

21^e Nationale Wiskunde Dagen

30 & 31 januari 2015

Hand-out



workshop

(ver)delen, (ver)schuiven,
(ver)draaien en (ver)werken

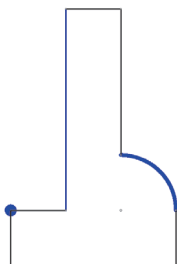
Marjan Botke
Rob van Oord

Op een feestje komen ineens drie neefjes binnen. Je hebt nog een stuk taart over. Hoe verdeel je dat eerlijk?

In het 4 vwo wiskunde B boek van Moderne Wiskunde staat een manier om een hoek in drieën te verdelen. Daarvoor heb je een (door ons zogenoemde) *trisector* nodig. Bij het googelen op internet naar “trisectie” kom je de klassieke *neusis*-methode tegen. In de workshop willen we de deelnemers allereerst laten ervaren hoe deze methoden werken. Dat kan een leuke les opleveren, met als afsluiting natuurlijk het bewijs dat de methode klopt. Op de NWD 2014 was een workshop over de trisectie van een hoek met origami en MECCANO. Het bewijs van de trisectie met origami werd aan de deelnemers overgelaten. Wie wil kan daar in de workshop nog eens aan werken.

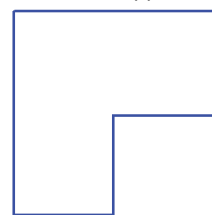


een trisector



Op internet zijn talloze puzzels te vinden waar geknipt en geschoven moet worden om een oplossing te vinden. Een bekende staat hiernaast. Knip de figuur in vier aan elkaar gelijke vlakdelen. Een andere interessante opgave is: Hoe verdeel je een rechthoek in stukken die na enig schuiven precies een vierkant vormen? In Euclides heeft hierover al eens een mooi artikel gestaan. In onze workshop gaan we hiermee aan de slag. Hoe kun je zonder rekenen op een A4-tje de gezochte lijnen in de rechthoek vinden? Het vouwen van de middelevenredige van twee lengten komt daarbij om de hoek kijken.

bekende knippuzzel

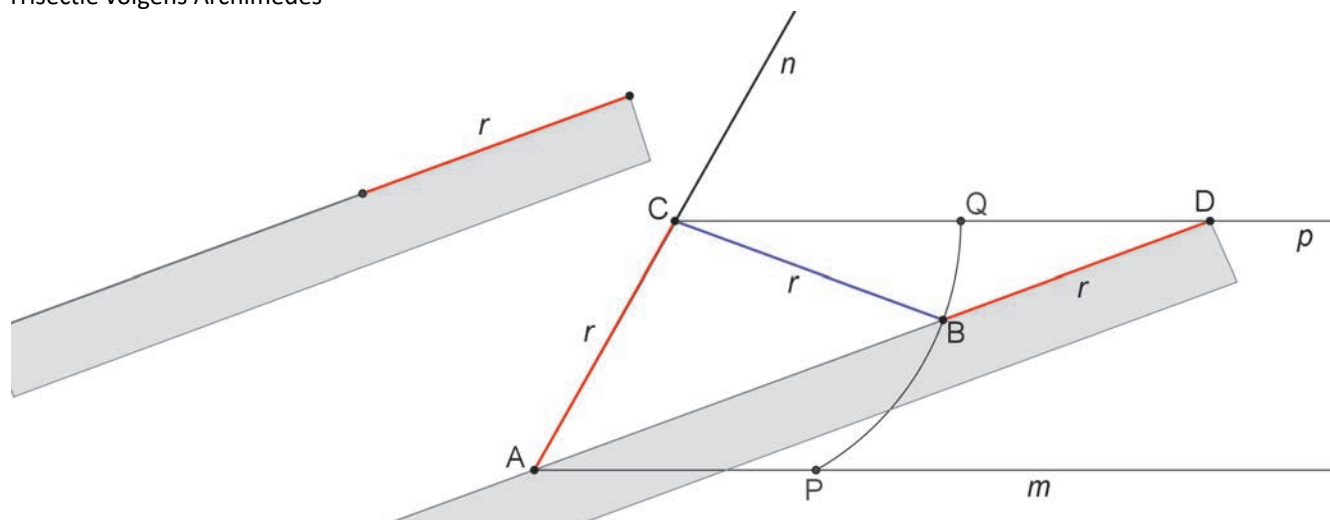


In een Russisch leerboek staan plaatjes die je kunt interpreteren terwijl je de tekst niet kunt lezen. Dat leverde een herkenning op van een oud probleem: de spaarpot van ABN-AMRO uit 2005. Hoe knip je een vierkant in stukken die na draaien om drie scharnierpunten een gelijkzijdige driehoek vormen?

Eerst maar eens vouwen, knippen, schuiven en draaien. Dan de bewijzen en dan ... als je alles hebt verwerkt, beloven dat uitdagende lessen op te leveren.

We nodigen je uit om samen met ons te delen en te verdelen.
Marjan Botke en Rob van Oord

Trisectie volgens Archimedes



Vraag: Hoe kun je een gegeven hoek in drie even grote hoeken delen?
Of anders gesteld: Hoe kun je van een derde deel van een gegeven hoekgrootte tekenen?

Antwoord: Gebruik de *neusis*-methode met de “liniaal”.

Hoe werkt de neusismethode?

Neem (knip) een lange strook karton, of een liniaal.

Deze strook staat model voor een halve lijn.

Markeer op het uiteinde van de halve lijn, de “liniaal”, een vast lijnstuk met lengte r .

[neem voor r in deze workshop een lengte tussen de 5 en de 8 cm]

Teken (vouw en knip) hoek A (α) met de halve lijnen m en n als benen.

Punt C ligt op het schuine been n op afstand r van A. Teken punt C met behulp van de “liniaal”.

Teken door punt C een halve lijn p die evenwijdig loopt met het horizontale been m .

Teken tussen been m en halve lijn p de cirkelboog PQ met middelpunt C en straal r .

Schuif de “liniaal” door A zo dat het ene uiteinde van het gemarkeerde lijnstuk op de cirkelboog komt

te liggen (punt B) en het andere uiteinde op de halve lijn p (punt D). Met andere woorden:

vanuit hoekpunt A wordt de vaste lengte gericht (neusis) op de cirkelboog en de halve lijn n zodat hij er precies tussen past.

Hoek BAP is nu $1/3$ van hoek CAP.

Het bewijs:

Analyse:

- 1 Welke beweringen kun je doen die volgen uit de constructie?
- 2 Welke hoek is (hoeken zijn) even groot als hoek BAP (β)?
- 3 Welke stelling(en) weet je over de hoeken van een driehoek?
- 4 Hoe kun je die gebruiken in beweringen over hoek BAP (β)?
- 5 Hoe kun je bewijzen dat hoek BAP nu $1/3$ is van hoek CAP oftewel $\alpha = 3\beta$?
- 6 Werkt deze methode ook bij een stompe hoek?

Antwoorden op de vragen:

- 1 driehoek ABC is gelijkbenig en driehoek BCD is gelijkbenig; hoek PAD en hoek CDA zijn Z-hoeken
- 2 hoek BDC (Z-hoeken); hoek BCD (gelijkbenige driehoek)
- 3 hoekensom, dus alle hoeken zijn samen 180° ;
stelling van de buitenhoek = som van de niet aanliggende hoeken
- 4 $\angle CBD = 180^\circ - 2\beta$ (hoekensom driehoek) en $\angle ABC = \beta$ (buitenhoek driehoek BCD)
- 5 $\angle BAC = \angle ABC$ (gelijkbenige driehoek); dus $\angle BAC = 2\beta$
Dus hoek $\angle PAC = 3\beta$ en dus is $\angle BAP = 1/3 \angle CAP$
- 6 probeer het eens; ja je krijgt weer twee gelijkbenige driehoeken en Z-hoeken

Vraag: Hoe kun je een gegeven hoek in drie even grote hoeken delen?
Of anders gesteld: Hoe kun je van een derde deel van een gegeven hoekgrootte tekenen?

Antwoord: Gebruik de *trisector*.

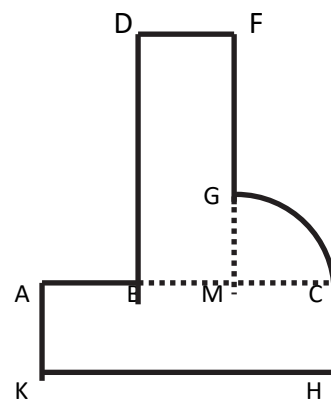
Wat is een trisector?

Een *trisector* is een bepaald meetkundig figuur met onderling loodrechte lijnstukken en een kwartcirkelboog die op een speciale manier binnen de gegeven hoek gelegd moet worden.

Hoe teken je een *trisector*?

Het makkelijkste is het om die op ruitjespapier te tekenen. Dan heb je al vast onderling loodrechte lijnen.

Op de bijlage staat hoe je een *trisector* maakt.



Zelf ontdekken hoe de trisector werkt?

Maak eerst een hoek.

Neem een A4-tje. Leg dat rechtopstaand voor je neer.

Het punt linksonder noem je T, het punt rechtsonder Q.

Kies ergens op de rechterkant of de bovenkant een punt R.

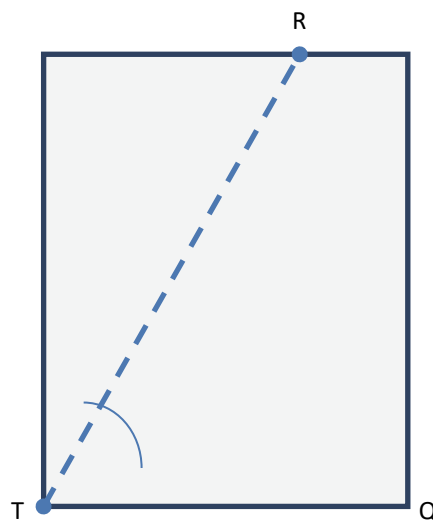
Vouw de lijn TR. Teken de lijn TR.

Het ene been van de hoek is TQ, en het andere been is TR.

Knip het blaadje door over lijn TR. De gegeven hoek is nu hoek QTR.

Eerst gaan we uitvinden hoe je de *trisector* moet gebruiken om een gegeven hoek in drieën te delen. Later ga je bewijzen dat het werkt.

Meet $\angle QTR$ en teken met behulp van je GEO-driehoek met potlood in hoek QTR de lijntjes die de hoek in drieën delen.



Heb je nog geen *trisector*? Nee? Maak hem dan eerst volgens de instructie **op de bijlage**.

Leg de *trisector* binnen de hoek.

Schuif er nu mee zodat punt A op been TQ ligt en de punten B en (het passerpunt-gaatje bij) M op de door jou getekende lijntjes komen te liggen.

1 Wat valt je nu op over de ligging van lijn BD en de cirkelboog?

Als je denkt dat je het weet gum je de door jou getekende lijntjes uit (of je maakt even een nieuwe hoek) en leg je de *trisector* zo neer dat je daarmee de hoek in drieën kunt delen door in jouw gegeven hoek stippen te zetten of te prikken op de plaatsen waar B en M op jouw *trisector* liggen.

2 Kun je al uitleggen hoe de trisector gebruikt kan worden om een hoek in drieën te delen?

Hoe deel je een hoek in drieën met de trisector?

Mocht je nog niet precies weten hoe de trisector werkt, dan volgt hier de oplossing.

Van de trisector zijn alleen de punten A, B en M en de kwartcirkel CG van belang, en de halve lijn BD.

Binnen de (gegeven, getekende) hoek moet je de trisector zo neerleggen, door te schuiven, dat punt A op het ene been van die hoek ligt, de halve lijn BD door het hoekpunt van die hoek steekt en tegelijk de kwartcirkel raakt aan het andere been van die hoek. Als de trisector ligt met deze drie voorwaarden, dan delen de halve lijnen TB en TM de gegeven hoek precies in drie even grote hoeken.

Maak nog eens een andere hoek.

Deel die met behulp van je *trisector* in drieën door op de juiste plaatsen stippen te zetten (gaatjes te prikken).

Haal de trisector weg en teken de lijntjes vanuit hoekpunt T naar die stippen. Meet de hoeken. Klopt het?

3 Werkt de methode ook bij een stompe hoek?

Het bewijs: [zie som 44 in het boek in § 5.8 ⁽¹⁾]

Draai eerst je hoek met ingelegde *trisector* zodat de *trisector* rechtop staat.

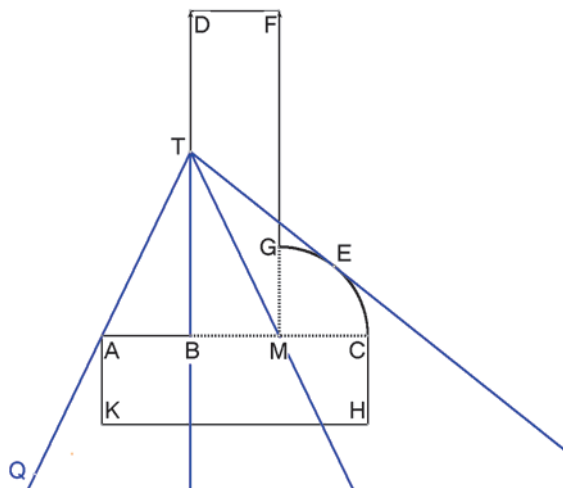
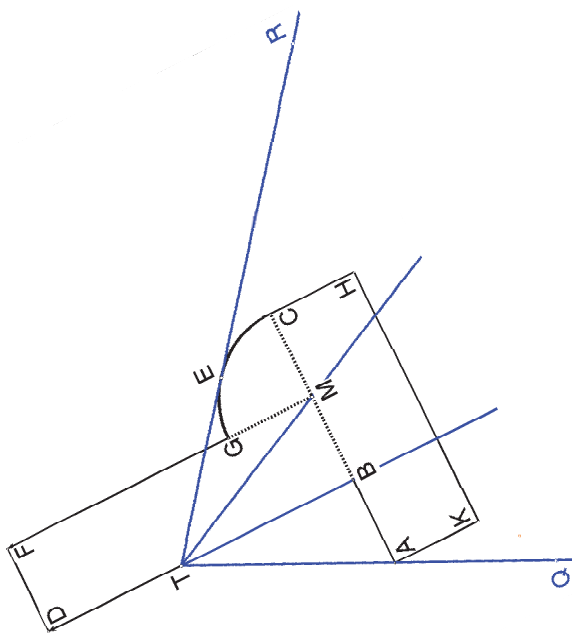
De hoek heeft nu zijn hoekpunt T op BD, het ene been gaat over TA en het andere raakt de kwartcirkel.

Noem dit raakpunt E.

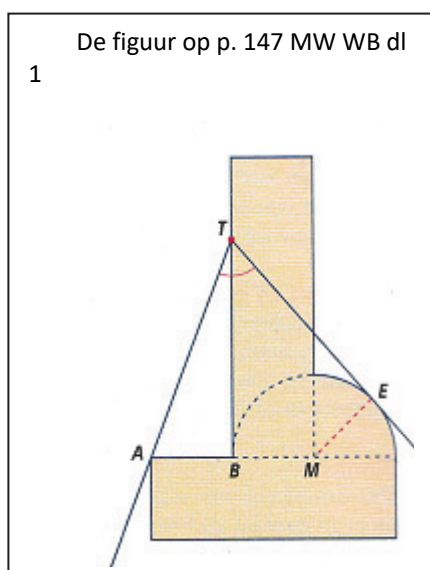
De vraag is nu om te bewijzen dat $\angle ATB = \angle BTM = \angle MTE = \frac{1}{3}\angle ATE$.

Analyse:

- 1 Hoe kun je gebruiken dat $AB = BM$? Zoek congruente driehoeken.
- 2 Hoe kun je gebruiken dat TE de cirkel raakt? Zoek congruente driehoeken.
- 3 Hoe kun je uit beide congruenties bewijzen dat $\angle ATB = \angle BTM = \angle MTE = \frac{1}{3}\angle ATE$?
Schrijf het bewijs nu netjes op en lever het in.



⁽¹⁾ Moderne wiskunde 9^e editie vwo B deel 1 p. 147



Antwoorden op de vragen:

- 1 BD gaat door T en de cirkelboog raakt aan TR
- 2 A moet over het ene been (TQ) worden geschoven net zo dat BD door T gaat en tegelijk de cirkelboog aan het andere been (TR) raakt.

Daarna gaatjes prikken op de plaats van B en M. TB en TM verdelen de hoek dan in drieën.

3 Het bewijs:

$$\begin{array}{l} (1) \quad \left. \begin{array}{l} TB \perp l \text{ (gegeven), dus } \angle TBA = \angle TBM = 90^\circ \\ AB = BM \text{ (gegeven)} \\ TB = TB \end{array} \right\} \text{ ZHZ} \Rightarrow \triangle TBA \cong \triangle TBM, \text{ dus } \angle ATB = \angle MTB \quad (1) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (2) \quad \left. \begin{array}{l} TE \text{ raakt de cirkelboog dus } TE \perp ME, \text{ dus } \angle TEM = \angle TBM = 90^\circ \\ EB = BM \text{ (= straal cirkel)} \\ TM = TM \end{array} \right\} \text{ ZZR} \Rightarrow \triangle TEM \cong \triangle TBM, \text{ dus } \angle MTE = \angle MTB \quad (2) \end{array}$$

$$(3) \quad \text{Uit } (1) \text{ en } (2) \text{ volgt dat } \angle ATB = \angle MTB = \angle MTE, \text{ dus alle drie zijn ze } \frac{1}{3} \angle ATE$$

Uit WIKIPEDIA:

Meetkundige constructie**[bewerken]**

Bij een neusis (van Grieks *neuein* = 'gericht zijn naar'; meervoud: *neuseis*) wordt een lijnstuk met gegeven lengte (*a*) ingepast tussen twee gegeven lijnen (*l* en *m*), zodat (het verlengde van) het lijnstuk door een gegeven punt P gaat. Het ene uiteinde van het lijnstuk komt dus te liggen op *l*, het andere op *m*, terwijl het lijnstuk "gericht" is naar het punt P.

De neusisconstructie wordt uitgevoerd met een 'neusisliniaal': een liniaal met schaalverdeling die kan roteren om het punt P (bijvoorbeeld doordat er in het punt P een punaise is gestoken waar de liniaal tegenaan gedrukt wordt gehouden). Het uiteinde van de liniaal waar zich het nulpunt van de schaalverdeling bevindt (in de figuur aangegeven met een geel oogje), wordt langs lijn *l* bewogen, net zolang tot het punt van de schaalverdeling dat overeenkomt met de gewenste lengte *a* (aangegeven met een blauw oogje), de lijn *m* kruist. Het aldus geconstrueerde lijnstuk (het resultaat van de neusis) is in de afbeelding aangegeven als een donkerblauw balkje.

Het punt P heet de 'pool' van de neusis, de lijn *l* de 'richtlijn', de lijn *m* de 'vanglijn'. De lengte *a* heet *diastema* (Grieks: 'afstand').

Bijlage bij trisectie van een hoek met de trisector

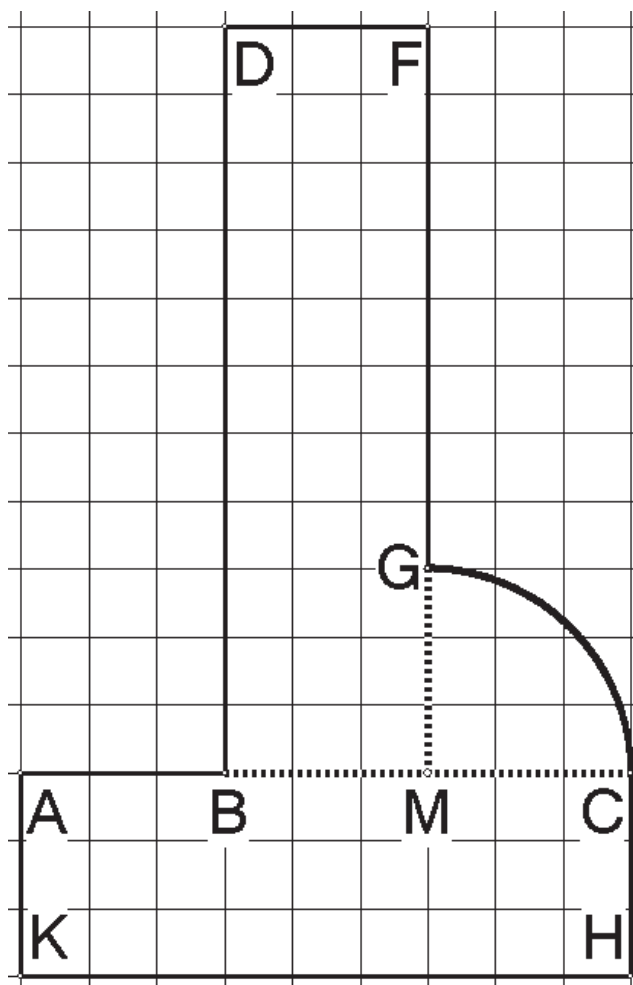
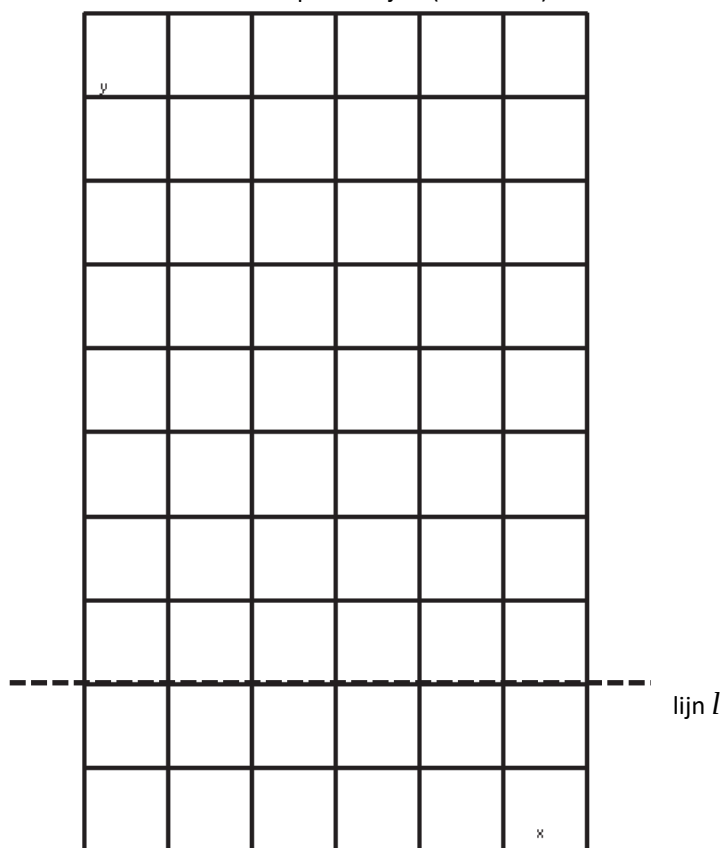
NWD 2015

Hoe teken je een *trisector*?

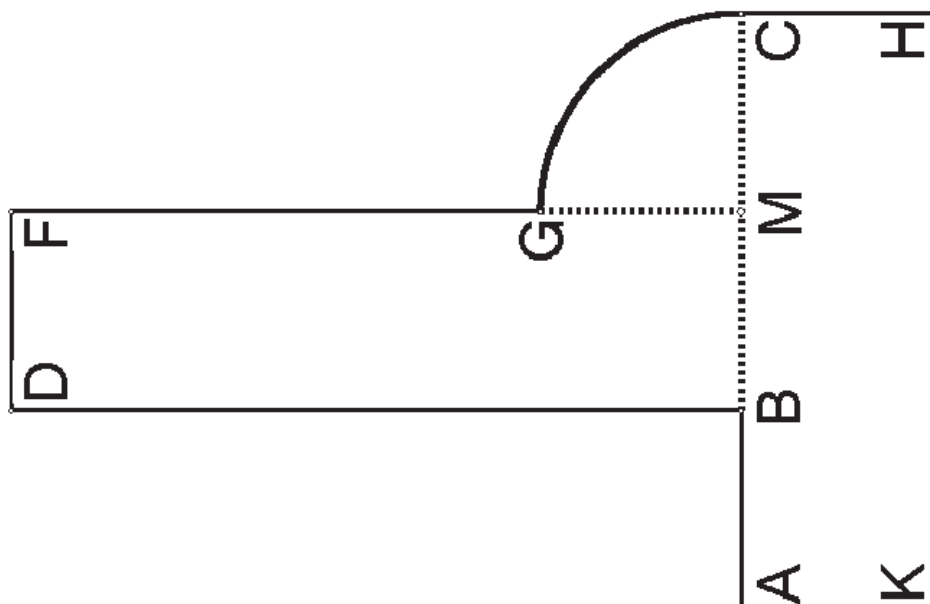
Voorbeeld met 3cm

Teken op een rechte lijn l de punten A, B, M en C zodat $AB = BM = MC$, bijvoorbeeld alle 2 cm (of 3 cm zoals hiernaast).
 Teken in B en in M de loodlijnen BD en MF, waarbij je zorgt dat BD lang genoeg is, b.v. $BD = 4 \times AB$, en dat $BD = MF$.
 Vierhoek BDFM is dus een rechthoek met b.v. $BD = 4 \times BM$.
 BD staat model voor een halve lijn met startpunt B, idem MF voor een halve lijn met startpunt M.
 Teken boven l vanuit C de kwartcirkel CEG met middelpunt M, dus met middellijn BC.
 De kwartcirkel eindigt in punt G op MF.
 Teken onder l nog rechthoek ACHK, met b.v. $AK = AB$.
 De *trisector* is nu klaar. Knip de figuur ABDFG(E)CHKA nu uit.

Teken de *trisector* op de ruitjes (met 2 cm)



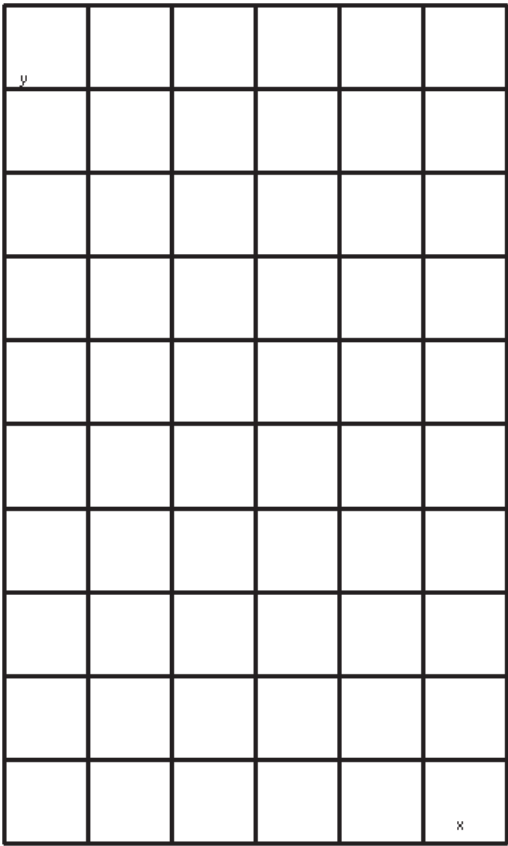
Trisector om uit te knippen



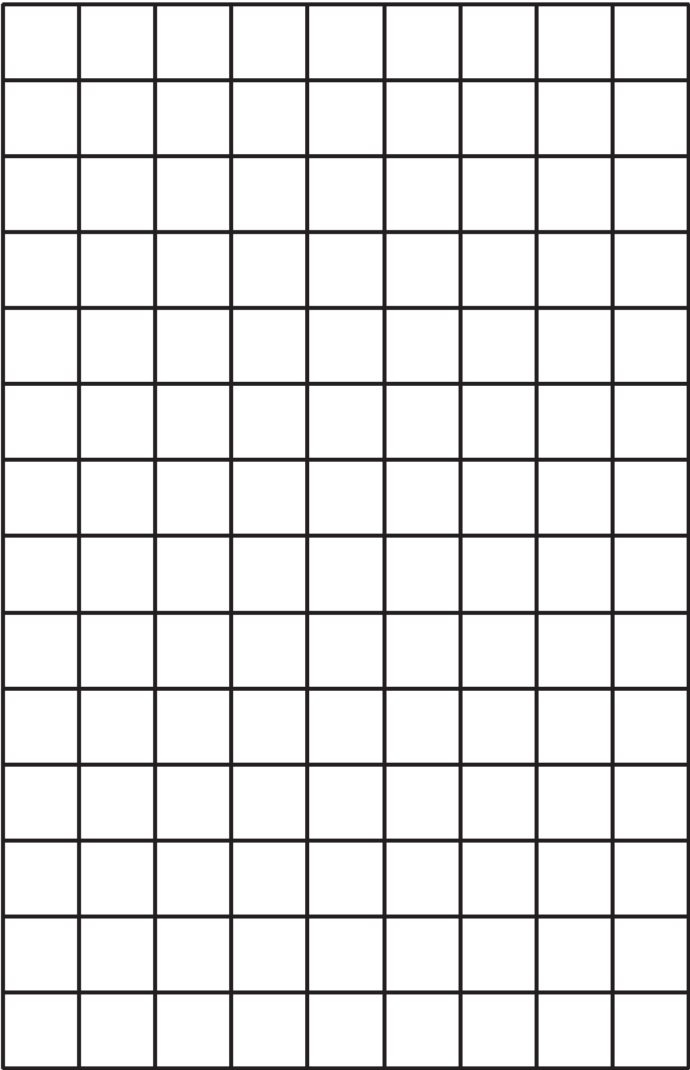
Reservefiguren voor een *trisector*

voor trisector 2 cm

m



voor trisector 3 cm



Vraag: Hoe kun je een gegeven hoek in drie even grote hoeken delen?

Of anders gesteld: Hoe kun je van een derde deel van een gegeven hoekgrootte tekenen?

Antwoord: bijvoorbeeld met origami, het vouwen van bepaalde punten naar bepaalde lijnen.

Bij origami kun je tegelijk twee verschillende punten naar twee verschillende lijnen vouwen. Hiermee is het vouwen van een derde van een hoek mogelijk.

Neem een vierkant vouwblaadje.

Dan weet je al dat de hoeken van het blaadje loodrecht zijn en de zijden even lang.

Lijn l vertrekt vanuit het hoekpunt q , het hoekpunt linksonder van het vouwblaadje, en gaat naar een willekeurig punt ergens op de bovenrand van het vierkante blaadje.

$\alpha = \angle(l, \text{onderkant vouwblaadje})$. We gaan (de gegeven hoek) α in drieën delen door vouwen.

(1) Vouw lijn m die het blaadje horizontaal doormidden deelt, en (2) vouw lijn n die de onderste helft doormidden deelt.

(3) Vouw het meest linkse punt p op lijn m (op de rand van het blaadje) tot op lijn l (noem dit punt p') terwijl tegelijk het hoekpunt q tot op lijn n wordt gevouwen (noem dit punt q').

Deze (kleur hem rood) vouwlijn heeft punt r op onderkant de van het blaadje en punt t op de linker rand.

Het is prettig als je zowel de lijnen die gevouwen zijn als de lijnen waar de omgevouwen randen op het blaadje terecht kwamen tekent. Dus geef op het vouwblaadje de plaats van q' aan met een stip en teken op het weer opengevouwen blaadje de lijnstukken tr , tq' en rq' . Omdat het vouwen gelijk staat met spiegelen zijner allerlei lijnstukken even lang en zijn er loodrechte hoeken tussen de vouwlijnen en de verbindingslijnen van de spiegelbeelden.

We gaan nu bewijzen dat $\angle rqq' = \frac{1}{3} \angle rqp' = \frac{1}{3} \alpha$. Meet eerst eens α en $\angle rqq'$.

Analyse:

Het snijpunt van lijn n en rt noem ik s . Teken ook lijnstuk qs .

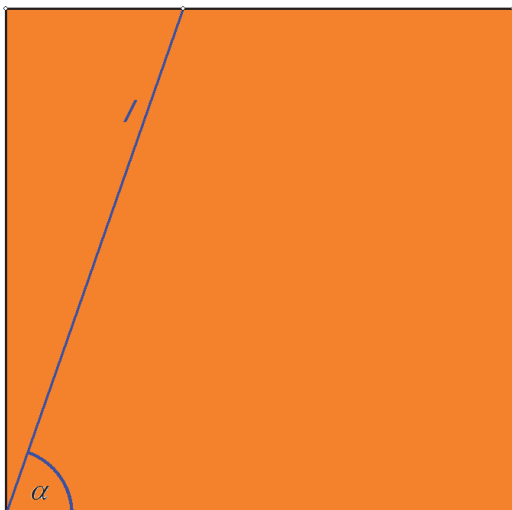
De lijnstukken $p'q$ en pq' zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in lijn rt (de vouw).

Het snijpunt van de lijnstukken $p'q$ en pq' ligt dus op lijn rt (de spiegelas), ik noem dit snijpunt v .

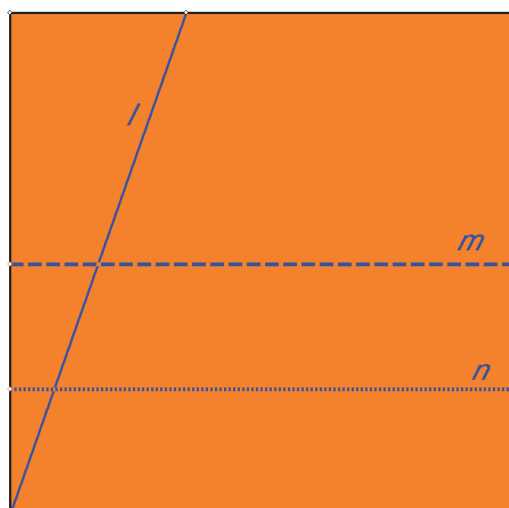
- 1 Hoe kun je bewijzen dat $\angle rqq' = \angle sq'q$? Gebruik een gelijkbenige driehoek en Z-hoeken. Vouwen is spiegelen.
- 2 Hoe kun je bewijzen dat $\angle rqq' = \angle sqq'$? Gebruik congruente driehoeken en een gelijkbenige driehoek. Welke?
- 3 Hoe kun je bewijzen dat $\angle pq'u = \angle qq'u$? Gebruik congruente driehoeken. Vouwen is spiegelen
- 4 Hoe kun je bewijzen dat $\angle sqp' = \angle sqq'$? In een driehoek gaan drie bissectrices door één punt.
Welke driehoek kun je hiervoor nemen?
- 5 Hoe kun je uit de bovenstaande zinnen bewijzen dat $\angle rqq' = \frac{1}{3} \angle rqp' = \frac{1}{3} \alpha$?

Schrijf het bewijs nu netjes op en lever het in.

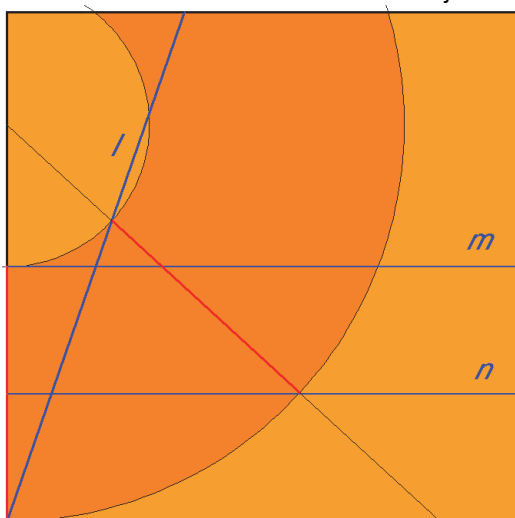
maak een hoek α



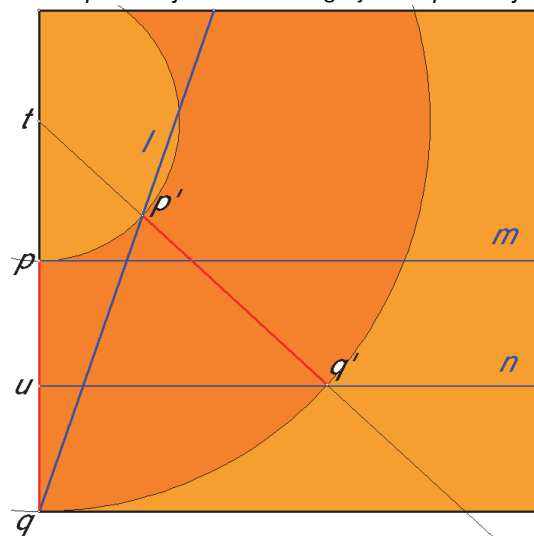
twee keer middendoor vouwen



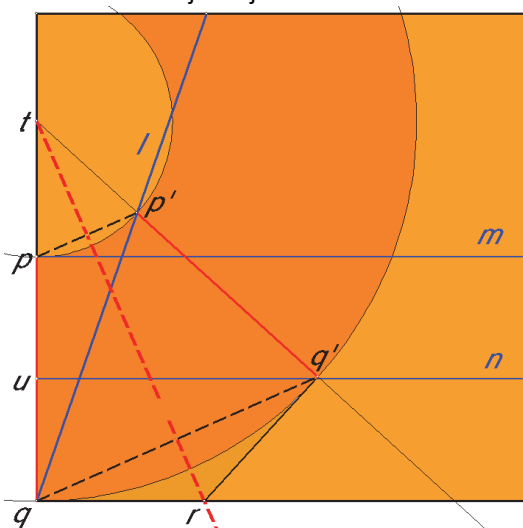
De “neusis”methode met het rode lijnstuk



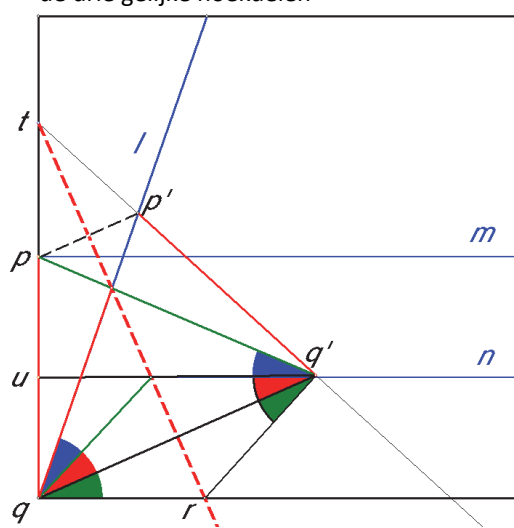
p naar lijn l vouwen tegelijk met q naar lijn n



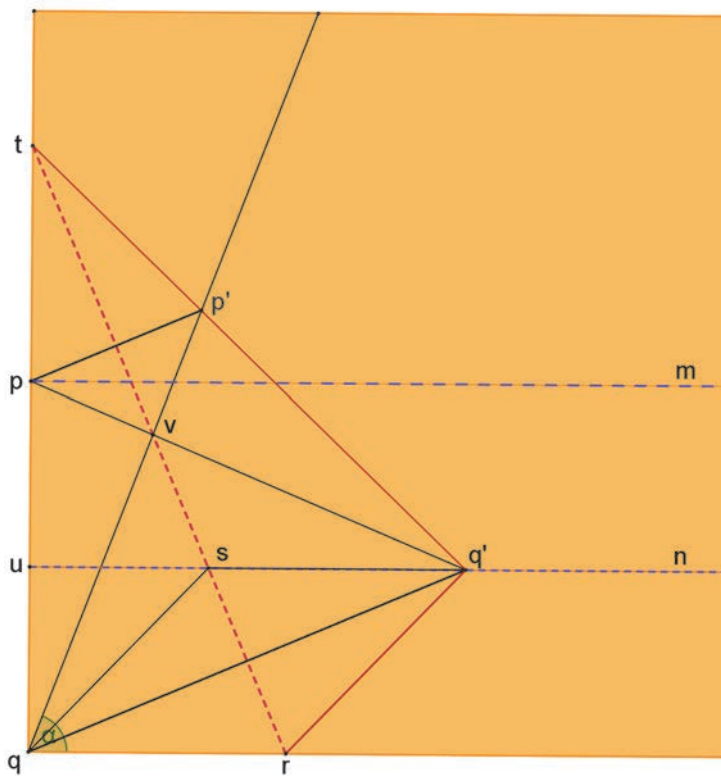
de vouwlijn is lijn tr



de drie gelijke hoekdelen



Uit (3) en (6) volgt de trisectie!



1 Wat is de hoofdeigenschap van een bissectrice (deellijn van een hoek)?

Met andere woorden: welke eigenschap heeft elk willekeurig punt op de bissectrice van een hoek?

- . Teken een hoek A en zijn bissectrice.
- . Kies een willekeurig punt P op die bissectrice.
- . Formuleer de eigenschap van dat punt P (in termen van afstand). = stelling 1
- . Bewijs de geformuleerde eigenschap (met behulp van congruentie).

2 Is het omgekeerde ook waar?

Met andere woorden: als je binnen de benen van een willekeurige hoek (A) een punt (P) tekent waarvan je weet dat de (loodrechte) afstand van dat punt (P) tot elk van de benen even groot is, dan ligt dat punt (P) op de bissectrice van de hoek (A).

- . Teken een hoek A.
- . Teken ergens binnen de benen van die hoek een punt P, zodat de afstand van P tot elk van de benen gelijk is. (je mag een beetje zoeken door met je geodriehoek te meten)
- . Bewijs de 'omgekeerde' stelling. = stelling 2

3 Welke stelling weet je over de bissectrices in een driehoek? = stelling 3

Met andere woorden: welke eigenschap heeft het snijpunt van de drie bissectrices in een driehoek? [Welk gevolg heeft deze stelling in termen van een cirkel en een driehoek?]

- . Teken een driehoek ABC.
- . Teken twee bissectrices, bijvoorbeeld bissectrice AD van hoek A en bissectrice BE van hoek B.
- . Het snijpunt van AD en BE noem je S.
- . Bewijs de stelling door handig gebruik te maken van de hierboven bewezen hoofdeigenschap (1) en stelling (2).

4 Toepassing van deze stelling:

Wat weet je van het snijpunt van twee bissectrices in een driehoek?

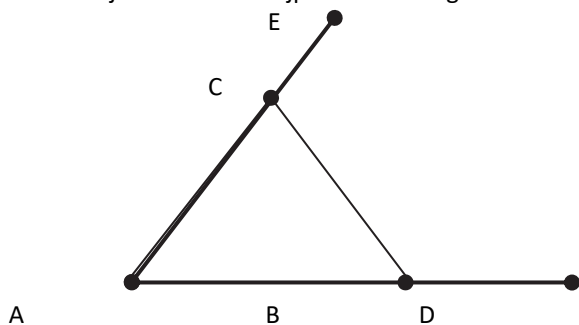
Met andere woorden: als S het snijpunt is van ... , dan

- . Formuleer precies wat je als toepassing van de stelling (3) kunt zeggen.
- . Dit kun je gebruiken ergens in het bewijs van de trisectie.

// voor de snelle lieden

Weet je nog dat we een opgave gemaakt hebben over iets dergelijks met de bissectrices van twee buitenhoeken van een driehoek?

- . Teken een hoek A.
- . Teken op het ene been een punt B en een eindje verder punt D.
- . Teken op het andere been een punt C en een beetje verder punt E.
- . Teken driehoek ABC.
- . Teken de bissectrice van hoek CBD en de bissectrice van hoek BCE.
- . Wat weet je nu van het snijpunt S van de getekende bissectrices? Gebruik de hoofdeigenschap (1) en stelling (2).

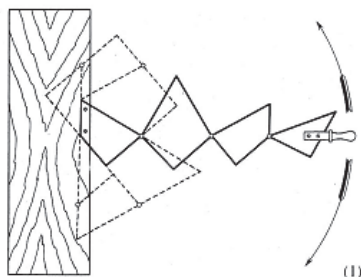


Uit een Russisch leerboek:

I

ТРЕУГОЛЬНИКИ. КВАДРАТЫ. ИГРЫ.

Из этих четырех дощечек (1) составится квадрат или равносторонний треугольник, в зависимости от того, в какую сторону повернуть рукоятку.



С помощью прямоугольного треугольника можно разложить квадрат на два квадрата (2); чтобы убедиться, что больший квадрат складывается из двух меньших, проведем через центр среднего квадрата горизонтальную и вертикальную прямые и сместим, не поворачивая, получившиеся четыре части в углы большего квадрата; сместив теперь малый квадрат, мы покроем оставшуюся незанятую среднюю часть большего квадрата. Из равенства $a = b + c$ видно, что малый квадрат точно соответствует размеру этой средней части.

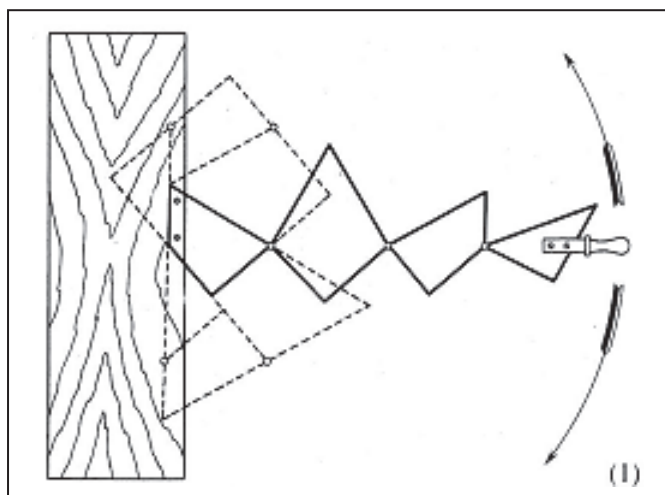
Смысл только что доказанного утверждения становится особенно прозрачным в случае треугольника (3) со сторонами 3, 4 и 5. Имеем: $9 + 16 = 25$.

Мы можем, следовательно, построить прямой угол с помощью 12-сантиметровой нитки со связанными концами и с отметками на расстоянии 3, 4 и 5 сантиметров одна от другой.

То же свойство прямоугольного треугольника можно проверить и без квадратов (4).

Чтобы построить равносторонний треугольник, можно взять произвольный треугольник (5) и разделить каждый его угол на три равные части; тогда внутри его получится малый треугольник, который и будет равносторонним.

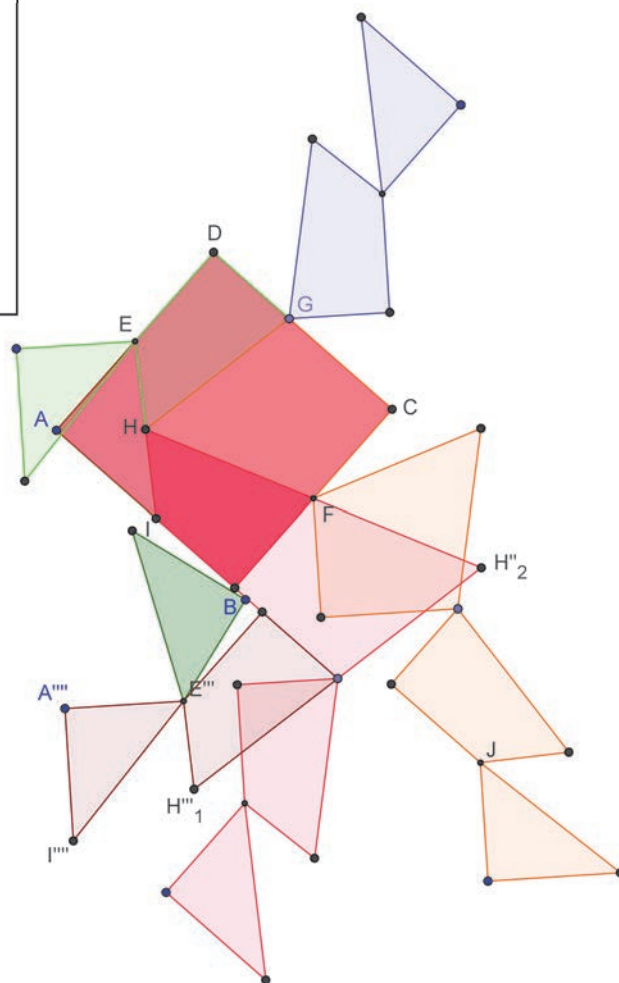
Угол с большой точностью делится на три равные части следующим образом (6): сначала угол делится пополам, а затем хорда половинного



De tekening suggereert dat drie van vier vlakdelen die met een hoekpunt aan elkaar vast zitten, waarvan er eentje vastgespijkerd is, de ene kant op tot een vierkant kunnen scharnieren en de andere kant op tot een gelijkzijdige driehoek.

In de figuur hiernaast moet je BFHI vastgespijkerd zien.

De vlakdelen zitten bij E, G en F aan elkaar en worden gescharnierd om F. ¹ <http://bl.ocks.org/robinhouston/6016317>



Bij mijn afscheid na 40 jaar doceren op dezelfde school kreeg ik van mijn vaksectiegenoten een wiskunde(leer)boek in het Russisch. Zo van "hij heeft al zo veel boeken maar deze heeft hij vast nog niet". Geweldig, toch?

In het boek staan wel een aantal plaatjes.
Dan kun je vast wel raden welke tekst erbij staat.

Zo vind ik op de eerste bladzijde de figuur hierboven.

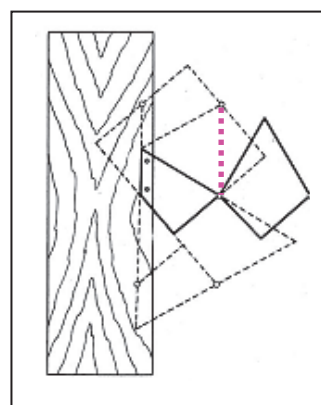
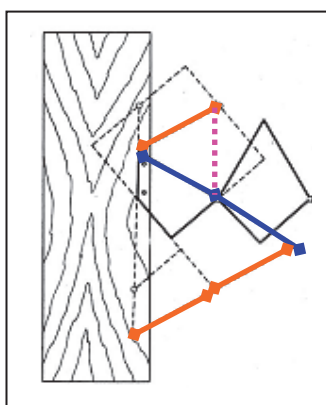
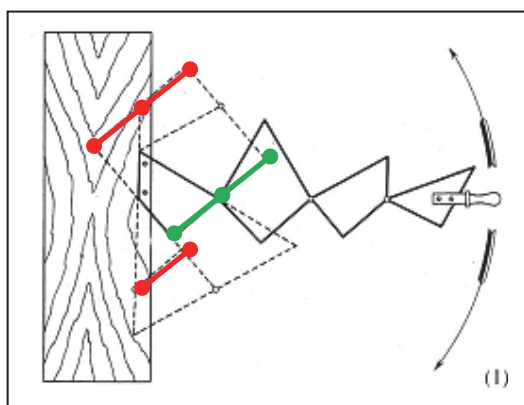
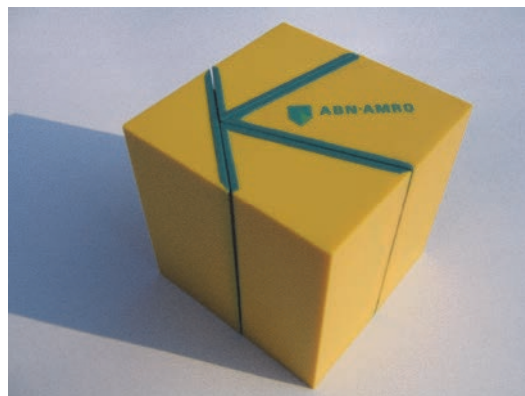
De figuur beter bestudeerd gaf me een moment van herkenning.

Er was ooit eens een ABN-AMRO bank spaarpot met vier vakken (zie foto), die met scharnierende randen aan elkaar vast zaten. Je kon de ene kant om de spaarpot tot een kubus klappen en de andere kant om tot een prisma met een (gelijkzijdige, zo leek het) driehoek als zijkant.

Hier zat hogere wiskunde achter.

Hoe maak je van een vierkant een gelijkzijdige driehoek (met dezelfde oppervlakte). Beter gezegd: hoe kun je met rechte lijnstukken een vierkant in vier vlakdelen knippen die anders neergelegd precies een gelijkzijdige driehoek vormen, met dus dezelfde oppervlakte als die van het vierkant.

Ik heb dat probleem toentertijd al eens bestudeerd, en kwam met een oplossing van de constructie van de verdeellijnstukken.



Met zijden van het vierkant van $2r$ (rood en groen) en zijden van de gelijkzijdige driehoek van $2z$ (oranje en blauw) krijg je de volgende vergelijking:

$$(2r)^2 = \sqrt{3} z^2; \text{ dus uitgaande van halve zijde } r \text{ van het vierkant moet je } z = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} r$$

construeren (berekenen) voor de halve zijde van de driehoek.

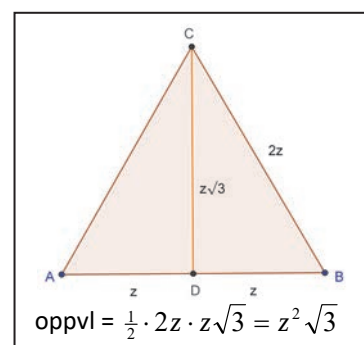
Gebruik dat de hoogtelijn in een gelijkzijdige driehoek met zijden $2z$ gelijk is aan $z\sqrt{3}$.

Als je de figuur goed bestudeert dan zie je twee scharnierpunten op het midden van tegenoverliggende zijden van het vierkant liggen.

Verder zie je een gelijkbenige driehoek met twee halve zijden z met een hoek van 60° ertussen, dus ook dat is een gelijkzijdige driehoek als je een extra lijntje tekent.

Neem je bijvoorbeeld een vierkant met zijden 16 cm, dan is $r = 8$ en wordt een benadering van z berekend met

$$z = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot 8 \approx 12,16 \text{ cm. Hiermee kunnen de lijnstukken op het vierkant getekend worden.}$$



Maar kun je ook zonder z te benaderen dit lijnstuk construeren?

¹ https://www.youtube.com/watch?v=yc_bp5B-MWs

In een gelijkzijdige driehoek zijn alle zijden even lang.
De zijden van een halve gelijkzijdige driehoek hebben verhouding
(AB : BC : AC =) 1 : $\sqrt{3}$: 2.

Met behulp van de stelling van Pythagoras is deze verhouding te berekenen.

Ga uit van schuine zijde met lengte (AC =) $2z$.

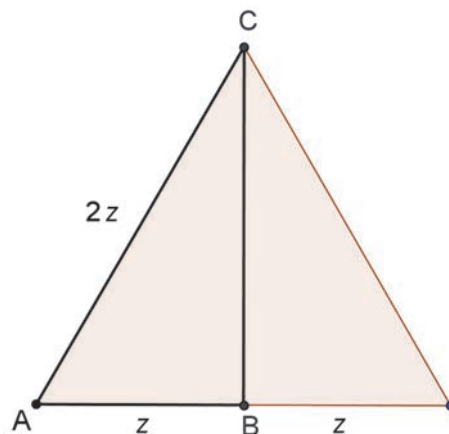
Dan is de kleinste zijde (AB =) z .

Volgens de stelling van Pythagoras geldt:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2, \text{ dus } z^2 + BC^2 = (2z)^2 = 4z^2.$$

Dan volgt $BC^2 = 3z^2$, dus $BC = z\sqrt{3}$.

Dit is tevens de hoogte van de driehoek.



De oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek met zijden $2z$ is $\frac{1}{2} \cdot 2z \cdot z\sqrt{3} = z^2\sqrt{3}$

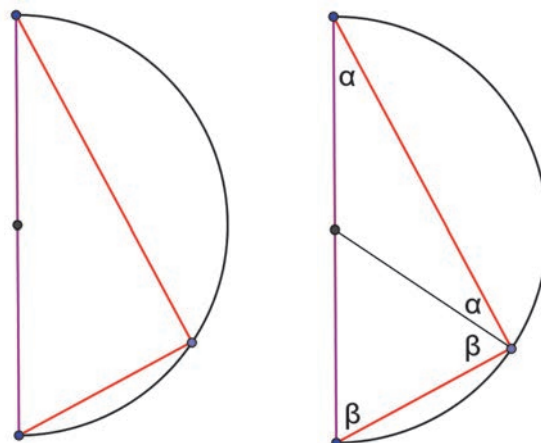
Voorkennis verdelen

de stelling van Thales

Gegeven is een halve cirkel op een lijnstuk. Zie eerste figuur.
Het middelpunt van die halve cirkel is het midden van dat lijnstuk.
Dan is de driehoek gevormd door een willekeurig punt op de halve cirkel en de uiteinden van het lijnstuk een rechthoekige driehoek.

Voor het bewijs kun je de straal van de halve cirkel naar het willekeurig gekozen punt tekenen. De twee driehoeken die zo ontstaan zijn gelijkbenig. Stel de basishoeken van de ene driehoek α , en die van de andere β . Met de stelling van de hoekensom van deze driehoeken zie je dat de hoeken van de grote driehoek samen $2\alpha + 2\beta$, maar ook 180° zijn. Bijgevolg is $\alpha + \beta = 90^\circ$. Dit is precies de grote hoek van de grote driehoek. Dus is de grote driehoek rechthoekig. Zie tweede figuur.

Omgekeerd is de schuine zijde van een rechthoekige driehoek altijd de middellijn van de omschreven cirkel van die driehoek.



Voorkennis verdelen

de middelevenredige

h is de middelevenredige van p en q als $p : h = h : q$ oftewel $h^2 = pq$, dan is $h = \sqrt{pq}$.

CD is de hoogtelijn in een rechthoekige driehoek ABC . Dus $\angle ADC = \angle CDB = 90^\circ$.

In driehoek ABC is $\angle ABC = 90^\circ - \angle BAC$. Dus ook $\angle CBD = 90^\circ - \angle BAC$.

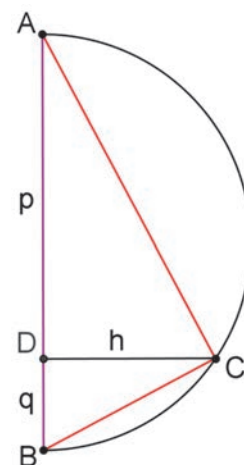
In driehoek ACD is $\angle ACD = 90^\circ - \angle DAC = 90^\circ - \angle BAC$.

Hieruit volgt dat de driehoeken CBD en ACD gelijkvormig zijn (hh).

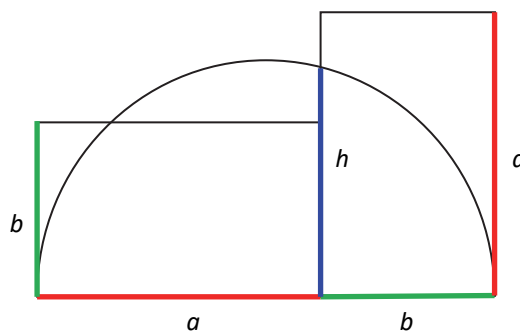
Dus $AD : DC = CD : DB$, anders gezegd: $p : h = h : q$.

Hoe kun je dit gebruiken?

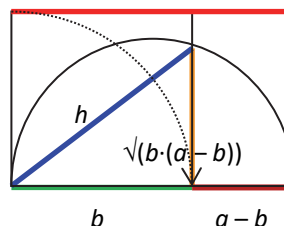
Je kunt een lijnstuk van lengte $\sqrt{pq}$ ($=h$) construeren door de lengtes p ($=AD$) en q ($=DB$) achter elkaar te leggen ($AD + DB = AB$). Het lijnstuk van snijpunt van de loodlijn in het contactpunt (D) van p en q met de halve cirkel op het lijnstuk met lengte $p+q$ ($=AB$) naar het contactpunt (CD) is dan de gevraagde $h = \sqrt{pq}$.



Het construeren van de middelevenredige van de zijden van een rechthoekig blaadje past op de hierboven beschreven manier niet op het blaadje zelf. Je zou dan twee blaadjes dwars tegen elkaar moeten leggen en daaroverheen een halve cirkel moeten tekenen. Zie figuur.
Met zijden a en b (met $a > b$) van de rechthoek is nu $h = \sqrt{a \cdot b}$.

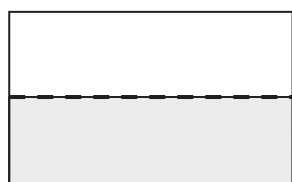


Je kunt binnen de rechthoek de korte zijde b omcirkelen naar de lange zijde a . De lange zijde is dan verdeeld in de stukken met lengte b en $a-b$. Als je dan de middelevenredige $\sqrt{b(a-b)}$ van b en $a-b$ construeert binnen de rechthoek, dan is de schuine zijde, h , van de (rechthoekige) driehoek met rechthoekszijden b en $\sqrt{b(a-b)}$ gelijk aan $\sqrt{a \cdot b}$. Volgens Pythagoras geldt nl.: $h^2 = b^2 + (\sqrt{b(a-b)})^2 = b^2 + b \cdot a - b^2 = a \cdot b$, dus $h = \sqrt{a \cdot b}$.

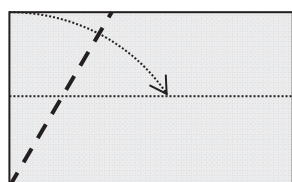


Voorkennis verdelen

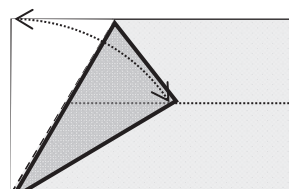
een hoek van 60° vouwen



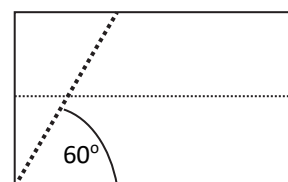
1 dubbel vouwen



2 maak een vouw vanuit het punt links onder zodat het punt linksboven tot op de middenvouw komt



3 vouw de omgevouwen flap weer terug



4 en je hebt een hoek van 60°

Uitdaging: bewijs dat deze manier van vouwen exact een hoek van 60° oplevert.

Tip: gebruik de derde figuur en bedenk wat er bij vouwen = spiegelen gelijk blijft. Zet letters bij de verschillende punten.

Zo bijvoorbeeld:

Als je nu nog lijnstuk DH erbij tekent dan geldt:

DH = AH (D is spiegelbeeld van A)

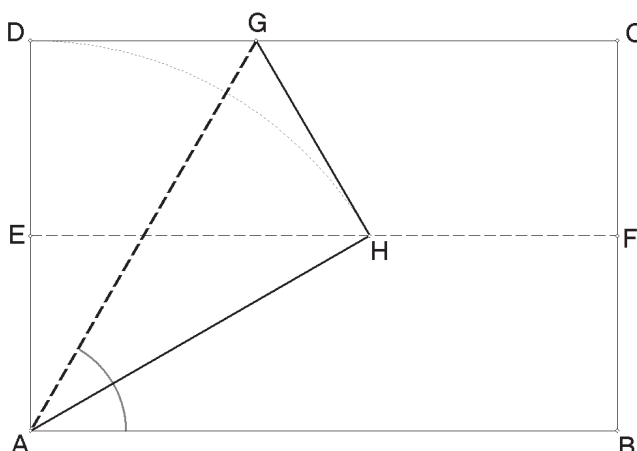
AH = AD (H is spiegelbeeld van D)

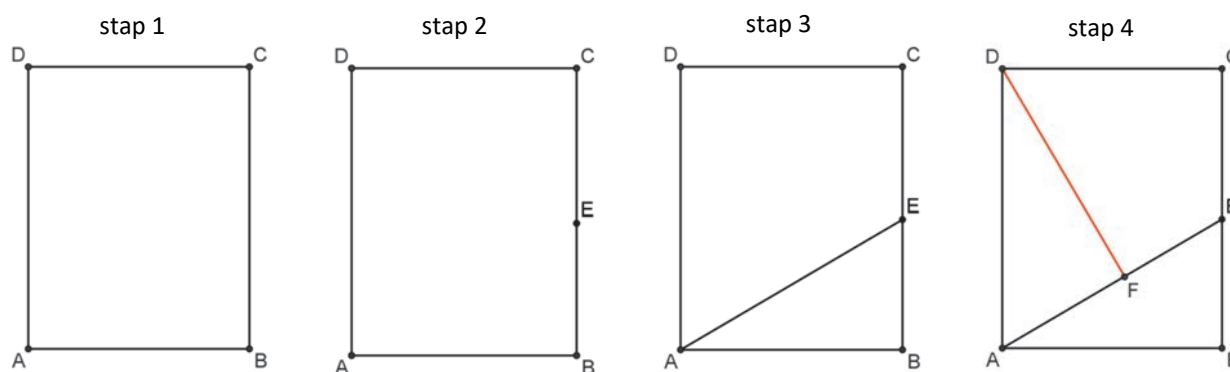
Dus DH = AH = AD

Driehoek ADH is dus gelijkzijdig

AG is bissectrice van hoek DAH

Dus is $\angle DAG = 30^\circ$ en dus is $\angle BAG = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$



Verkennen van het probleem:

- 1 Neem een rechthoek (ABCD). Leg hem rechtop voor je neer.
- 2 Kies op de rechterzijde een punt (E) iets onder het midden.
- 3 Teken (of vouw) het lijnstuk van het hoekpunt links onder (A) naar het zo juist gekozen punt (E).
- 4 Teken (of vouw) de loodrechte afstand (**DF**) van het hoekpunt linksboven (D) naar het zo juist getekende (gevouwen) lijnstuk (AE).
- 5 Knip de rechthoek in drie delen over de getekende (gevouwen) lijnstukken (AE en **FD**).

Tot zover het voorwerk.

Een aantal vragen:

Schuif nu de drie stukken net zo lang over tafel totdat je een vierhoek hebt die op een vierkant lijkt..

Denk eens na over de volgende aantal vragen:

Welke lijn stukken zouden even lang moeten zijn? *Gebruik markeerstiften.*

Waarom is dat nu niet zo zeker?

Waarom moet DF wel loodrecht op AE getekend (gevouwen) worden?

Welke voorwaarde(n) zou je moeten stellen zodat er wel een vierkant ontstaat? ¹

Omdat punt E min of meer willekeurig gekozen is, moet daarover meer duidelijkheid komen.

Kun je zelf bedenken welke voorwaarde voor punt E moet gelden?

Tip:

Welk verband heeft lijnstuk AE met het gestelde probleem?

Naar de oplossing:

De oplossing zit in het gegeven dat de oppervlakte van het vierkant even groot is als de oppervlakte van de gegeven rechthoek.

Uitgaande van de zijden van de door jou gekozen rechthoek kun je de lengte van de zijden van het vierkant berekenen. Hoe?

Welke voorwaarde volgt hieruit voor lijnstuk AE?

Probeer met een nieuwe rechthoek uit of het aangepaste stappenplan (stap 2) dan wel tot een vierkant leidt.

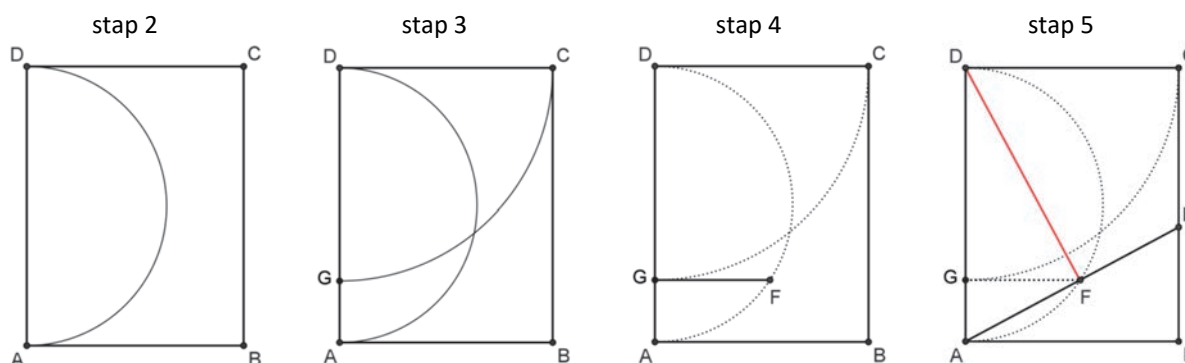
Maar dan zijn we er nog niet!

Als je punt E hebt kun je de tekening wel afmaken, maar dan moet nog bewezen worden dat DF precies even lang is als AE.

Probeer dit te bewijzen.

¹ Met een meetkundeprogramma zou je dit punt kunnen slepen en kijken wat er gebeurt met de vlakdelen.

Een andere manier:



- 1 Neem een rechthoek (ABCD). Leg hem rechtop voor je neer.
- 2 Teken de halve cirkel met als middellijn de linker zijkant (AD) van de rechthoek.
- 3 Pas vanuit het hoekpunt linksboven (D) de lengte van de korte zijde (CD) van de rechthoek af naar een punt (G) op de lange zijde er onder.
- 4 Teken vanuit dit punt (G) de loodlijn op de linker zijkant naar een punt (F) op de halve cirkel.
- 5 Teken door dit laatste punt vanuit het hoekpunt linksonder (A) het lijnstuk (AE) tot een punt op de rechterzijkant (E), en verbind dit punt met het hoekpunt linksboven (FD).
- 6 Knip de rechthoek in drie delen over de getekende lijnstukken (AE en FD).

Tot zo ver het voorwerk.

Een aantal vragen:

Schuif de drie delen van de rechthoek over tafel totdat je een vierkant hebt.

Denk eens na over de volgende aantal vragen:

Welke lijn stukken zouden even lang moeten zijn? *Gebruik markeerstiften.*

Waarom is hoek AFD een rechte hoek?

Welke hoeken zijn gelijk? (gebruik o en x)

Welke driehoeken zijn congruent?

Naar de oplossing:

De oplossing zit in het gegeven dat de oppervlakte van het vierkant even groot is als de oppervlakte van de gegeven rechthoek.

Uitgaande van de zijden van de door jou gekozen rechthoek kun je de lengte van de zijden van het vierkant berekenen. Hoe?

Noem de korte zijde van de rechthoek a , en de lange zijde b .

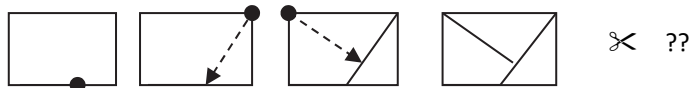
Welke lengte zou de zijde van het vierkant dan moeten hebben?

Hoe kun je uit de gelijkvormigheid van de driehoeken AFG en FDG de lengte van FG berekenen?

Hoe kun je vervolgens de lengte van DF berekenen?

In deze opdracht ga je onderzoeken hoe je een willekeurige rechthoek in drie stukken moet knippen zodat je van deze drie stukken ook een vierkant kunt leggen. Als je geen liniaal en potlood hebt kun je ook de oplossing vinden door alleen te vouwen.

Deel 1 : van rechthoek naar (bijna vierkante) rechthoek



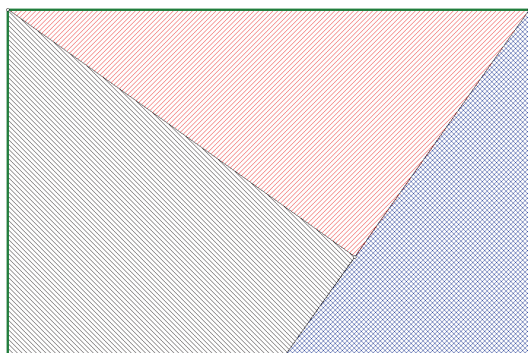
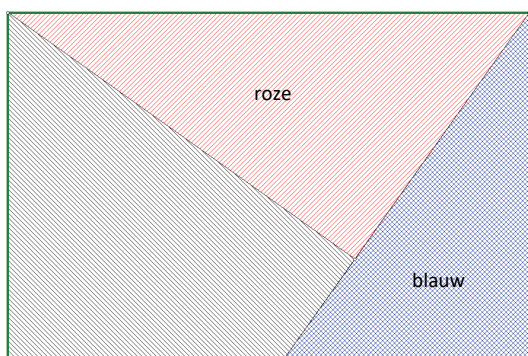
- Neem een A4-tje, leg het dwars voor je neer.
- Kies op de onderrand een punt iets rechts van het midden.
- Trek vanuit dat punt een lijntje naar het hoekpunt rechtsboven. Je kunt het lijntje eerst vouwen.
- Teken een lijntje vanuit het hoekpunt linksboven loodrecht naar de schuine lijn.
- Hoe kun je die loodrechte lijn ook vouwen?
- ✂ Knip de drie stukken waarin de rechthoek nu verdeeld is uit.
- Leg ze zo tegen elkaar dat er een bijna vierkante rechthoek verschijnt.

Kleur met een markeerstift de zijden van de nieuwe rechthoek.

Welke voorwaarde moet er zijn zodat de nieuwe rechthoek een vierkant is?

Deel 2 : de verdeling met behulp van een benadering van de lengte van de zijde van het vierkant.

- Hoe groot is de oppervlakte van de rechthoek?
- Hoe groot is dus de oppervlakte van het vierkant?
- Welke vergelijking kun je nu opstellen voor de (onbekende) zijde van het vierkant?
- Hoe kun je nu in de witte rechthoek (of van een A4-tje) de drie stukken tekenen?
- Doe dit ook en controleer of je met de drie stukken ook echt een vierkant krijgt.



Deel 3 : op weg naar de oplossing

Je ziet een rechthoek getekend die in drie stukken verdeeld is.

- Knip de drie stukken van de gegeven rechthoek uit. Leg ze op de witte rechthoek.
- Leg nu de blauwe driehoek in de roze driehoek met de lijntjes die de zijden van het vierkant worden op elkaar.
- Er komt nu een extra lijntje in zicht. Er zijn twee congruente driehoeken te zien.
- Omdat een van de zijden van de blauwe rechthoek een zijde van de oorspronkelijke rechthoek is kun je een lijn tekenen (of vouwen) waarop de T-splitsing van de drie stukken moet komen te liggen, ofwel het hoekpunt van de rechte hoek van de roze driehoek. Waar moet je die lijn tekenen / vouwen?
- De rechte hoek van de roze driehoek moet aan de stelling van Thales voldoen. Wat moet je dan tekenen om te zorgen dat de T-splitsing van de drie stukken, ofwel het hoekpunt van de rechte hoek van de roze driehoek, aan die voorwaarde voldoet? Als je alleen wilt vouwen, welke straal moet je dan "omcirkelen" naar de lijn uit het vorige punt (➤)?

Mocht het niet helemaal lukken dan volgt hierna de oplossing stap voor stap.

Deel 4 : de oplossing stap voor stap

Noem de oorspronkelijke rechthoek $ABCD$.

Noem het punt op de onderrand (AB) E .

Noem het punt waar de loodlijn uit D op CE komt F .

Voor punt F gelden nu twee voorwaarden. Die bepalen waar je punt F exact moet gaan tekenen.

1 $\angle CFD$ moet 90° zijn

2 CE en DF moeten even lang zijn

- Wat volgt uit de grootte van $\angle CFD$, de 1^e voorwaarde, voor de ligging van F ?
Ofwel, waar liggen alle punten F die met C en D een rechte hoek CFD maken?
Volgens de stelling van Thales liggen die op een halve cirkel met middellijn CD .
- Teken in de witte rechthoek de meetkundige plaats van de punten F zodat $\angle CFD = 90^\circ$.
- In deel 3 kwam een extra lijntje tevoorschijn toen de blauwe driehoek in de roze gelegd was.
Met een punt G op CD volgt uit de 2^e voorwaarde dat $\triangle BCE$ congruent moet zijn met $\triangle GDF$.
 - o Bewijs deze congruentie. Welk congruentiegeval gebruik je?
 - o Welk lijnstuk moet als gevolg van de congruentie dus even lang zijn als BC ?
- Teken in de witte rechthoek nu de exacte plaats van punt G op CD en de loodlijn in G op CD .

Het snijpunt van deze loodlijn met de eerder getekende meetkundige plaats (cirkelboog) is de exacte plaats van F .

Samenvattend:

Als het goed is heb je zojuist ontdekt dat je de korte zijde van de rechthoek moet afpassen op de lange.

Vervolgens moet je een loodlijn tekenen naar de cirkelboog met middellijn CD . Het snijpunt F is de T-splitsing van de drie puzzelstukjes die de rechthoek verdelen om er een even groot vierkant mee te maken.

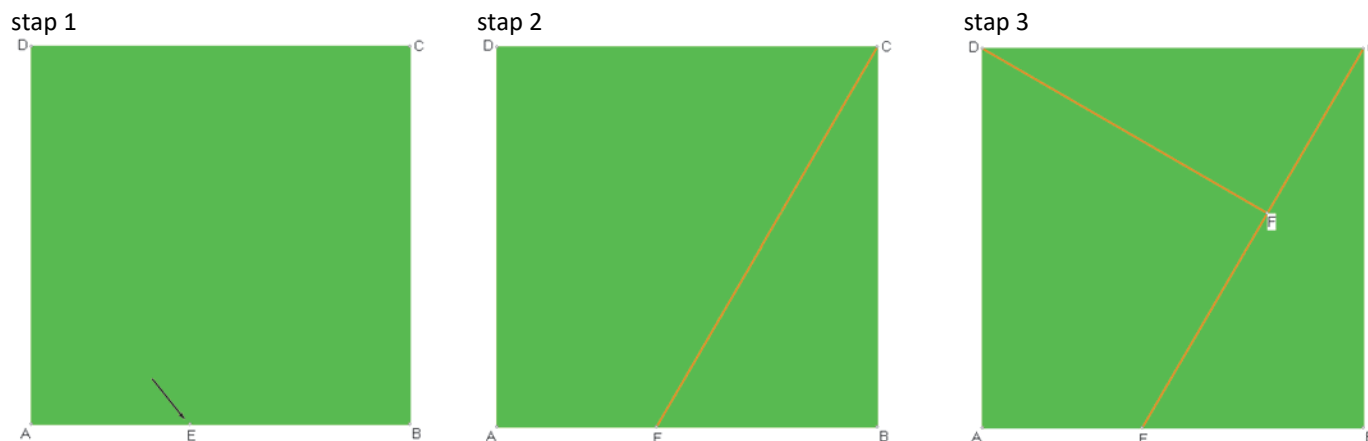
Daarmee ligt de oplossing van de puzzel vast.

- Teken in de witte rechthoek de exacte oplossing van de puzzel.
- Knip de drie puzzelstukjes uit en controleer of je er een vierkant mee kunt leggen.

Tot slot nog dit:

Een hele lange smalle rechthoek zul je nooit in 3 stukken kunnen knippen waarmee een vierkant gelegd kan worden.

- Onderzoek nu aan welke voorwaarde de afmetingen van de willekeurig gekozen rechthoek moet voldoen om deze puzzel te kunnen maken.



- 1 Neem een vierkant (ABCD) en kies op de onderkant een punt (E) iets links van het midden.
- 2 Teken (of vouw) het lijnstuk van het hoekpunt rechtsboven (C) naar het zo juist gekozen punt (E).
- 3 Teken (of vouw) de loodrechte afstand (DF) van het hoekpunt linksboven (D) naar het zo juist getekende (gevouwen) lijnstuk (CE).
- 4 Knip het vierkant in drie delen over de getekende (gevouwen) lijnstukken (CE en DF).

Tot zover het voorwerk.

Een aantal vragen:

Schuif nu de drie stukken net zo lang over tafel totdat je een vierhoek hebt die op een rechthoek lijkt.

Denk eens na over de volgende aantal vragen:

Welke lijnstukken zijn (samen) de zijden van de rechthoek? *Gebruik markeerstiften.*

Waarom moet DF wel loodrecht op CE getekend (gevouwen) worden?

Hoe kun je uit een vierkant met zijde 12 een rechthoek van 16 bij 9 maken?

Punt E is min of meer willekeurig gekozen.

Wat gebeurt er met de rechthoek als je punt E ergens anders op zijde AB van het vierkant kiest? ¹

Kun je zelf bedenken tussen welke afmetingen de rechthoek komt te zitten bij verschillende posities van punt E op AB?

Het lijkt er op dat je op deze manier altijd een rechthoek krijgt.

Naar de oplossing:

Wat moet je bewijzen om zeker te weten dat de stukken een rechthoek vormen?

Er zijn meer bewijzen mogelijk.

Je kunt bijvoorbeeld bewijzen dat de nieuw gevormde vierhoek drie rechte hoeken heeft.

Gebruik hierbij gelijkvormige driehoeken (uit het vierkant).

Je kunt ook bewijzen dat het een parallellogram met een rechte hoek is.

Wanneer is een vierhoek een parallellogram?

Bijvoorbeeld als overstaande zijden twee aan twee even lang zijn.

Hoek D is recht, dus nu nog bewijzen dat overstaande zijden twee aan twee gelijk zijn.

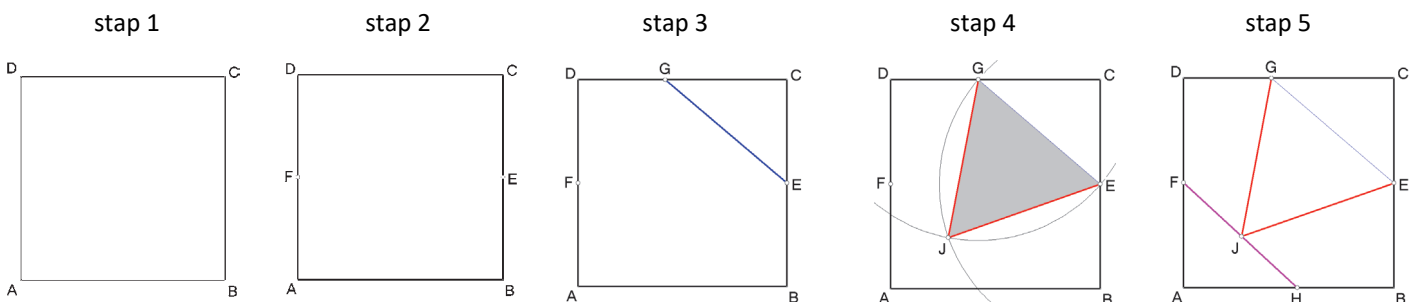
Uitgaande van de zijde van het vierkant (z) kun je de bij de gekozen (langste) zijde ($CE = b$) van de rechthoek de kortste zijde (a) berekenen met gelijkvormige driehoeken. Hoe?

Als het goed is moet de oppervlakte van de rechthoek gelijk zijn aan de oppervlakte van het vierkant. Klopt dit?

Je kunt dit ook met getallen doen zoals hierboven met zijde 12 van het vierkant en langste zijde 16 van de rechthoek.

¹ Met een meetkundeprogramma zou je dit punt kunnen slepen en kijken wat er gebeurt met de vlakdelen.

Verkennen van het probleem:



- 1 Neem een vierkant (ABCD).
- 2 Neem het midden (E) van de rechterzijde (BC) en (F) van de linkerzijde (AD).
- 3 Teken vanuit E een lijnstuk naar een punt (G) net links van het midden van de bovenkant (CD).¹
- 4 Teken binnen het vierkant een gelijkzijdige driehoek (EGJ) op het zo juist getekende lijnstuk (EG).
- 5 Teken het lijnstuk van het midden (F) van de linkerkant door de top (J) van de gelijkzijdige driehoek naar de onderkant (H).
- 6 Knip vanuit het laatst getekende punt (H) de drie getekende lijnstukken (HF, JG en JE) tot aan de scharnierpunten (F, G en E) op de drie randen (links, boven en rechts).

Let op dat je de stukken niet los knipt. Ze moeten in de scharnierpunten nog net aan elkaar vast blijven zitten!

Tot zover het voorwerk.

Een aantal vragen:

Scharnier nu de vier stukken om de drie scharnierpunten.

Denk eens na over de volgende aantal vragen:

Welke lijn stukken sluiten precies op elkaar aan. Waarom is dat zo? *Gebruik markeerstiften.*

Welke lijnstukken sluiten niet per se goed aan?

Welke voorwaarde(n) zou je moeten stellen zodat ze wel goed aansluiten?¹

Omdat punt G min of meer willekeurig gekozen is, moet daarover meer duidelijkheid komen.

Kun je zelf bedenken welke voorwaarde voor punt G moet gelden?

Tip:

Welk verband heeft lijnstuk EG met het gestelde probleem?

Naar de oplossing:

De oplossing zit in het gegeven dat de oppervlakte van het vierkant even groot is als de oppervlakte van de gelijkzijdige driehoek.

Uitgaande van de zijde van het door jou gekozen vierkant kun je de lengte van de zijde van de gelijkzijdige driehoek berekenen.

Hoe?

Welke voorwaarde volgt hieruit voor lijnstuk EG?

Probeer met een nieuw vierkant uit of het aangepaste stappenplan (stap 3) dan wel tot een aangesloten gelijkzijdige driehoek leidt.

Maar dan zijn we er nog niet!

Als je punt G hebt kun je de tekening wel afmaken, maar dan moet nog bewezen worden dat FH precies evenwijdig loopt met EG.

Tip:

Het lijkt handig om voor dit bewijs het stappenplan te wijzigen. In stap 4 lijnstuk FH evenwijdig tekenen aan EG, en dan (stap 5) een gelijkbenige driehoek (EGJ) op lijnstuk EG tekenen met de top FH. Als je kunt bewijzen dat de top (J) van de gelijkbenige driehoek (EGJ) dan precies even ver van de basis (EG) ligt als wanneer de driehoek gelijkzijdig was, dan is het bewijs klaar.

In de hand-out staan twee bewijzen.

¹ Met een meetkundeprogramma zou je dit punt kunnen slepen en kijken wat er gebeurt met de vlakdelen.

https://www.youtube.com/watch?v=yc_bp5B-MWs

Van de rechthoek heeft de korte zijde lengte a en de lange zijde lengte b .

De oppervlakte van de rechthoek is dan $a \cdot b$.

Voor de zijde r van het vierkant geldt dan $r^2 = ab$ ofwel $r = \sqrt{ab}$.

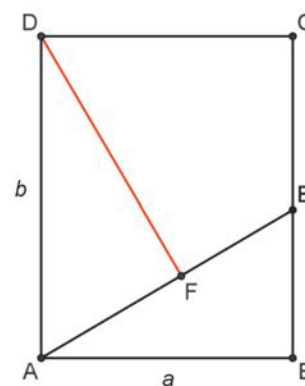
Dan is de lengte van AE gelijk aan $\sqrt{ab}$.

Driehoek ABE is gelijkvormig met driehoek DAF (hh).

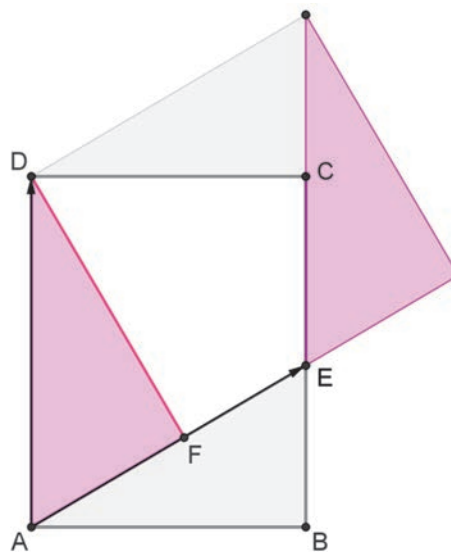
Dan is $DF : AD = AB : AE$, dus $\frac{DF}{b} = \frac{a}{\sqrt{a \cdot b}}$.

Dan volgt $DF = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a \cdot b}} = \sqrt{ab}$.

Dus is $AE = DF$ en is de nieuwe rechthoek een vierkant.



In de tweede figuur zie je hoe de stukken verschoven kunnen worden om van de rechthoek een vierkant te maken.



¹ Euclides jaargang 81 nr. 3 december 2005 p. 104 - 105

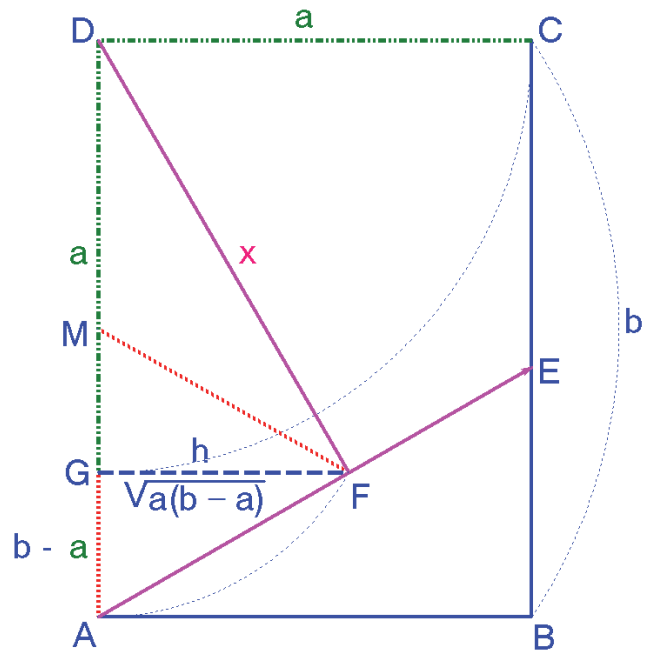
Ga uit van (rechttopstaande) rechthoek ABCD.
 $AB = CD = a$ en $BC = AD = b$.
 G ligt op AD zodat $DG = a$, dus dan is $GA = b - a$.

Teken de middelevenredige van DG en GA door een loodlijn vanuit G op AD naar de halve cirkel op AD te tekenen. Zie figuur.
 De vraag is nu of $DF = \sqrt{ab}$ = de zijde van het vierkant en ook of $AE = \sqrt{ab}$.

Met $FG = h$ is h de middelevenredige van $DG = a$ en $GA = b - a$,
 dus $h = \sqrt{a(b - a)}$.
 Nu is hoek $AFD = 90^\circ$ (Thales). Noem $DF = x$.
 Met de stelling van Pythagoras in $\triangle DFG$ is nu
 $x^2 = h^2 + a^2 = a(b - a) + a^2 = ab - a^2 + a^2 = ab$, dus $x = \sqrt{ab}$.

$\triangle DGF \cong \triangle ABE$ want
 $DG = AB = a$, $\angle DGF = \angle ABE = 90^\circ$, $\angle GDF = \angle BAE = 90^\circ - \angle DAF$
 [gebruik $o + x = 90^\circ$ in $\triangle ADF$ en in $\angle BAD$]

Dus is ook $AE = DF = \sqrt{ab}$



Van vierkant naar gelijkzijdige driehoek ²

Teken vierkant ABCD.
E is het midden van BC.
F is het midden van AD.

Noem $AB = r$, neem $z = \frac{r}{\sqrt[4]{3}}$ ofwel $r = z \cdot \sqrt[4]{3}$.

[de zijde van de gevraagde gelijkzijdige driehoek is $2z$]

G is het snijpunt van CD met de cirkel (E, z), dus $EG = z$.

Teken lijnstuk FH parallel met EG. Zie figuur 1.

Als de afstand tussen de lijnstukken EG en FH nu gelijk is aan $\frac{1}{2} z \sqrt{3}$, dan kan punt J op lijnstuk FH getekend worden zodat driehoek EGI gelijkzijdig is. Zie figuur 2.

De driehoeken ECG en FAH zijn congruent.
Dus $HA=GC$ en $DG=HB$. Bij het scharnieren komt dan FA op FD, EC op EB en $HA+DG$ op $GC+HB$.

Als $IJ = \frac{1}{2} z \sqrt{3}$ dan is de oppervlakte van driehoek EGI gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{1}{2} z \sqrt{3} = \frac{1}{4} z^2 \sqrt{3}$, de oppervlakte van de totale driehoek is dan een factor 4 groter dus $z^2 \sqrt{3}$. Dit klopt met de oppervlakte van het vierkant (r^2) en die van de gelijkzijdige driehoek ($= (z \cdot \sqrt[4]{3})^2 = z^2 \sqrt{3}$).

Voor het gemak nemen we $r = 2$.

Bedenk een rechthoekige assenstelsel met A als oorsprong.

Punt F is dan (0,1) en punt E is dan (2,1).

De afstand van E tot lijn FH berekenen.

$$FH = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}; AH^2 = FH^2 - AF^2 \text{ geeft } AH = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}} - 1} = \frac{\sqrt{4 - \sqrt{3}}}{\sqrt[4]{3}}$$

De vergelijking van lijn FH:

$$y = -\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{4 - \sqrt{3}}} x + 1$$

De afstand van (2,1) tot lijn FH is dan

$$\frac{\left| 1 + \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{4 - \sqrt{3}}} \cdot 2 - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{4 - \sqrt{3}}} \right)^2 + 1}} = \frac{\frac{\sqrt[4]{3} \cdot 2}{\sqrt{4 - \sqrt{3}}}}{\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} + 1}} = \frac{\frac{2\sqrt[4]{3}}{\sqrt{4 - \sqrt{3}}}}{\sqrt{\frac{4}{4 - \sqrt{3}}}} = \frac{2\sqrt[4]{3}}{2} = \sqrt[4]{3}$$

Omdat $r = 2$ zou $\frac{1}{2} z \sqrt{3}$ nu gelijk moeten zijn aan $\sqrt[4]{3}$

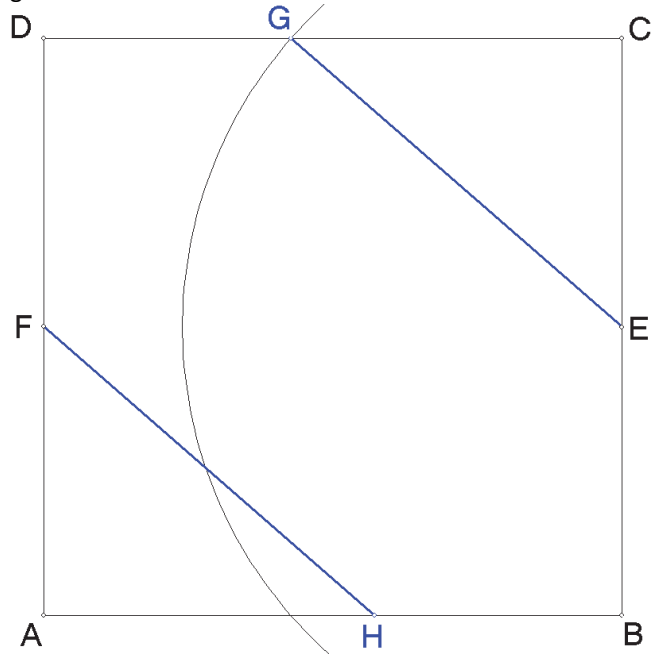
want $\frac{1}{2} z \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{\sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[4]{3}$, en dat klopt!

Omgekeerd zal FH parallel lopen aan EG als je op zijde EG een gelijkzijdige driehoek tekent met top J. Zie figuur 3,

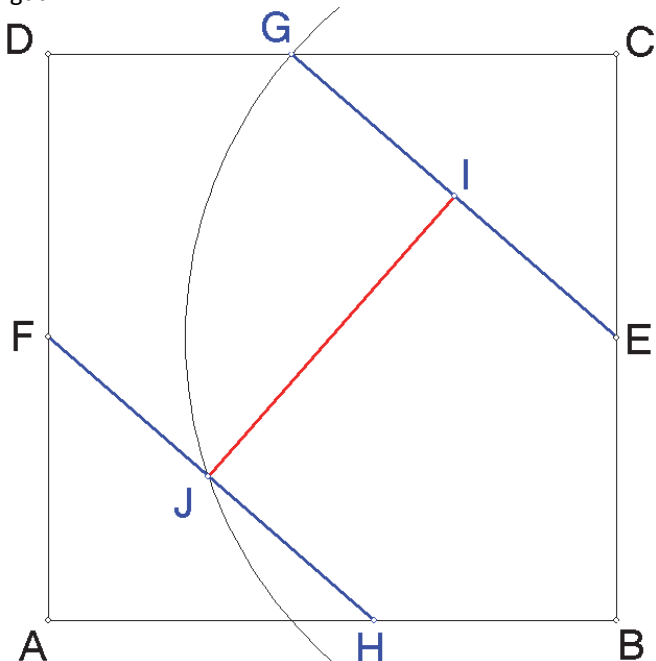
het bewijs

NWD 2015

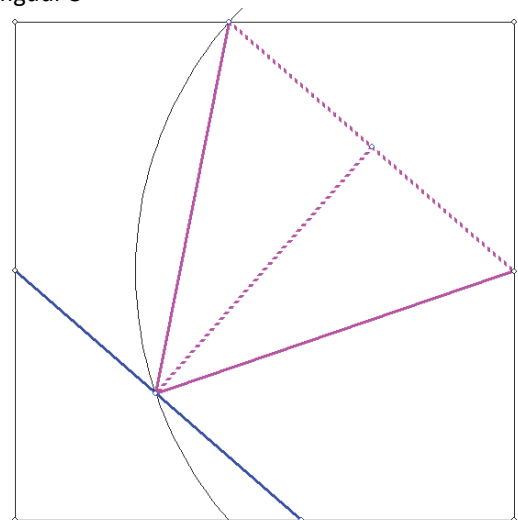
figuur 1



figuur 2



figuur 3



² Euclides jaargang 80 nr. 7 mei 2005 p. 380, 381, 386

We noemen het snijpunt van AB met de lijn door het midden F van AD , die evenwijdig is met EG , K . We gaan nu aantonen dat punt H op FK ligt. Uit H op FK volgt immers dat de lijnen FH en FK samenvallen en dat lijn FH dus, net als lijn FK , evenwijdig is met EG .

We noemen het middelpunt van vierkant $ABCD$ (het midden van EF) M en de snijpunten van de lijn door M die loodrecht staat op FK en (dus ook) op EG met deze laatste twee lijnen respectievelijk S en T . Zie figuur 4. Driehoek MET is gelijkvormig met driehoek EGC (hh) en hieruit volgt

$$MT : EC = ME : EG \text{ ofwel } MT : r = r : z \text{ en dus } MT = \frac{r^2}{z} \text{ ofwel } MT = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3} \cdot r.$$

Verder zijn de driehoeken MFS en MET congruent (HZH of ZHH) en hieruit volgt $MS = MT$, dus de afstand ST tussen de evenwijdige lijnen FK en EG is gelijk aan $2 \cdot MT$.

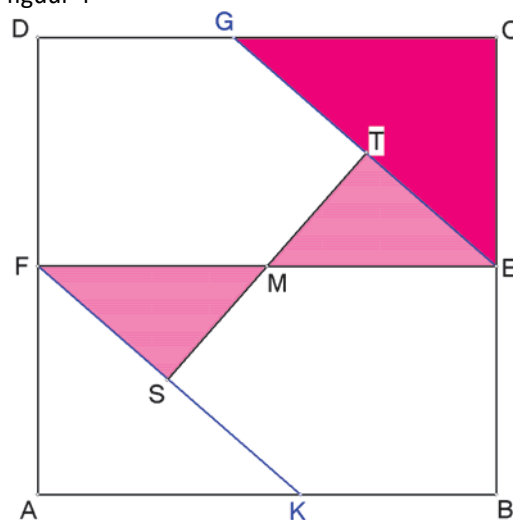
Dus de afstand tussen de evenwijdige lijnen FK en EG is $2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt[4]{3} \cdot r$ ofwel $\sqrt[4]{3} \cdot r$.

De hoogte van de gelijkzijdige driehoek EGH is $\frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot z$ ofwel $\frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot r$

en dit is (omdat $\sqrt{3} = \sqrt[4]{9}$) gelijk aan $\sqrt[4]{3} \cdot r$.

Dus de hoogte van driehoek EGH is gelijk aan de afstand tussen de evenwijdige lijnen FK en EG en hieruit volgt dat de top H van driehoek EGH op lijn EK ligt. Q.E.D.

figuur 4



constructie van voor de halve zijde z van de gelijkzijdige driehoek bij het vierkant met zijde $2r$.

[in vergelijking met de hiervoor gegeven bewijzen zijn punt E en F verwisseld]

Construeer een gelijkzijdige driehoek met basis BF en noem de top van deze driehoek U . Construeer het midden V van de zijde FU .

Dan is BV hoogtelijn van een gelijkzijdige driehoek met zijden $(BF =) r$, dus

$$BV = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot r.$$

Construeer vervolgens het snijpunt W van BF met de cirkel met middelpunt B en straal BV .

Dan geldt $BW = BV = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot r$.

Hieruit volgt:

$$FW = r - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot r.$$

Construeer nu het snijpunt X van de loodlijn door W op BC met de cirkel met middelpunt F en straal $FC = r$.

Dan geldt $\cos \angle WFX = \frac{FW}{FX} = \frac{r - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot r}{r} = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{3}$, dus

$$\cos \angle CFX = \frac{1}{2} \sqrt{3} - 1.$$

Stel $\angle CFX = 2\phi$, dan geeft invullen in

$$\cos 2\phi = 2 \cos^2 \phi - 1: \frac{1}{2} \sqrt{3} - 1 = 2 \cos^2 \phi - 1 \text{ en dus:}$$

$$\cos \phi = \sqrt{\frac{1}{4} \sqrt{3}} = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3}.$$

Construeer het midden Y van lijnstuk CX en ten slotte het snijpunt Z van FY met CD .

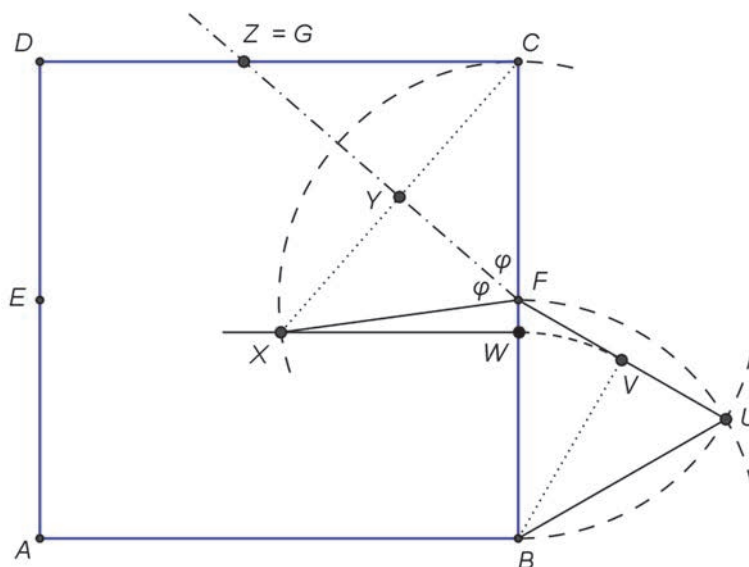
Dan is FZ bissectrice van hoek CFX , dus $\angle CFZ = \phi$ en zo vinden we: $\cos \angle CFZ = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3}$.

Ook geldt (zie driehoek FCZ): $\cos \angle CFZ = \frac{FC}{FZ}$ en $FC = r$, dus $\frac{r}{FZ} = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3}$.

Hieruit volgt: $FZ = \frac{r}{\frac{1}{2} \sqrt[4]{3}}$ ofwel $FZ = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot r = z = FG$.

Dus $Z = G$.

Deze constructie kan ook binnen het vierkant worden uitgevoerd door punt U binnen het vierkant te tekenen.



Henry Dudeney (1857-1930) découvrit une ingénieuse transformation de polygones suspendus. Il en exposa un modèle en acajou devant la Royal Society de Londres en 1905. Il s'agit de transformer 4 pièces groupées d'un triangle équilatéral en un carré de même aire.

