrachte katten.

Antwoord bonusvraag

$$Z=\frac{\left(\frac{28}{466}-\frac{4}{4+n}\right)-0}{\sqrt{\frac{\frac{28}{466}\cdot\frac{438}{466}}{466}+\frac{\frac{4}{4+n}\cdot\frac{n}{4+n}}{4+n}}}=\frac{0,060-\frac{4}{4+n}}{\sqrt{0,000121+\frac{4n}{4+n}^{3}}}$$

Voor welke *z* geldt: $P\ \ Z>z\ \ =0,005$ => 2.576

Voor $n\le 186$ geldt $Z<2,576$

Voor $n>186$ geldt $Z>2,576$

Voor welke Z geldt: $P\ \ Z<z\ \ =0,005$ => -2.576

Voor $n<4$ geldt $Z<-2,576$

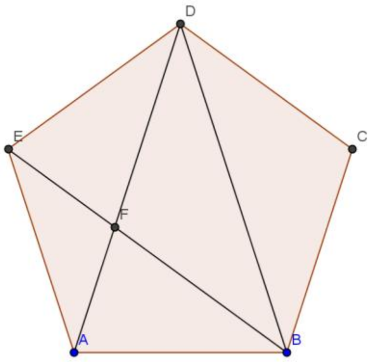
Voor $n\ge 4$ geldt $Z>-2,576$

Voor alle waarden van n van 4 t/m 186 kunnen we de conclusie trekken:

De kans op kattenaids bij gevonden katten is even groot als bij gebrachte katten.

Versie 1

In deze workshop kijken we naar de regelmatige vijfhoek.



In een regelmatige vijfhoek geldt o.a. dat $\angle DAB$ =72^0 en de diagonalen snijden elkaar volgens de Gulden Snede. Dit houdt in dat geldt dat DF : AF = AD : DF met andere woorden:
grootste deel van lijnstuk staat tot kleinste deel van het lijnstuk is gelijk aan gehele lijnstuk staat tot grootste deel van lijnstuk.
Hieruit volgt dat in bovenstaande regelmatige vijfhoek geldt dat verhouding DF : AF = φ : 1 (= $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$: 1)

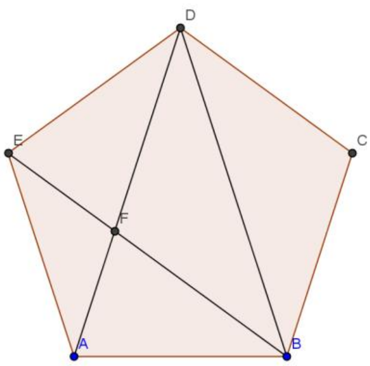
1. Bewijs, uitgaande van de regelmatige vijfhoek ABCDE, dat $\angle DAB$ =72^0
en dat de verhouding DF : AF = φ : 1 (= $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$: 1)

Tip versie 1

Geef aan hoe groot alle getekende hoeken zijn in de regelmatige vijfhoek en zoek gelijkvormige driehoeken

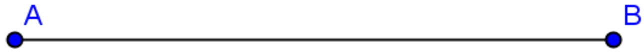
Versie 2

In deze workshop kijken we naar de regelmatige vijfhoek.



In een regelmatige vijfhoek geldt o.a. dat $\angle DAB$ =72^0 en de diagonalen snijden elkaar volgens de Gulden Snede. Dit houdt in dat geldt dat DF : AF = AD : DF . Met andere woorden:
het grootste deel van het lijnstuk staat tot kleinste deel van het lijnstuk is gelijk aan gehele lijnstuk staat tot grootste deel van lijnstuk.
Hieruit volgt dat in bovenstaande regelmatige vijfhoek geldt dat verhouding DF : AF = φ : 1 (= $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$: 1)

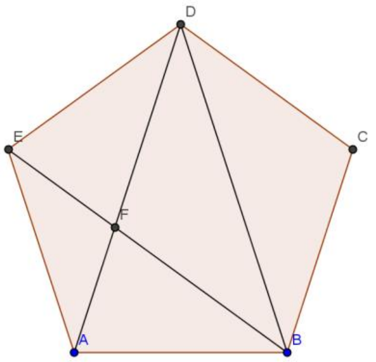
2. Construeer met passer en liniaal de verdeling van een lijnstuk volgens de Gulden Snede.



Tip versie 2

Construeer eerst een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 2 en 1. Vervolgens $\sqrt{5}-1$
Verdeel rechthoekzijde met lengte 2 in twee stukken: $\sqrt{5}-1$ en $2-(\sqrt{5}-1)$

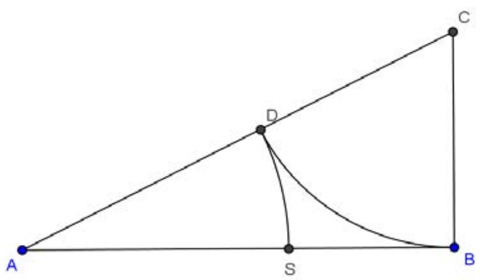
Versie 3
In deze workshop kijken we naar de regelmatige vijfhoek.



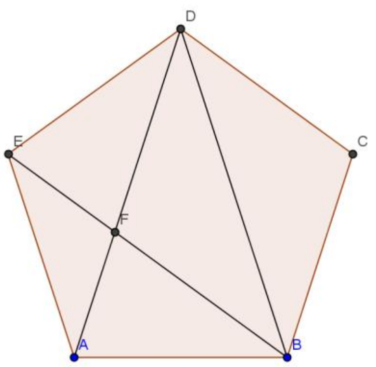
In een regelmatige vijfhoek geldt o.a. dat $\angle DAB = 72^0$ en de diagonalen snijden elkaar volgens de Gulden Snede. Dit houdt in dat geldt dat DF : AF = AD : DF met andere woorden:
grootste deel van lijnstuk staat tot kleinste deel van het lijnstuk is gelijk aan gehele lijnstuk staat tot grootste deel van lijnstuk.
Hieruit volgt dat in bovenstaande regelmatige vijfhoek geldt dat verhouding DF : AF = φ : 1 (= $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$: 1)

3. Construeer met passer en liniaal een regelmatige vijfhoek.

Tip versie 3
Construeer eerst een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 2 en 1.
Bestudeer vervolgens onderstaande constructie.

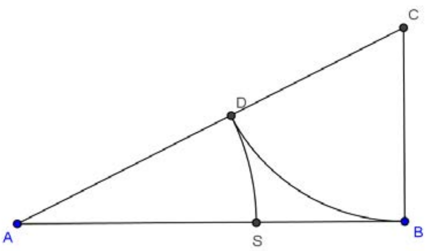


Versie 4
In deze workshop kijken we naar de regelmatige vijfhoek.

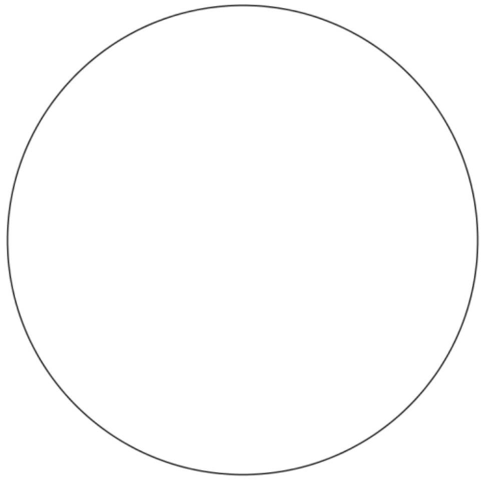


Gegeven de regelmatige vijfhoek ABCDE.
In een regelmatige vijfhoek geldt o.a. dat $\angle DAB = 72^0$ en de diagonalen snijden elkaar volgens de Gulden Snede. Dit houdt in dat geldt dat DF : AF = AD : DF met andere woorden:
grootste deel van lijnstuk staat tot kleinste deel van het lijnstuk is gelijk aan gehele lijnstuk staat tot grootste deel van lijnstuk.
Hieruit volgt dat in bovenstaande regelmatige vijfhoek geldt dat verhouding DF : AF = φ : 1 (= $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$: 1)

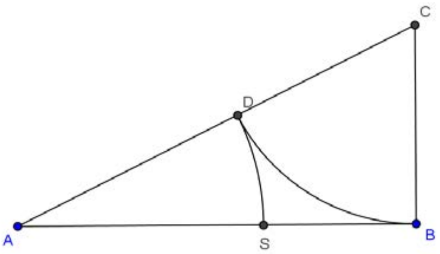
Een lijnstuk kun je verdelen volgens de Gulden Snede door bijvoorbeeld de volgende constructie:



4. Construeer met passer en liniaal een regelmatige vijfhoek in een gegeven cirkel.



Tip versie 4

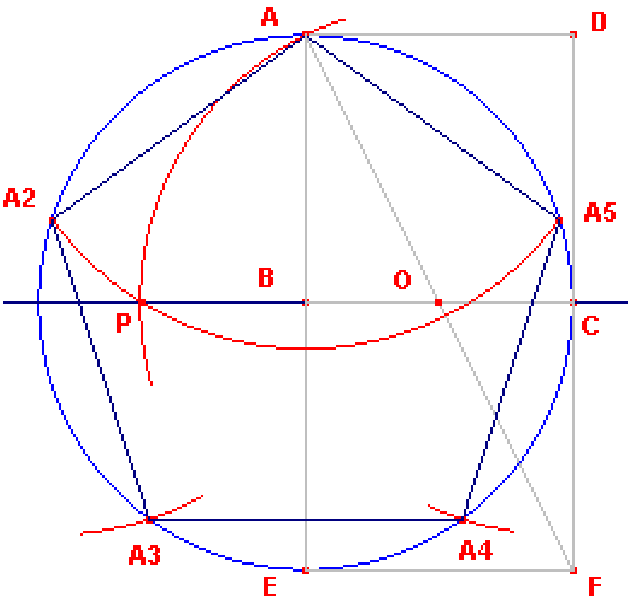


Trek nu cirkel (S,AS) en cirkel (B,AS) om hoeken van 72^0 te krijgen.

Bonusvraag

Hieronder zie je een constructie van een regelmatige vijfhoek in een gegeven cirkel.

B Analyseer deze constructie en bewijs dat deze constructie juist is.



Antwoord versie 1

In de regelmatige vijfhoek zijn de hoeken van de vijfhoek 108^o. Bewijs.

De drie hoeken bij hoekpunt B zijn alle drie 36^o. Bewijs. (bekijk bijv. gelijkbenige driehoek BAE die congruent is met Δ DCB; gebruik AE is evenwijdig aan BD)

Of teken in Δ ABD middelpunt M van de cirkel om de vijfhoek

en de stralen AM, BM en DM.

ΔABD, ΔAMB, ΔAMD, ΔBMD zijn alle gelijkbenig.

Nu is $\angle AMB = {}^1/_5 \cdot 360^o = 72^o$, dus $\angle AMD = \angle BMD = 144^o$.

Dan is $\angle AMC = 18^o$ (ook $\angle BMC = 18^o$), dus $\angle ADB = 36^o$,

dus $\angle DBF = 36^o$ (ΔDBF is gb).

$\angle DBA = 72^o$ (ΔABD is gb), dus $\angle ABF = \angle DBA - \angle DBF = 72^o - 36^o = 36^o$.

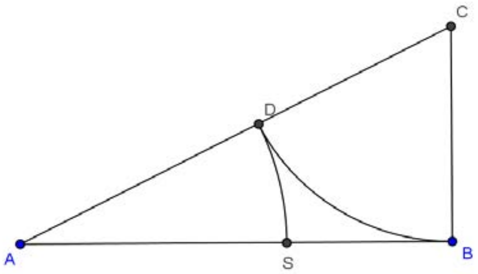
Tenslotte is ook $\angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = 108^o - 72^o = 36^o$.

Δ ABF gelijkvormig met Δ BDA (bewijs)

Verhouding van zijden met AB = d en AF = 1 geeft $\dfrac{d+1}{d} = \dfrac{d}{1}$

Antwoord versie 2

Bestudeer de volgende constructie:



AC = $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$; dus AD = AS = √5 – 1 ; BS = 2 – (√5 – 1) = 3 – √5

AS : BS = $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2-(\sqrt{5}-1)} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$

Antwoord versie 3

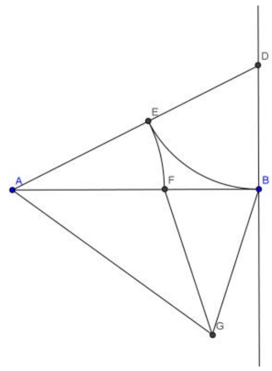
Uitleg figuur 2:

AB is een diagonaal van de vijfhoek.

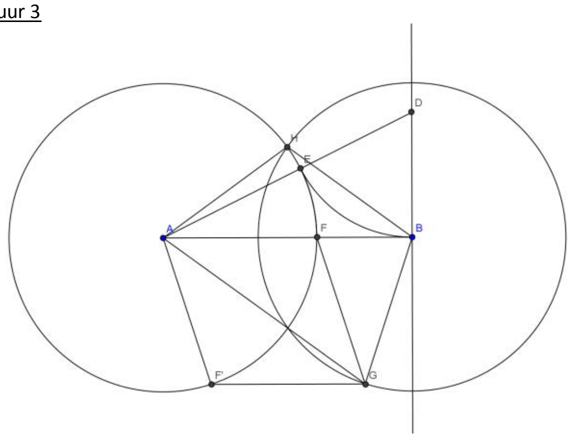
Nu moet ΔABG een gulden driehoek worden,

zorg dat BG = FG = FA via omcirkelen van FA.

Figuur 2



Figuur 3



Uitleg figuur 3:

BG is een zijde van de vijfhoek.

Omcirkelen vanuit A, B en G geeft

de hoekpunten H en F'.

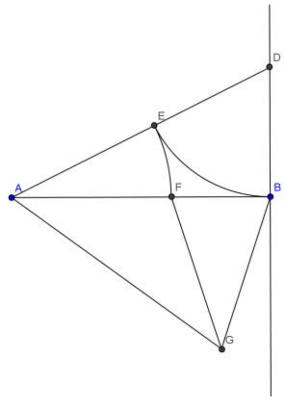
Of start met het middelpunt van een cirkel en gebruik de middelpuntshoeken van 72^0.

Antwoord versie 4

Uitleg figuur 2:

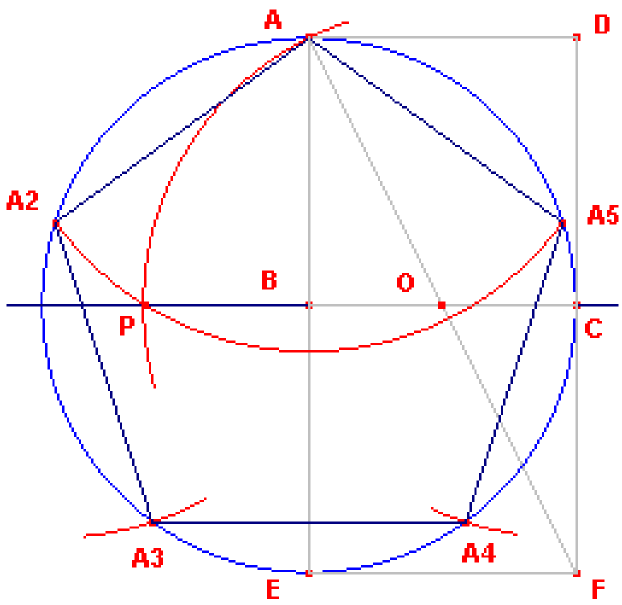
AB is een diagonaal van de vijfhoek.
Nu moet ΔABG een gulden driehoek worden,
zorg dat BG = FG = FA via omcirkelen van FA.

Figuur 2



Start met het middelpunt van de cirkel en gebruik de hoek van 72^0 om vijf middelpuntshoeken van 72^0 te tekenen.

Antwoord Bonusvraag

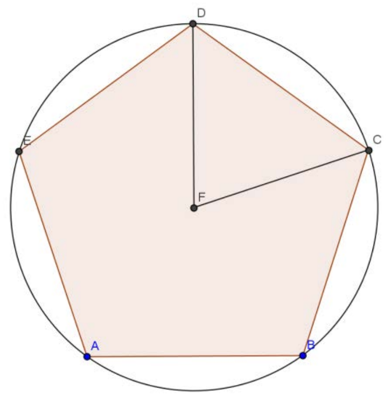


Start met een 1x2 rechthoek ADFE die is aangepast aan de gegeven cirkel.
O is snijpunt van AF met BC.

Maak cirkel met middelpunt O en straal $OA = \frac{1}{2}\sqrt{5}$;
snijpunt met verlengde CB is P.
Maak vervolgens cirkel met middelpunt A en

straal $AP = \sqrt{(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2})^2 + 1^2} = \sqrt{2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}}$ (zie ΔAPB).

Deze AP is de lengte van de zijde van de regelmatige vijfhoek als de straal van de cirkel 1 is.



Gebruik cosinus-regel in ΔFCD in de cirkel hiernaast met straal 1:

$$DC^2 = FD^2 + FC^2 - 2.FD.FC.\cos(72^0)$$

en $\cos(72^0) = 2.\cos^2(36^0) - 1$

en $\cos(36^0) = \dfrac{\frac{1}{2}\,diagonaal}{zijde} (= \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4})$

(zie ΔBCD in figuur 1 en de gulden verhouding van de regelmatige vijfhoek);

deze zaken combineren leidt tot $DC = \sqrt{2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}}$

Via

$$DC^2 = FD^2 + FC^2 - 2.FD.FC.\cos(72^0) =$$

$$DC^2 = 2 - 2.(2.\cos^2(36^0) - 1)$$

$$DC^2 = 4 - 4.\cos^2(36^0)$$

$$DC^2 = 4 - 4.(\tfrac{1}{4}\sqrt{5} + \tfrac{1}{4})^2$$

$$DC^2 = 2\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

(AP zoals hierboven geconstrueerd is gelijk aan DC)

Zie ook http://www.pandd.demon.nl/sectioaurea.htm#a3 en http://nl.wikipedia.org/wiki/Vijfhoek

Versie 1

Een stapel bollen van acht lagen

Een aantal even grote bollen wordt gestapeld door de onderste laag in een vierkant van n bij n bollen te leggen. Vervolgens wordt de volgende laag in de $(n-1)^2$ holletjes die tussen de bollen zitten gelegd, enzovoorts.

1. Hoeveel bollen heb je nodig om een stapel met acht lagen te maken?

De formule van het aantal bollen in n lagen is een derdegraads polynoom in n: $a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$

2. Bereken de coëfficiënten a, b, c en d van een van deze stapeling.

Tip versie 1
1. de onderste laag heeft 8x8 = 64 bollen
2. het verschil tussen T(n), het aantal van n lagen, en T(n – 1) is n^2

Hulp versie 1
1. $8^2 + 7^2 + 6^2 + \ldots + 1^2 =$
2. $a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d - (a \cdot (n - 1)^3 + b \cdot (n-1)^2 + c \cdot n + d)$; haakjes uitwerken; antwoord moet $1 \cdot n^2$ zijn

Versie 2 = Versie 4

Een stapel bollen van zeven lagen

Een aantal even grote bollen wordt gestapeld door de onderste laag in een gelijkzijdige driehoek te leggen. Het aantal bollen in de onderste laag is bijvoorbeeld $n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 3 + 2 + 1$.
Het totaal aantal bollen in deze laag wordt het n-de driehoeksgetal genoemd.
In de $\frac{1}{2}(n-1) \cdot n$ holletjes die tussen de bollen zitten wordt een volgende laag bollen gelegd, enzovoorts.
Elke laag heeft een aantal bollen dat gelijk is aan een driehoeksgetal.

1. Toon aan dat de formule voor het n-de driehoeksgetal gelijk is aan $\frac{1}{2}n \cdot (n+1)$.

2. Hoeveel bollen heb je nodig om een stapel met zeven lagen te maken?

De formule van het aantal bollen in n lagen is een derdegraads polynoom in n: $a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$

3. Bereken de coëfficiënten a, b, c en d van een van deze stapeling.

Tip versie 2
1. tel achtereenvolgens twee even grote driehoeksgetallen handig bij elkaar op; kijk naar de antwoorden
2. de onderste laag heeft $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8$ bollen
3. het verschil tussen D(n), het aantal van n lagen, en D(n – 1) is $\frac{1}{2}n \cdot (n+1)$

Hulp versie 2
1. b.v.
$$\begin{array}{l} 4+3+2+1+ \\ \underline{1+2+3+4\quad +} \\ 5+5+5+5 = 4 \cdot (4+1) \end{array}$$
2. $28 + 21 + 15 + \ldots + 1 =$
3. $a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d - (a \cdot (n - 1)^3 + b \cdot (n-1)^2 + c \cdot n + d)$; haakjes uitwerken; antwoord moet $\frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{2} \cdot n$ zijn

Versie 3

Een aantal even grote bollen wordt gestapeld door de onderste laag in een vierkant van *n* bij *n* bollen te leggen. Vervolgens wordt de volgende laag in de $(n\text{-}1)^2$ holletjes die tussen de bollen zitten gelegd, enzovoorts.

Een stapel bolle van acht lagen

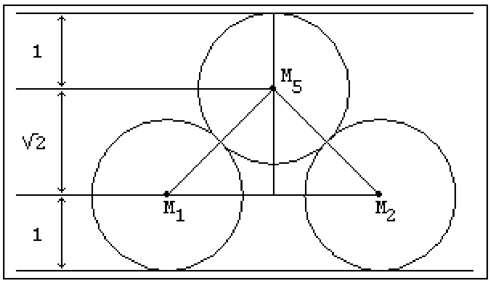
1. Hoeveel bollen heb je nodig om een stapel met acht lagen te maken?

Neem de straal van een bol gelijk aan 1 (dm).

2. Maak een formule van de exacte hoogte van *n* lagen van deze stapeling.

Tip versie 3
1. de onderste laag heeft 8x8 = 64 bollen
2. teken een verticale dwarsdoorsnede over de diagonaal van een stapel van twee of drie lagen; maak eerst wat stapels met tennisballen om te begrijpen hoe die dwarsdoorsnede er uit ziet

Hulp versie 3
1. $8^2 + 7^2 + \ldots + 1 =$
2. Hiernaast zie je een tekening van een schuine dwarsdoorsnede van een stapeling met een vierkante grondlaag. Alle lagen zitten op de zelfde manier in elkaar verzonken.



Bonusvragen

Een aantal even grote bollen wordt gestapeld door de onderste laag in een gelijkzijdige driehoek te leggen.

Een stapel bollen van zeven lagen

Neem de straal van een bol gelijk aan 1 (dm).

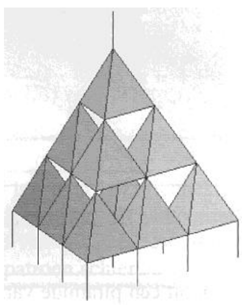
1. Maak een formule van de exacte hoogte van *n* lagen van deze stapeling.

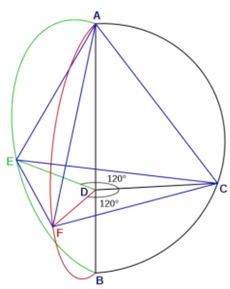
Een tennisbal heeft een diameter van 6,5 cm.

2. Hoeveel tennis ballen heb je nodig om een stapel te maken die net zo hoog is als jij lang

Tip Bonusvragen
1. Beschouw de posities van de middelpunten van de bollen.
2. diameter is 6,5 cm, dus de straal is …

Hulp Bonusvragen
1. De middelpunten van de bollen zitten op de hoekpunten van tetraëders met zijden 2 (*r*) ; bereken de hoogte van een tetraëder m.b.v. een verticale doorsnede door een hoekpunt en de top
2. Als je b.v. 180 cm lang bent, dan moet je de ongelijkheid $2r\left(\frac{\sqrt{6}}{3}(n-1)+1\right) \geq 180$ oplossen





Tweede bonusvraag

gestapelde kanonskogels met een rechthoekige bodem

Een aantal even grote bollen wordt gestapeld door de onderste laag in een rechthoek te leggen.

Neem aan dat er een derdegraads verband is tussen n en x(n), (bij een veronderstelling van een tweedegraads verband loop je vast), dan krijg je met $x(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$

B2 Bereken a, b c en d in het geval de rechthoeken afmeting n bij n+4 hebben.

Tip B2
het verschil tussen R(n), het aantal van n lagen, en R(n – 1) is $n\cdot(n+4)$

Hulp B2
$a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d - (a \cdot (n - 1)^3 + b \cdot (n-1)^2 + c \cdot (n-1) + d)$; haakjes uitwerken; antwoord moet $n^2+4\cdot n$ zijn

Antwoorden versie 1
1. 204
2. $^1/_3\, n^3 + ½\, n^2 + {}^1/_6\, n$

Antwoorden versie 2 = versie 4
1. via volledige inductie: het n-de driehoeksgetal heeft formule $½n(n + 1)$;
   n=1 geeft het eerste driehoeksgetal 1, dat klopt met $½\cdot1\cdot2 = 1$
   voor het (n+1)-ste driehoeksgetal komt er nog een rij van n+1 bollen bij;
   $½n(n + 1) + (n + 1) = ½\, n^2 + ½n + n + 1 = ½n^2 + 1½n + 1 = ½(n^2+3n+2) = ½(n+1)\cdot(n+2)$;
   dit is dezelfde formule voor het (n+1)-ste driehoeksgetal
2. 84
3. $^1/_6\, n^3 + ½\, n^2 + {}^1/_3\, n$

Antwoorden versie 3
1. 204
2. (n-1)· r √2 + 2r; elke volgende laag wordt r√2 hoger

Antwoord B2
$a\cdot n^3+b\cdot n^2+c\cdot n + d - (a\cdot(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + b\cdot(n^2 - 2n + 1) + c\cdot(n - 1) + d) = n\cdot(n + 4)$
$3a\cdot n^2 - 3a\cdot n + a \quad + 2b\cdot n - b \quad + c = \quad n^2 + 4n$ geeft
$3a\cdot n^2 + (-3a+2b)\cdot n + (a-b+c) = 1\cdot n^2 + 4\cdot n$ als $3a = 1$ en $-3a+2b = 4$ en $a-b+c=0$;
$a = {}^1/_3$, $b = 2½$, $c=2\,{}^1/_6$

//dit klopt in de tabel met n=1 geeft 1·5=5; n=2 geeft 5+2·6=5+12=17; n=3 geeft 17+3·7=17+21=38; enz.

Speeddate vragen voor zebraboekje 20 Babylonische vierkantsvergelijkingen NWD 19 – 1,2 februari 2013

Versie 1

In de huidige wiskundemethodes worden grofweg twee methodes gebruikt om een vierkantsvergelijking op te lossen. De ene is met behulp van ontbinden in factoren en de andere is met behulp van de abc-formule. Bij het ontbinden in factoren zoeken we steeds twee getallen waarvan de som en het product bekend is.
De Babyloniërs maakten ook gebruik van een methode die lijkt op de som/product methode bij het ontbinden in factoren. Zij maakten gebruik van de eigenschappen van een bijzonder product: $x-d \cdot x+d = x^2 - d^2$.
Zij hadden het volgende vraagstuk: Van een rechthoek is het volgende bekend: de oppervlakte is gelijk aan 65 en de som van de lengte en de breedte is gelijk aan 18. Hoe groot zijn de lengte en de breedte?
Neem nu: $x = 9-d$ en $y = 9+d$
Dan volgt daaruit $x \cdot y = 81 - d^2$
Nu wordt de vergelijking met de volgende stappen opgelost:
$81 - d^2 = 65$, $d^2 = 16$, $d = \sqrt{16} = 4$
Dan komen we op $x = 9-4 = 5$ en $y = 9+4 = 13$.

1. Los op deze manier op: x · y = 741, x + y = 58
2. Welke kwadratische vergelijking hoort bij: x · y = 741, x + y = 58?
3. Los op: $x \cdot y = 864$, $2x + 2y = 120$
4. Los de vergelijking $x^2 - 8x + 3 = 0$ op de Babylonische manier op.

Tip versie 1

1. Neem $x = 29-d$ en $y = 29+d$
2. Substitueer $y = 58 - x$ in $x \cdot y = 741$
3. $x + y = 60$, neem nu $x = 30-d$ en $y = 30+d$
4. $3 = x \cdot (8-x) = x \cdot y$ en $x + y = 8$

Hulp versie 1

1. $(29 - d)(29 + d) = 741$; haakjes uitwerken
2. $x \cdot (58 - x) = 741$; haakjes uitwerken
3. (30 – d)(30 + d) = 864; haakjes uitwerken
4. $x = 4 - d$ en $y = 4 + d$ geeft $(4-d)(4+d) = 3$; haakjes uitwerken

Versie 2

In de huidige wiskundemethodes worden grofweg twee methodes gebruikt om een vierkantsvergelijking op te lossen. De ene is met behulp van ontbinden in factoren en de andere is met behulp van de abc-formule. Bij het ontbinden in factoren zoeken we steeds twee getallen waarvan de som en het product bekend is.
De Babyloniërs maakten ook gebruik van een methode die lijkt op de som/product methode bij het ontbinden in factoren. Zij maakten gebruik van de eigenschappen van een bijzonder product: $x-d \cdot x+d = x^2 - d^2$.
Zij hadden het volgende vraagstuk: Van een rechthoek is het volgende bekend: de oppervlakte is gelijk aan 65 en de som van de lengte en de breedte is gelijk aan 18. Hoe groot zijn de lengte en de breedte?
Neem nu: $x = 9-d$ en $y = 9+d$
Dan volgt daaruit $x \cdot y = 81 - d^2$
Nu wordt de vergelijking met de volgende stappen opgelost:
$81 - d^2 = 65$, $d^2 = 16$, $d = \sqrt{16} = 4$
Dan komen we op $x = 9-4 = 5$ en $y = 9+4 = 13$.

De Babylonische wiskunde kende ook sommen waarbij het verschil van twee getallen en hun product bekend is. Bijvoorbeeld het verschil is 10 en het product is 459.
Ze losten het probleem op door $x = m-5$ en $y = m+5$ te nemen. Dan is het verschil $y - x$ gelijk aan 10.

1. Los op de Babylonische manier op: $x \cdot y = 459$, $y - x = 10$
2. Welke kwadratische vergelijking hoort bij: $x \cdot y = 459$, $y - x = 10$?
3. Los op: $2x \cdot 2y = 780$, $y - x = 2$
4. Los de vergelijking $x^2 + 20x - 1064 = 0$ op de Babylonische manier op?

Tip versie 2

1. Neem $x = m - 5$ en $y = m + 5$
2. Substitueer $y = 10 + x$ in $x \cdot y = 459$
3. $x \cdot y = 195$, neem nu $x = m - 1$ en $y = m + 1$
4. $x \cdot (x + 20) = x \cdot y = 1056$ en $y - x = 20$

Hulp versie 2

1. $(m - 5)(m + 5) = 459$; haakjes uitwerken
2. $x \cdot (x+10) = 459$
3. $(m - 1)(m + 1) = 195$; haakjes uitwerken
4. $x = m - 10$ en $y = m + 10$ geeft $(m - 10)(m + 10) = 1056$; haakjes uitwerken

Versie 3

In de huidige wiskundemethodes worden grofweg twee methodes gebruikt om een vierkantsvergelijking op te lossen. De ene is met behulp van ontbinden in factoren en de andere is met behulp van de abc-formule. Bij het ontbinden in factoren zoeken we steeds twee getallen waarvan de som en het product bekend is.
De Babyloniërs maakten ook gebruik van een methode die lijkt op de som/product methode bij het ontbinden in factoren. Zij maakten gebruik van de eigenschappen van een bijzonder product: $x - d \ \cdot \ x + d \ = x^2 - d^2$.
Zij hadden het volgende vraagstuk: Van een rechthoek is het volgende bekend: de oppervlakte is gelijk aan 65 en de som van de lengte en de breedte is gelijk aan 18. Hoe groot zijn de lengte en de breedte?
Neem nu: $x = 9 - d$ en $y = 9 + d$
Dan volgt daaruit $x \cdot y = 81 - d^2$
Nu wordt de vergelijking met de volgende stappen opgelost:
$81 - d^2 = 65$, $d^2 = 16$, $d = \sqrt{16} = 4$
Dan komen we op $x = 9 - 4 = 5$ en $y = 9 + 4 = 13$.

Een manier om een ander type opgaven op te lossen gaat als volgt:
Tel bij de oppervlakte van een rechthoek het (positieve) verschil van lengte en breedte op, de uitkomst is 183. De lengte en breedte zijn opgeteld 27.
Het probleem wordt opgelost door als eerste de twee vergelijkingen op te tellen:
$x \cdot y + x - y = 183$
$x + y = 27$
Je krijgt dan $xy + 2x = 210$
Met x buiten haakjes kun je het probleem nu herleiden tot het standaardprobleem van gegeven product en som. Neem $x + (y + 2) = 27 + 2 = 29$ en $x = 14\frac{1}{2} - d$ en $y + 2 = 14\frac{1}{2} + d$.

1. Los verder op de Babylonische manier op: $x \cdot y + x - y = 183$, $x + y = 27$
2. Welke kwadratische vergelijking hoort bij: $x \cdot y + x - y = 183$, $x + y = 27$
3. Los op de Babylonische manier op: $x \cdot y + x - y = 169$, $x + y = 26$

Tip versie 3

1. Het is nu product van x en y+2 en de som van x en y+2 geworden
2. Substitueer $y = 27 - x$ in $x \cdot y + x - y = 183$ of in $x \cdot (y + 2) = 210$
3. $x \ \ y + 2 \ = 195$

Hulp versie 3

1. $(14\frac{1}{2} - d)(14\frac{1}{2} + d) = 210$; haakjes uitwerken
2. $x \cdot (29 - x) = 210$
3. $x + (y+2) = 28$; $x = 14 - d$ en $y+2 = 14 - d$ geeft $(14 - d)(14 = d) = 195$; haakjes uitwerken

Versie 4

In de huidige wiskundemethodes worden grofweg twee methodes gebruikt om een vierkantsvergelijking op te lossen. De ene is met behulp van ontbinden in factoren en de andere is met behulp van de abc-formule. Bij het ontbinden in factoren zoeken we steeds twee getallen waarvan de som en het product bekend is.

De Babyloniërs maakten ook gebruik van een methode die lijkt op de som/product methode bij het ontbinden in factoren. Zij maakten gebruik van de eigenschappen van een bijzonder product: $x-d \cdot x+d = x^2 - d^2$.

Zij hadden het volgende vraagstuk: Van een rechthoek is het volgende bekend: de oppervlakte is gelijk aan 65 en de som van de lengte en de breedte is gelijk aan 18. Hoe groot zijn de lengte en de breedte?

Neem nu: $x = 9 - d$ en $y = 9 + d$

Dan volgt daaruit $x \cdot y = 81 - d^2$

Nu wordt de vergelijking met de volgende stappen opgelost:

$81 - d^2 = 65$, $d^2 = 16$, $d = \sqrt{16} = 4$

Dan komen we op $x = 9 - 4 = 5$ en $y = 9 + 4 = 13$.

De Babylonische wiskunde kende ook sommen waarbij het verschil van twee getallen en hun product bekend is. Bijvoorbeeld het verschil is 10 en het product is 459.

Ze losten het probleem op door $x = m - 5$ en $y = m + 5$ te nemen. Dan is het verschil $y - x$ gelijk aan 10.

1. Los op de Babylonische manier op: $x \cdot y = 459, y - x = 10$

De Babyloniërs konden ook de volgende problemen oplossen: Zeven keer de zijde van een vierkant opgeteld bij elf keer zijn oppervlakte is gelijk aan 6,25.

Je krijgt dan de volgende vergelijking: $11x^2 + 7x = 6\frac{1}{4}$

De Babyloniërs vermenigvuldigen de hele vergelijking met 11 en nemen vervolgens $y = 11x$

Dan krijgen we $11x^{2} + 7(11x) = 68\frac{3}{4}$

Met $y = 11x$ krijgen we dan $y^2 + 7y = 68\frac{3}{4}$

2. Los op de Babylonische manier op: $y^2 + 7y = 68\frac{3}{4}$
3. Los op dezelfde manier op: $5x^2 + 18x = 215$

Tip versie 4

1. Neem x = $m - 5$ en $y = m + 5$
2. $z=y+7$ geeft $y \cdot z$ = 68½
3. $y=5x$ en z=y+18

Hulp versie 4

1. $(m - 5)(m + 5) = 459$; haakjes uitwerken
2. neem $y = m - 3½$ en $z = m + 3½$, dus $z - y = 7$
3. neem $y = m - 9$ en $z = m + 9$, dus $z - y = 18$

Bonus vragen

1. Geef op de Babylonische manier de algemene oplossing voor: $ax^2 + bx = c$
2. Waar lijkt de algemene oplossing uit opgave 1. op? Wat is er anders en hoe komt dat?

Tip Bonusvragen

1. $y=ax$ en $z=y+b$
2. $ax^2 + bx + c = 0$ met abc - formule

Hulp Bonusvragen

1. $y = m - \frac{1}{2}b$ en $z = m + \frac{1}{2}b$, zodat $z - y = b$
2. De Babylonische methode begint met $ax^2 + bx = c$

Tweede Bonusvraag

Het Babylonische talstelsel werkt met machten van 60 (sexagesimaal stelsel) en het getal 0 bestond niet in hun systeem. Zo kunnen we het getal 7205 schrijven als $2\cdot 60^2+5$
De Maya Indianen hanteerden een positiestelsel met als basis het getal 20 (vigesimaal stelsel).
In computertaal wordt het binaire stelsel gebruikt.

Geef de volgende getallen in de verschillende stelsels op de juiste wijze weer:

decimaal	sexagesimaal	vigesimaal	binair
207	$3\cdot 60+27$ = 3 ‘ 27		
124		$6\cdot 20+4$ = 6 ‘ 4	
63		$3\cdot 20+3$ = 3 ‘ 3	
1076			$2^{10}+2^5+2^4+2^2$ = 10000110100
3245			$2^{11}+2^{10}+2^7+2^5+2^3+2^2+1$ = 110010101101
40762	$11\cdot 60^2+19\cdot 60+22$ = 11 “ 19 ‘ 22		

Antwoorden versie 1

1. x=19 en y=39
2. $x^2-58x+741=0$
3. x=24 en y=36
4. $x=4-\sqrt{13}$ en $y=4+\sqrt{13}$

Antwoorden versie 2

1. x=17 en y=27
2. $x^2+10x-495=0$
3. x=13 en y=15
4. x=24 en y=34

Antwoorden versie 3

1. x =14 en y+2=15, dus y=13; de andere oplossing is x=15 en y=12
2. $x^2-29x+210=0$
3. $x=13+\sqrt{26}$ en $y=11-\sqrt{26}$

Antwoorden versie 4

1. x=17 en y=27
2. $z=12\frac{1}{2}$, $y=5\frac{1}{2}$ en $x=\frac{1}{2}$
3. $z=43$, $y=25$ en $x=5$

Antwoorden Bonusvragen

1. $x=\dfrac{-\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{2}b)^2+ac}}{a}=\dfrac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$
2. Het is dezelfde formule als de abc-formule, alleen met +4*ac* i.p.v. –4*ac*;
Dat komt omdat de startvergelijking niet met = 0 begint maar met = *c*,
na op nul herleiden wordt die vergelijking dan ax² + bx – c = 0 ipv ax² + bx + c = 0

Antwoord Tweede bonusvraag

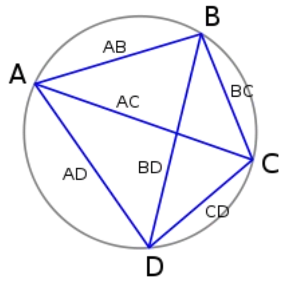
decimaal	sexagesimaal	vigesimaal	binair
207	$3\cdot 60+27$	$10\cdot 20+7$	$2^7+2^6+2^3+2^2+2+1$ = 11001111
124	$2\cdot 60+4$	$6\cdot 20+4$	$2^6+2^5+2^4+2^3+2^2$ = 1111100
63	$1\cdot 60+3$	$3\cdot 20+3$	$2^5+2^4+2^3+2^2+2+1$ = 111111
1076	$17\cdot 60+56$	$2\cdot 20^2+13\cdot 20+16$	$2^{10}+2^5+2^4+2^2$
3245	$54\cdot 60+5$	$8\cdot 20^2+2\cdot 20+5$	$2^{11}+2^{10}+2^7+2^5+2^3+2^2+1$
40762	$11\cdot 60^2+19\cdot 60+22$	$5\cdot 20^3+20^2+18\cdot 20+2$	$2^{15}+2^{12}+2^{11}+20^{10}+2^9+2^8+2^5+2^4+2^3+2$

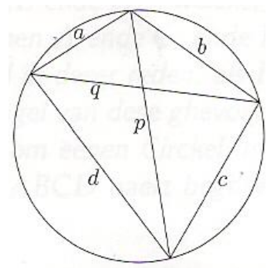
Speeddate vraag voor zebraboekje 31 Meester Ludolph's koordenvierhoek NWD 19 – 1,2 februari 2013

Versie 1 = Versie 4

In dit boekje gaat het om het construeren van een koordenvierhoek met vier gegeven lijnstukken.

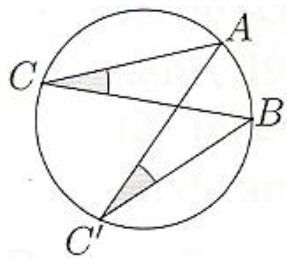
Een koordenvierhoek is een vierhoek waarvan de hoekpunten op een cirkel liggen.
De zijden van de vierhoek zijn dus koorden van die cirkel.



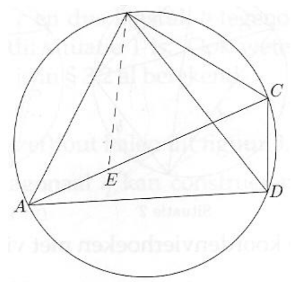


Voor het begrijpen van de antwoorden op deze vraag moet je *de stelling van Ptolemaeus* kennen. Die zegt:
" Bij een koordenvierhoek (ABCD) met zijden a (AB), b (BC), c (CD) en d (DA), en diagonalen p (BD) en q (AC) geldt:
$a \cdot c + b \cdot d = p \cdot q$ "
Zie figuur.

Om de stelling van Ptolemaeus te bewijzen moet je gebruik maken van gelijkvormigheid van driehoeken en *de stelling van de constante hoek*.
Die zegt: " Bij een koorde (AB) van een cirkel is de hoek (ACB) met als hoekpunt een willekeurig punt (C of C') op de cirkelboog (AB) aan een kant van de koorde (AB) en als benen de verbindingslijnstukken van dat punt met de uiteinden (A en B) van de koorde altijd even groot, constant dus. "
Zie figuur. Daarin geldt dus dat $\angle ACB = \angle AC'B$



De stelling van Ptolemaeus kan nu bewezen worden door hulplijnstuk BE te tekenen, waarvan punt E op AC ligt zodat $\angle ABE = \angle DBC$. Zie figuur.



1. Bewijs de stelling van Ptolemaeus.

Tip versie 1

Bewijs dat $\Delta ABE \sim \Delta DBC$ en dat $\Delta ABD \sim \Delta EBC$.

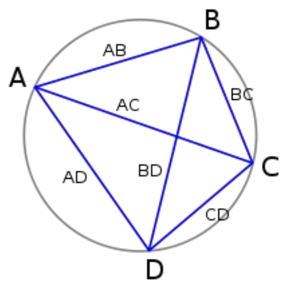
Hulp versie 1

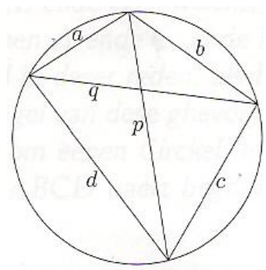
Uit de gelijkvormigheid van ΔABE en ΔDBC volgt dat AB : AE = DB : DC ;
Uit de gelijkvormigheid van ΔABD en ΔEBC volgt dat AD : BD = EC : BC;
Schrijf de verhoudingen als producten met de letters a, b, c, d en p;
Tel de twee vergelijkingen op en bedenk dat AE + EC = q

Versie 2

In dit boekje gaat het om het construeren van een koordenvierhoek met vier gegeven lijnstukken.

Een koordenvierhoek is een vierhoek waarvan de hoekpunten op een cirkel liggen.
De zijden van de vierhoek zijn dus koorden van die cirkel.





Voor het begrijpen van de antwoorden op deze vraag moet je *de stelling van Ptolemaeus* kennen. Die zegt:
" Bij een koordenvierhoek (ABCD) met zijden a (AB), b (BC), c (CD) en d (DA), en diagonalen p (BD) en q (AC) geldt:
$a \cdot c + b \cdot d = p \cdot q$ "
Zie figuur.

In woorden: *de som van de producten van beide paren overstaande zijden van een koordenvierhoek is even groot als het product van de diagonalen*.

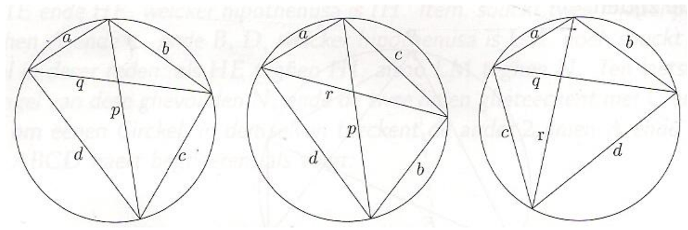
Wanneer het mogelijk is om met vier lijnstukken a, b, c en d een koordenvierhoek te maken, dan kunnen met diezelfde vier lijnstukken drie wezenlijk verschillende koordenvierhoeken gemaakt worden, allemaal op een even grote cirkel. Als je in de bovenstaande figuur de driehoek BCD, met zijden b, c en p, gespiegeld op de diagonaal BD plakt, d.w.z. driehoek BCD uitknippen, spiegelen, en punt B op punt D van driehoek ABD plakt en punt D op punt B van driehoek ABD, dan is duidelijk dat punt C ook weer op de zelfde cirkel terecht komt.

Van elk van die drie koordenvierhoeken komt een van de diagonalen ook als diagonaal voor in een van de andere drie.
Er kunnen met de stelling van Ptolemaeus dus drie verbanden worden opgeschreven tussen de zijden a, b, c en d en twee van de mogelijke diagonalen p, q en r. Een daarvan is staat hierboven genoemd.

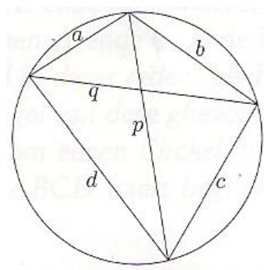
2. Schrijf de andere twee verbanden op en leid uit de drie verbanden een uitdrukking voor p af uitgedrukt in a, b, c en d.

Tip versie 2
Teken eerst eens alle mogelijke koordenvierhoeken met a, b, c en d.
Welke diagonalen zijn telkens gelijk?

Hulp versie 2
Dit zijn in feite de drie verschillende koordenvierhoeken.
Gebruik de stelling *in woorden* om de drie verbanden op te schrijven; vermenigvuldig de twee verbanden waar p in staat en deel door het verband met q en r.
Je krijgt dan een uitdrukking voor p^2, dus ook voor p.



Versie 3
In dit boekje gaat het om het construeren van een koordenvierhoek met vier gegeven lijnstukken.



Een koordenvierhoek is een vierhoek waarvan de hoekpunten op een cirkel liggen.
De zijden van de vierhoek zijn dus koorden van die cirkel.
In de figuur zie je een van de drie mogelijke koordenvierhoeken die je kunt construeren met de lijnstukken a, b, c en d. In alle mogelijke koordenvierhoeken met deze vier zijden komen twee van drie mogelijke diagonalen voor.
Noem de lengte van de diagonalen p, q en r.
De stelling van Ptolemaeus zegt voor de getekende situatie dat $a \cdot c + b \cdot d = p \cdot q$;
Uit de andere twee mogelijke koordenvierhoeken komen de verbanden $a \cdot b + c \cdot d = p \cdot r$ en $a \cdot d +$

Door handig combineren kun je b.v. diagonaal p uitdrukken in a, b, c en d: $p = \dfrac{\sqrt{a \cdot c + b \cdot d} \cdot \sqrt{a \cdot b + c \cdot d}}{\sqrt{a \cdot d + b \cdot c}}$.

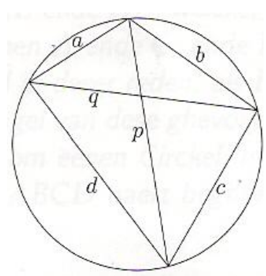
Volgens meester Ludolph kan deze formule ook geschreven worden als $p = (\frac{b}{d} \cdot \frac{a}{c} + 1)\sqrt{\dfrac{a \cdot c + b \cdot d}{(\frac{b}{d} + \frac{a}{c})(\frac{b}{d} \cdot \frac{a}{c} + 1)}}$.

3. **a** Leid uit de drie gegeven verbanden de bovenste formule van p af
b Laat vervolgens zien dat beide formules gelijk zijn.

Tip versie 3
a Vermenigvuldig de formules van p·q en p·r
b Breng van de tweede formule de factor $(\frac{b}{d} \cdot \frac{a}{c} + 1)$ onder het wortelteken.

Hulp versie 3
a Deel het product van de formules van p·q en p·r door de formule van q·r. Je hebt dan een formule voor p^2.
b Breng de breuken $\frac{b}{d} \cdot \frac{a}{c} + 1$ en $\frac{b}{d} + \frac{a}{c}$ onder een noemer.

Bonusvragen
In dit boekje gaat het om het construeren van een koordenvierhoek met vier gegeven lijnstukken.



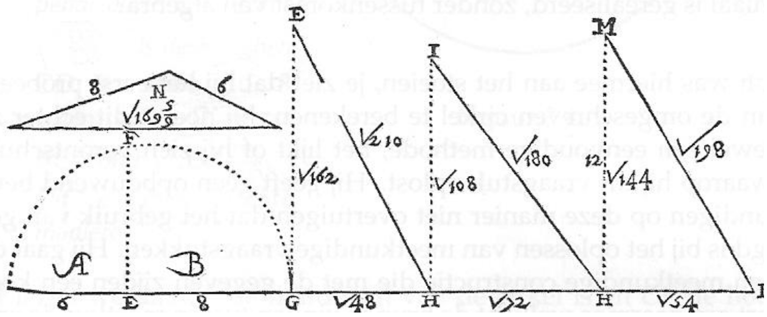
Een koordenvierhoek is een vierhoek waarvan de hoekpunten op een cirkel liggen.
De zijden van de vierhoek zijn dus koorden van die cirkel.

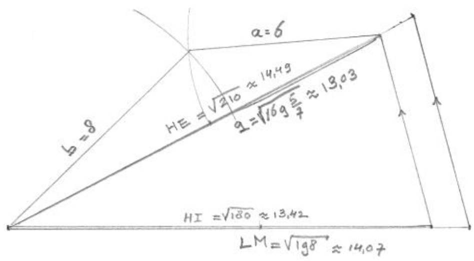
In de figuur zie je een van de drie mogelijke koordenvierhoeken die je kunt construeren met de lijnstukken a, b, c en d. Alle mogelijke koordenvierhoeken met deze vier zijden liggen op een zelfde cirkel. In elk ervan komen twee van drie mogelijke diagonalen voor.
Noem de lengte van de diagonalen p, q en r.

De stelling van Ptolemaeus zegt voor de getekende situatie dat $a \cdot c + b \cdot d = p \cdot q$;
Uit de andere twee mogelijke koordenvierhoeken komen de verbanden $a \cdot b + c \cdot d = p \cdot r$ en $a \cdot d + b \cdot c = q \cdot r$

Door handig combineren kun je b.v. diagonaal p uitdrukken in a, b, c en d: $p = \dfrac{\sqrt{a \cdot c + b \cdot d} \cdot \sqrt{a \cdot b + c \cdot d}}{\sqrt{a \cdot d + b \cdot c}}$.

Om bij gegeven lengten a, b, c en d de lengte van p te construeren wordt gebruik gemaakt van de constructie van de middenproportionaal (de middelevenredige) van twee lijnstukken (getallen).
De constructie van de middelevenredige van x (DE) en y (EG) gaat als volgt:
Teken een (halve) cirkel met als middellijn DG = DE + EG = x + y . Teken in het aansluitpunt E van x en y op de middellijn een loodlijn EF.
Met behulp van deze constructie kan voor alle combinaties x en y een zijde met lengte $\sqrt{(x \cdot y)}$ geconstrueerd worden. Als je b.v. de lijnstukken $\sqrt{(a \cdot c)}$ en $\sqrt{(b \cdot d)}$ hebt geconstrueerd, dan kan met behulp van de stelling van Pythagoras een lijnstuk met lengte $\sqrt{(a \cdot c + b \cdot d)} = \sqrt{((\sqrt{(a \cdot c)})^2 + (\sqrt{(b \cdot d)})^2)}$ worden geconstrueerd . In de figuur zie je de constructie van $\sqrt{48}$ (lijnstuk FE in de halve cirkel), de middelevenredige van 6 en 8, = $\sqrt{(6 \cdot 8)}$.
Meester Ludolph gebruikt als voorbeeld van de gezochte koordenvierhoek zijden met lengte a=6, b=8, c=9 en d=18. In de figuur zie je hoe hij daarmee de diagonaal q (N = $\sqrt{169^5/_9}$; dit is een zetfout van $\sqrt{169^5/_7}$) construeert.





Bonusvragen

a Bewijs dat EF = $\sqrt{48}$.

b Hoe kan met behulp van de lijnstukken in de linker figuur de diagonaal p geconstrueerd worden?

c Als je de waarde van p eerst uitrekent, dan kan p ook meteen als middelevenredige van twee getallen worden geconstrueerd. Welke twee getallen ($\neq 1$) worden bedoeld?

Antwoord versie 1 = versie 4

$a \cdot c = p \cdot AE$ en $b \cdot d = p \cdot EC$ geeft $a \cdot c + b \cdot d = p \cdot AE + p \cdot EC = p \cdot (AE + EC) = p \cdot q$

Antwoord versie 2

pq = ac + bd, pr = ab + cd, qr = ad + bc; pq · pr geeft (ac + bd)(ab + cd);
pq · pr = $p^2 \cdot qr$, dus als je (ac + bd)(ab + cd) deelt door ad + bc, dan heb je een uitdrukking voor p^2;

dan is $p = \dfrac{\sqrt{a \cdot c + b \cdot d} \cdot \sqrt{a \cdot b + c \cdot d}}{\sqrt{a \cdot d + b \cdot c}}$

Antwoord versie 3

a $p = \sqrt{\dfrac{(p \cdot q) \cdot (p \cdot r)}{(q \cdot r)}} = \sqrt{\dfrac{(a \cdot c + b \cdot d) \cdot (a \cdot b + c \cdot d)}{(a \cdot d + b \cdot c)}}$

b onder het wortelteken valt een factor $\left(\frac{b}{d} \cdot \frac{a}{c} + 1\right)$ weg, dan na het onder een noemer brengen krijg je

$p = \sqrt{\left(\left(\dfrac{a \cdot b + c \cdot d}{c \cdot d}\right) \cdot \dfrac{(a \cdot c + b \cdot d)}{\left(\frac{b \cdot c + a \cdot d}{c \cdot d}\right)}\right.}$; hieruit volgt de eerste formule van p

Antwoorden Bonusvragen

a Teken de straal (7) vanuit het middelpunt; met Pythagoras krijg je dan $EF^2 = MF^2 - EM^2 = 49 - 1 = 48$

b $HE = \sqrt{(\sqrt{(6 \cdot 8)})^2 + (\sqrt{(9 \cdot 18)})^2} = \sqrt{(48 + 162)} = \sqrt{210} = \sqrt{(a \cdot b + c \cdot d)}$; zo is $HI = \sqrt{(b \cdot c + a \cdot d)}$ en $LM = \sqrt{(a \cdot c + b \cdot d)}$
$p = {}^{HE \cdot LM}/_{HI}$ geeft b.v. p : HE = LM : HI; via gelijkvormigheid kan nu p geconstrueerd worden uit de bekende lijnstukken HE, HI en LM.
In de tweede figuur is die constructie uitgevoerd voor $q = {}^{HI \cdot LM}/_{HE}$ met b.v. p : HI = LM : HE

c Het boekje begint met de constructie van $\sqrt{231} = \sqrt{(11 \cdot 21)}$; als je p uitrekent dan is dat precies $\sqrt{231}$.