23^{e} Nationale Wiskunde Dagen
3 & 4 februari 2017

Hand-out

workshop

van een som uit het boek naar een leuke les

Rutger Kock
Rob van Oord

Van een som uit het boek naar een leuke les

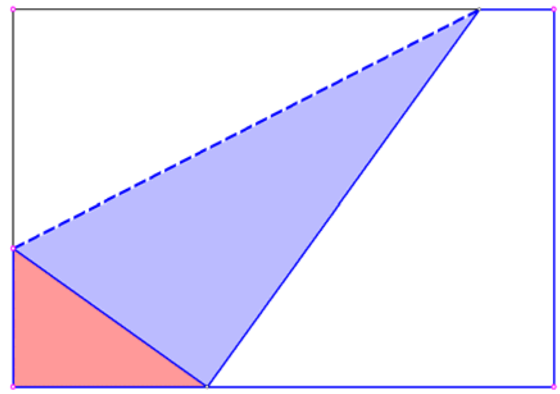
In de workshop willen we laten ervaren hoe een andere aanpak van een les dan sommen uitleggen of bespreken kan leiden tot een leuke les.
Vaak is het een andere werkvorm, maar het kan ook zijn dat eerst concreet aan een probleem gewerkt wordt, zonder direct naar een antwoord toe te werken. De vraagstelling nodigt uit tot wiskundige denkactiviteiten. Op deze manier kan een gewone som uit het boek, die je op een andere manier brengt, tot een uitdagende lessituatie leiden.

Te denken valt aan :

- Vouwen van een rechthoekig blaadje (b.v. een A4-tje), waardoor een driehoek ontstaat die varieert in oppervlakte.
  Of een gevouwen posterlijst met variabele oppervlakte.
  Of een gevouwen parallellogram.
- Het “vouwen” van een ellips of een hyperbool, en de betekenis van de vouwlijnen ontdekken.
- Van getekende lijnen naar een parabool.

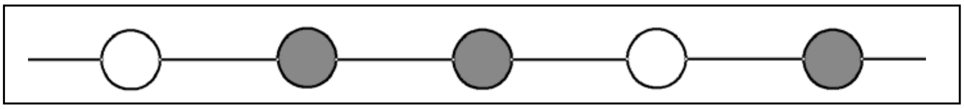
Werkvormen als speeddaten, estafette, DUOotjes, pizzapunten, puzzelen enzovoorts zijn ook mooie manieren om afwisseling in je les te creëren.
We geven in de workshop daar enkele voorbeelden van.

Getal en Ruimte vwo B dl4 H14 p118 opg A28



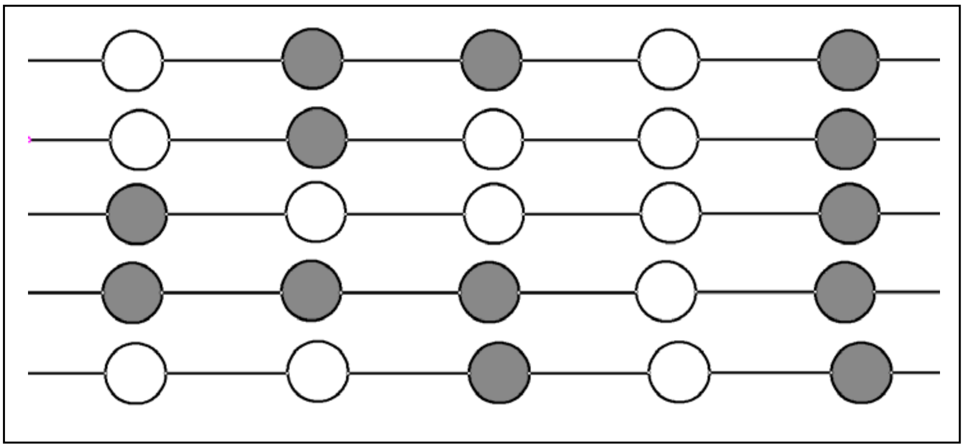
voorbeeld partituren

Een partituur is opgebouwd uit regels van 5 noten.
Wordt een open noot aangewezen, dan zingen de meisjes “Oh”.
Wordt een dichte noot aangewezen dan zingen de jongens “La”.
In dit voorbeeld staat dus “ Oh La La Oh La “.



Deze regel even oefenen. Nog een keer dat kan veel beter en luider.

Met de gehele klas wordt dan het volgende lied van 5 regels gezongen.



In de bijlage staan een flink aantal niet ingevulde regels.

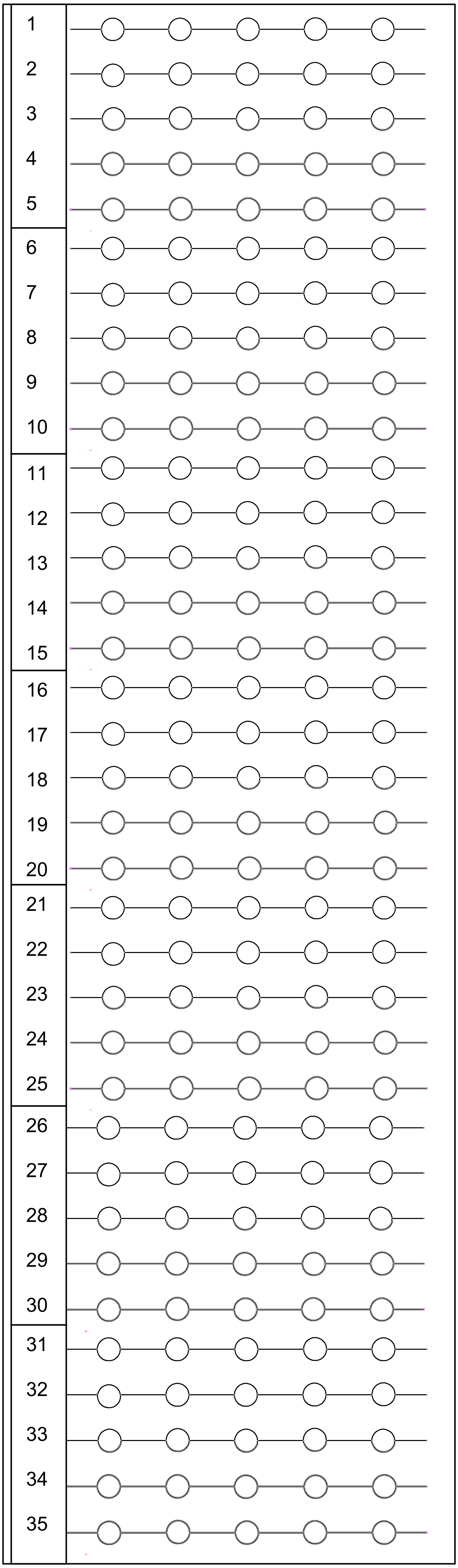
Componeer je eigen lied door noten zwart te maken.
Er mogen niet twee dezelfde regels in zitten.

NWD 2017

Opdracht aan de klas:

Componeer een ze lang mogelijk lied van 5 noten per regel waarbij geen enkele regel twee keer voor mag komen.

Wie vindt het grootste lied?



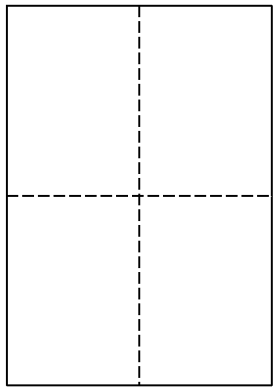
Pythagoras NWD 2017

[Laat elke leerling 2 getallen a en b opschrijven tussen 5 en 15 (a>b).]
Geef elke leerling een leeg blanco A4-tje. Instructie:
Vouw het blad 2 keer dubbel.
Laat langs de rand vanuit de losse hoekpunten twee afstanden a en b in hele centimeters afpassen.
[Bijvoorbeeld 10 cm en 7 cm.]
Teken de schuine verbindingslijn tussen deze punten.
Knip over deze schuine lijn tegelijk vier driehoeken van het blaadje.
Leg de vier stukken op een ruitjesblad tegen elkaar zodat in het midden een vierkant ontstaat.

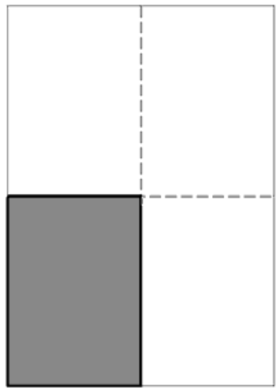
Bereken de exacte oppervlakte van het ingesloten vierkant.
Welk verband valt je op met de afgemeten afstanden?

Hoe kun je daarbij de zijde c (in 1 decimaal nauwkeurig) berekenen?
Meet ook deze zijde c in mm nauwkeurig.
Bereken het kwadraat van de gemeten zijde.
Tip: bereken eens a^2 en b^2 .

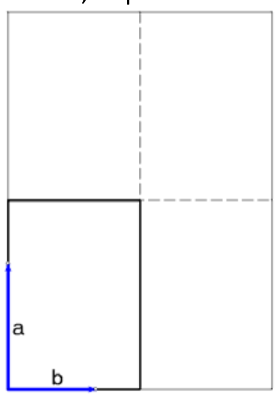
vouw 2 keer dubbel



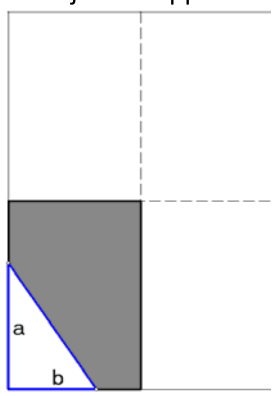
vier lagen op elkaar



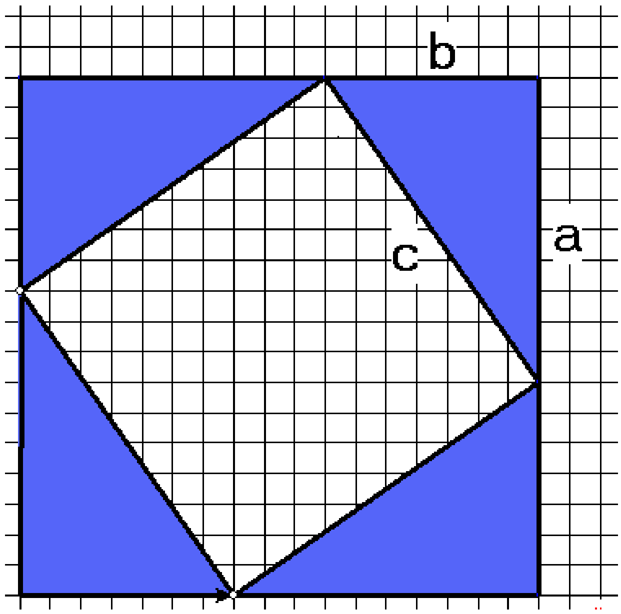
langs de losse randen twee afstanden , a en b, afpassen



langs de verbinding tegelijk vier drie-hoekjes afknippen



Leg de vier driehoekjes tegen elkaar op ruitjes-papier zodat ze een vierkant insluiten



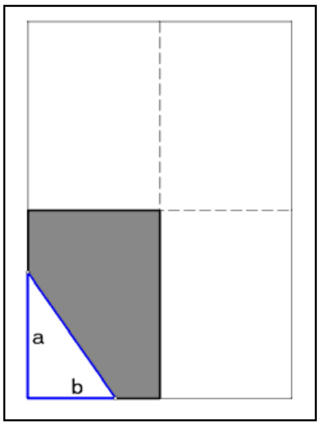
Maak met de hele klas een tabel:

naam	vb	..	..	..											
a	10	..	..	..											
b	7	..	..	..											
…															
…															
………..															
oppvl ingesloten vrknt	..	..	..	..											
c															

werkblad workshop   Pythagoras   NWD 2017

Groepje van 4 tot 6

Jullie gaan van een twee keer dubbelgevouwen blaadje vier gelijke driehoeken afknippen.
Die worden op een ruitjesblad zo neer gelegd dat daarmee een vierkant wordt ingesloten.



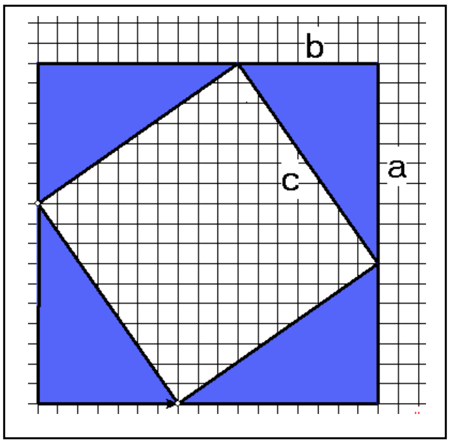
1. Ieder van jullie kiest twee getallen uit 5 tot 15.

2. Vouw een leeg A4tje twee keer dubbel.

3. Meet langs de zijkanten van de losse punten je twee getallen in centimeters af.
   Zet stipjes op de rand.
   Teken de schuine verbindingslijn tussen de getekende stipjes.

4. Knip in 1 keer vier driehoekjes van het blaadje over de getekende schuine lijn.

5. Leg de vier gelijke driehoekjes op een ruitjesblad met de punten
   tegen elkaar zodat in het midden een (gedraaid) vierkant ontstaat.
   Zie figuur.



6. Meet de zijden van het vierkant in mm en bereken de oppervlakte ervan.

7. Bedenk hoe je de exacte oppervlakte van het vierkant kunt berekenen.
   Doe dit.

8. Probeer een verband te vinden tussen de door jou gekozen getallen
   en het oppervlakte getal van je ingesloten vierkant.

Door niet je eigen getallen te nemen maar met a en b te rekenen
kun je met dit figuur ook de stelling (van Pyhtagoras) bewijzen.

9. Hoe zou je dit kunnen doen?

Je kunt de driehoekjes ook op een andere manier neerleggen en daarmee de stelling bewijzen.

10. Hoe zou dat kunnen?

Voor $q>0$ zijn gegeven de punten A(0,q) en B(q,5).

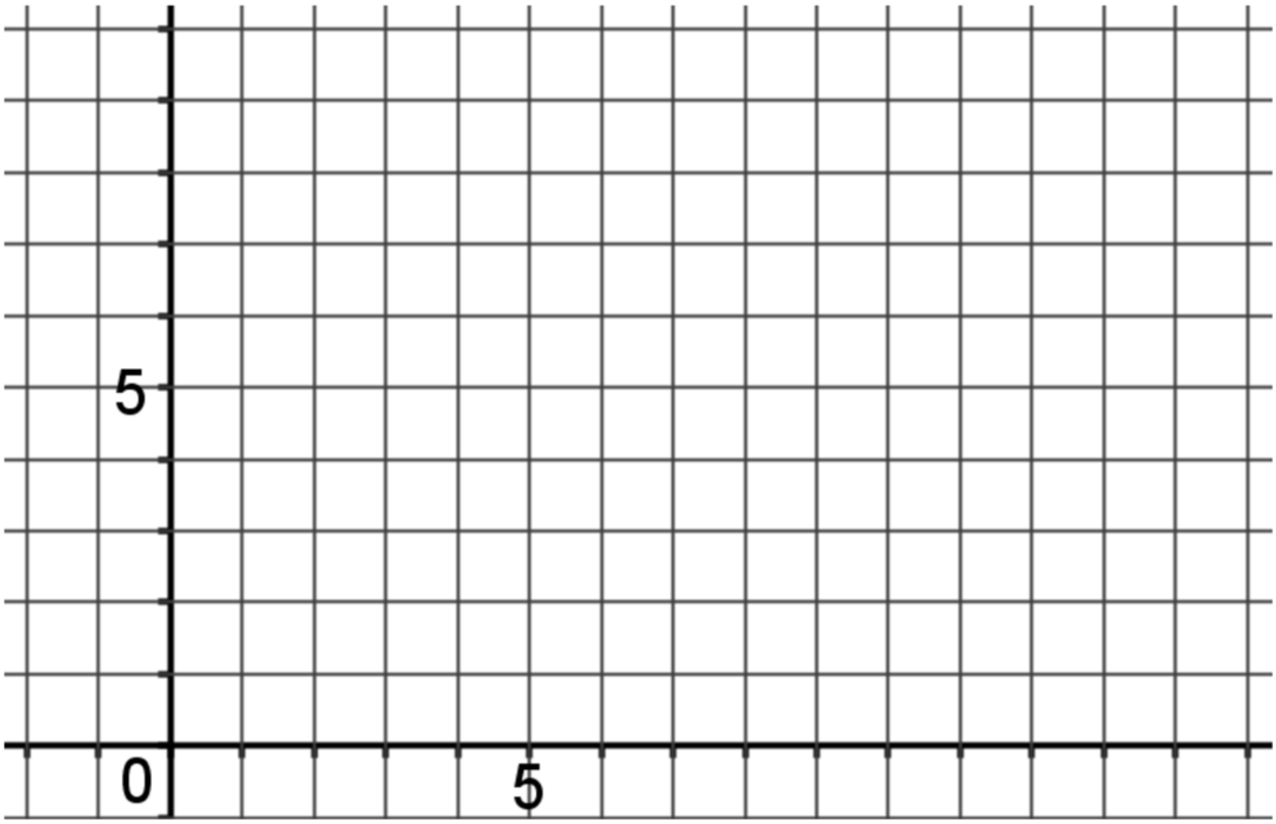
a Maak een tabel met A en B en lengte AB bij verschillende waarden van q (van q=0 t/m q=7).
Teken ook telkens het lijnstuk AB in het rooster.

q	0	1	2	3	4	5	6	7	x
A	(0,..)	(0,..)							
B	(..,5)	(..,5)							
AB	..	√ …	..	..	..	..	..	..	formule √ …

b Wat valt je op als je naar de waarden van AB kijkt?

c Stel een formule op van de lengte van lijnstuk AB, uitgedrukt in x.

d Voor welke waarde van x is AB minimaal?
Kun je dit ook exacte berekenen?



e Bereken exact voor welke waarde van q de lengte van AB = $5\sqrt{5}$.
Teken ook AB voor dit geval. Klopt je antwoord met lengte $5\sqrt{5}$?

antwoord: $AB = \sqrt{q^2 + (5 - q)^2} = \sqrt{2q^2 - 10q + 25}$; min als $q = 2\frac{1}{2}$

werkblad workshop **Kortste lijnstuk?** NWD 2017

Groepje van 4 ot 6:

1. Vul eerst met elkaar de tabel in voor q=0 en q=1.
 Iemand tekent de twee lijnstukken AB voor deze gevallen in de ruitjesfiguur.

q	0	1	2	3	4	5	6	7	x
A	(0,..)	(0,..)							
B	(..,5)	(..,5)							
AB	..	√ …	..	..	..	..	..	..	formule √ …

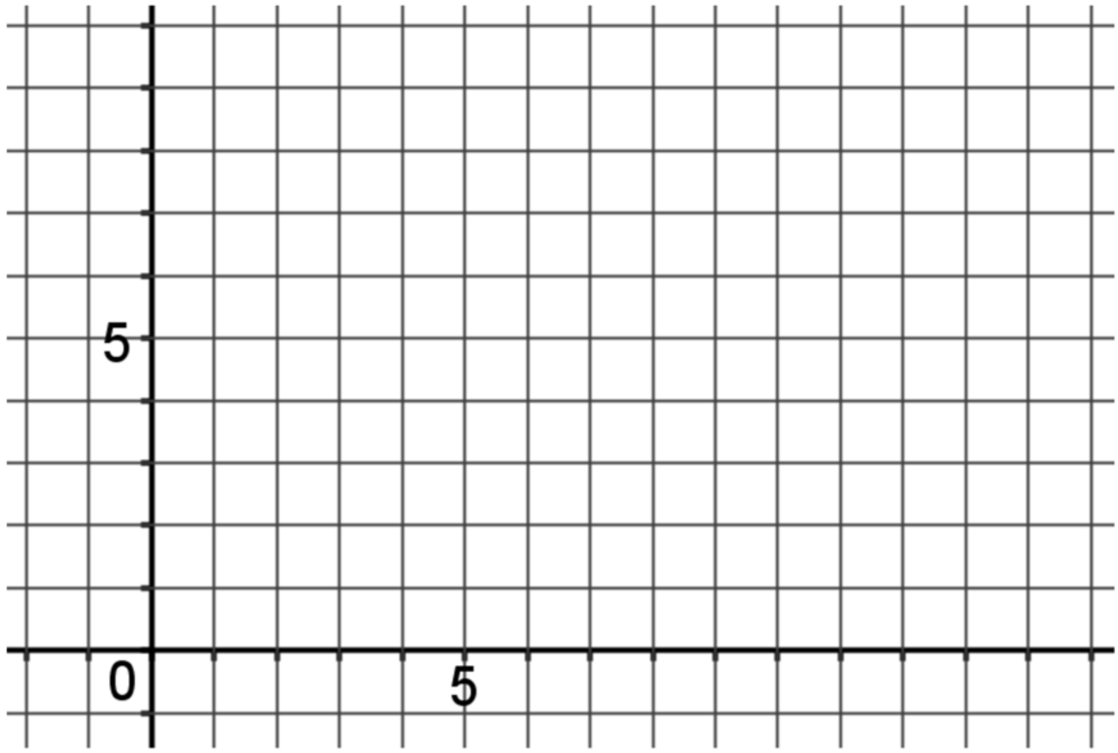
2. Ieder kiest een van de getallen voor q: 2, 3, 4, 5, 6 of 7; zet de getallen in de tabel in de kolom van jouw getal, en teken jouw lijnstuk AB in de ruitjesfiguur.

3. Welke vraag zou je kunnen stellen als je naar de getekende lijntjes kijkt?

4. Stel met elkaar een formule op van de lengte van lijnstuk AB uitgedrukt in x.

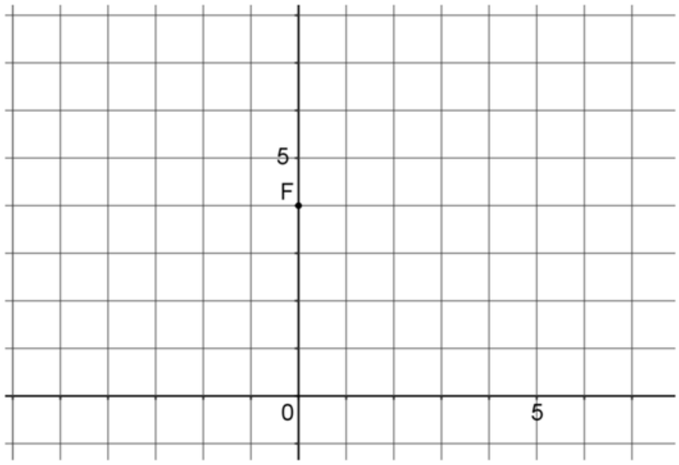
5. Hoe kun je exact berekenen bij welke waarde van x AB het kortst is?

Ruitjesfiguur bij Kortste lijnstuk



Ra ra wat wordt dat? 5vB bij H8 Lijnen en cirkels NWD 2017

Zie de figuur.
Getekend is punt F(0,4) op de y-as.
We gaan nu voor een aantal punten V(q,0) op de x-as een aantal stappen doorlopen.



Zet alle antwoorden in de tabel.

- Samen maken:

1 Neem nu V(q,0) met x_Q=q=6.
2 Teken lijnstuk FV.
3 Geef de coördinaten van het midden M van FV.
4 Bereken de helling *m* van lijnstuk FV.
5 Bereken de helling *a*, loodrecht helling *m* van FV.
6 Teken lijn *l* door M met helling *a* en stel een vergelijking (y=*a*x+*b*) op van lijn *l*.
7 Geef de vergelijking van de verticale lijn *k* door V.
8 Bereken de exacte y-coördinaat van het snijpunt P van de lijnen *k* en *l*. **Roep mij als je dit hebt.**

- Voer nu ieder afzonderlijk de zelfde stappen uit voor de waarde van q die jij in de tabel hebt gekregen.

Wie eerder klaar is kiest zelf een nog niet gekozen waarde voor q, helpt daarna de anderen met hun antwoord.
Dan nog een keer samen voor q=0. Teken nu allemaal de gevonden punten P in je eigen figuur.
Teken een vloeiende lijn door de getekende punten P. **Klaar? Roep mij erbij!**

Wie?	samen	A	B	C	D	samen	zelf kiezen	zelf kiezen	zelf kiezen	samen
x_Q = q	6	2	3	4	-2	0	…	…		q
V										
M										
m										
a (⊥*m*)										
l										
k										
y_P										*
P										

Om over na te denken:

Hoe noem je de lijn *k* die je telkens hebt getekend?

Welke zelfde eigenschap heeft elk punt P?
Denk aan de eigenschap van lijn *k*.

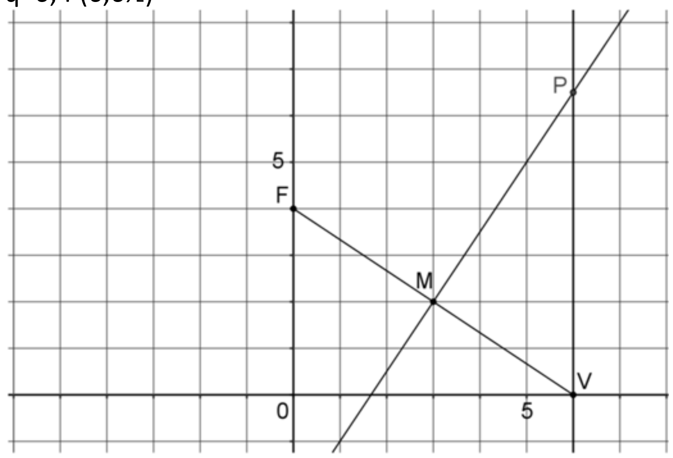
Welke vorm lijkt de kromme door alle getekende punten P te hebben?

Voer nu alle stappen nog eens uit maar met de variabele q (dus geen getal nemen).
Je vindt dan een formule van y_P uitgedrukt in q. Welke formule is dat?

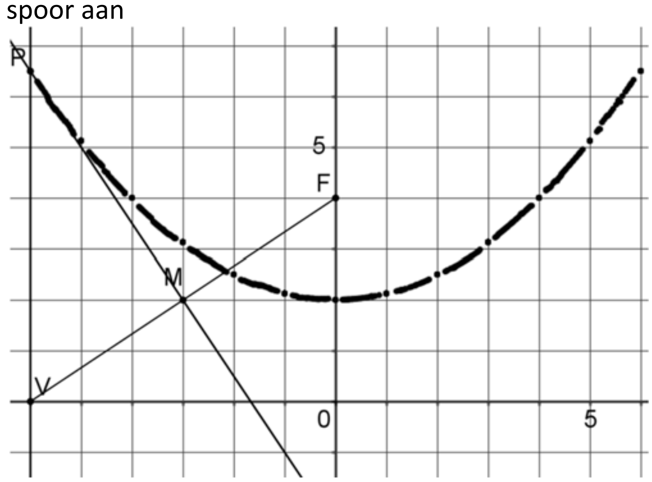
Wat heb je nu geleerd?

Wie?	samen	A	B	C	D	samen	zelf kiezen	zelf kiezen	zelf kiezen	samen
$x_Q = q$	6	2	3	4	-2	0	1	5		q
V	(6,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(-2,0)	(0,0)	(1,0)	(5,0)		(q,0)
M	(3,2)	(1,2)	(1½,2)	(2,2)	(-1,2)	(0,2)	(½,2)	(2½,2)		(½ q,2)
m	-2/3	-2	- 4/3	-1		verticaal	-4	-4/5		-4/q
a (⊥*m*)	3/2	½	¾	1		0	¼	5/4		q/4
l	y=1,5x-2,5	y= ½x+1½	y= ¾x + $^{7}/_{8}$	y=x	y=-¼ x+1¾	y=2	y=¼x+1$^{7}/_{8}$	y=1¼x-1$^{1}/_{8}$		y=$^{q}/_{4}$x-$^{1}/_{8}$q^2+2
k	x=6	x=2	x=3	x=4	x=-2	x=0	x=1	x=5		x=q
y_P	y=6½	y=2¼	y=3$^{1}/_{8}$	y=4	y=2¼	y=2	y=2$^{1}/_{8}$	y=5$^{1}/_{8}$		*
P										

q=6; P(6,6½)



spoor aan



k is de middelloodlijn van FV

PF = PV, dat wil zeggen dat P even ver van F als van de x-as af ligt

de kromme lijkt een parabool

* $y = {}^{1}/_{8}\, q^2 + 2$

Groepje van 4 tot 6.
Jullie gaan eerst samen en daarna ieder voor zich een zelfde lijst afwerken met opeenvolgende opdrachten.

1. Vul eerst met elkaar de kolom in de tabel in voor q=6. Volg de lijst.

- Samen maken:

1 Neem nu V(q,0) met x_Q=q=6.
2 Iemand tekent lijnstuk FV in de ruitjesfiguur.
3 Geef de coördinaten van het midden M van FV.
4 Bereken de helling *m* van lijnstuk FV.
5 Bereken de helling *a*, loodrecht helling *m* van FV.
6 Teken lijn *l* door M met helling *a* en stel een vergelijking (y=*a*x+*b*) op van lijn *l*.
7 Geef de vergelijking van de verticale lijn *k* door V.
8 Bereken de exacte y-coördinaat van het snijpunt P van de lijnen *k* en *l*. **Roep mij als je dit hebt.**

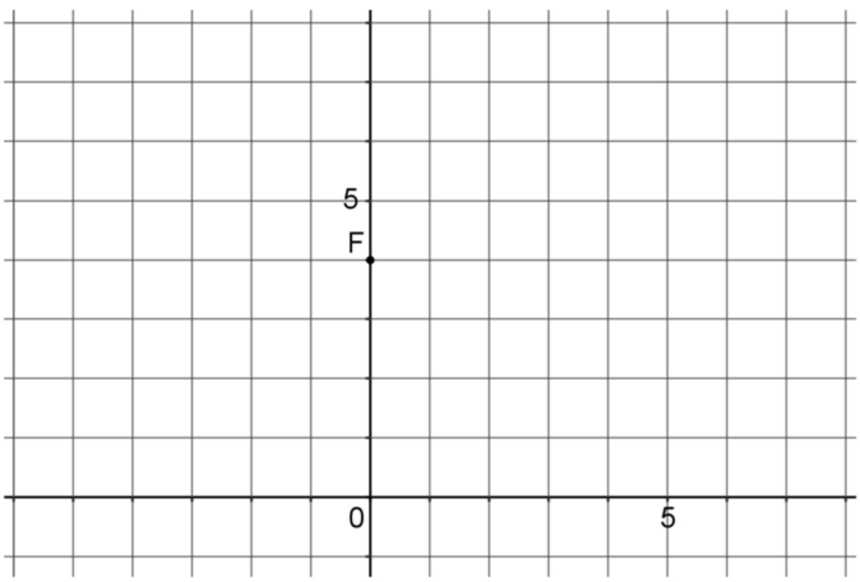
Wie?	samen	A	B	C	D	samen	zelf kiezen	zelf kiezen	zelf kiezen	samen
x_Q = q	6	2	3	4	-2	0	…	…		q
V										
M										
m										
a (⊥*m*)										
l										
k										
y_P										*
P										

2. Ieder kiest een van de getallen -4, -2, 2, 3, 4 of 5; zet de getallen in de tabel in de kolom van jouw getal en teken het uiteindelijke punt P dat je hebt gevonden in de ruitjesfiguur.

3. Ra ra wat kun je vermoeden over de punten P?

4. Vul nu met elkaar de laatste kolom bij q. Klopt je antwoord met je vermoeden?

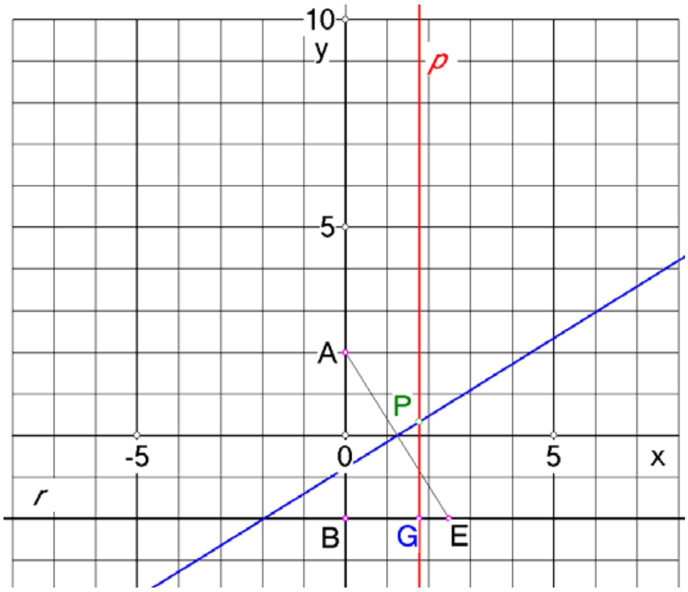
Ruitjesfiguur bij Ra ra wat is dat?



Parabool zoeken in venster via middelloodlijnen

NWD 2017

In de figuur zie je punt A(0,2) en een horizontale lijn (*r*) door B(0, -2).
Raaklijnen aan de parabool met brandpunt A en richtlijn *r* zijn de middelloodlijnen van het lijnstuk AE, waarbij E een willekeurig punt op *r* is.
In een verticaal venster rondom een verticale lijn *x* = *p*, in de figuur de rode verticale lijn door G, zal het snijpunt van de raaklijn (= middelloodlijn van AE) op en neer bewegen bij verplaatsen van E over *r*.



Het hoogste van deze snijpunten zal dan het punt op de parabool zijn op de verticale lijn *x* = *p*.

Noem BE = a, dan is $\begin{pmatrix} a \\ -4 \end{pmatrix}$ de normaalvector van de middelloodlijn, dus vergelijking mll is $ax - 4y = c$.

Het punt (½ a,0) is het midden van AE, dus invullen in $ax - 4y = c$ geeft c = ½a^2.

De middelloodlijn heeft vergelijking $y = \frac{1}{4}ax - \frac{1}{8}a^2$.

Zo geeft de lijn x=0 voor y=$-^1/_8 a^2$; deze y-waarde heeft maximum bij a=0, dan is E = B, en loopt de raaklijn door (0,0).
Dit verwacht je ook voor de raaklijn door de top.

Bij het punt (4,2) verwacht je een raaklijn met helling 1. Dit zie je door “het vierkant” van de mooie punten op de parabool.
Dus zoek op de lijn x=4 naar de maximale y-waarde.
x=4 geeft $y = a - \frac{1}{8}a^2$; $a - \frac{1}{8}a^2 = a(1 - \frac{1}{8}a)$; dus het maximum zit bij a=4, precies tussen a=0 en a=8 (waar y=0).
De raaklijn is dan $y = x - 2$, en op de lijn $x = 4$ is het punt (4,2) dus het hoogste punt en ligt op de parabool, klopt.

Bij *x*=*p* is $y = \frac{1}{4}ap - \frac{1}{8}a^2$; $\frac{1}{4}ap - \frac{1}{8}a^2 = \frac{1}{8}a(2p - a)$; dus max van y bij a=*p*.
Dan is $y = \frac{1}{4}pp - \frac{1}{8}p^2 = \frac{1}{8}p^2$; omdat het punt van de parabool op *x*=*p* ligt is de formule van de parabool dus $y = \frac{1}{8}x^2$.

Groepje van 4 tot 6

Jullie gaan eerst samen en daarna ieder voor zich een lijst afwerken met opeenvolgende opdrachten.

Gegeven is punt A(0,2) en lijn *r*: y=-2. E is een willekeurig punt op *r*.

Op de lijn x=p zitten allemaal snijpunten met de middelloodlijnen van AE als je E varieert.

1. Werk eerst samen de volgende lijst af.

- Kies E(a,-2) met a=3.
- Stel de vergelijking op van de middelloodlijn van AE.
- Bereken het snijpunt met x=p, nu met p=1.
- Herhaal dit voor de punten E met a=0, a=1, a=2 en a=4. Bewaar de vergelijkingen van de middelloodlijnen!
- Teken in het ruitjesfiguur het hoogste van de hierboven gevonden punten op x=1.

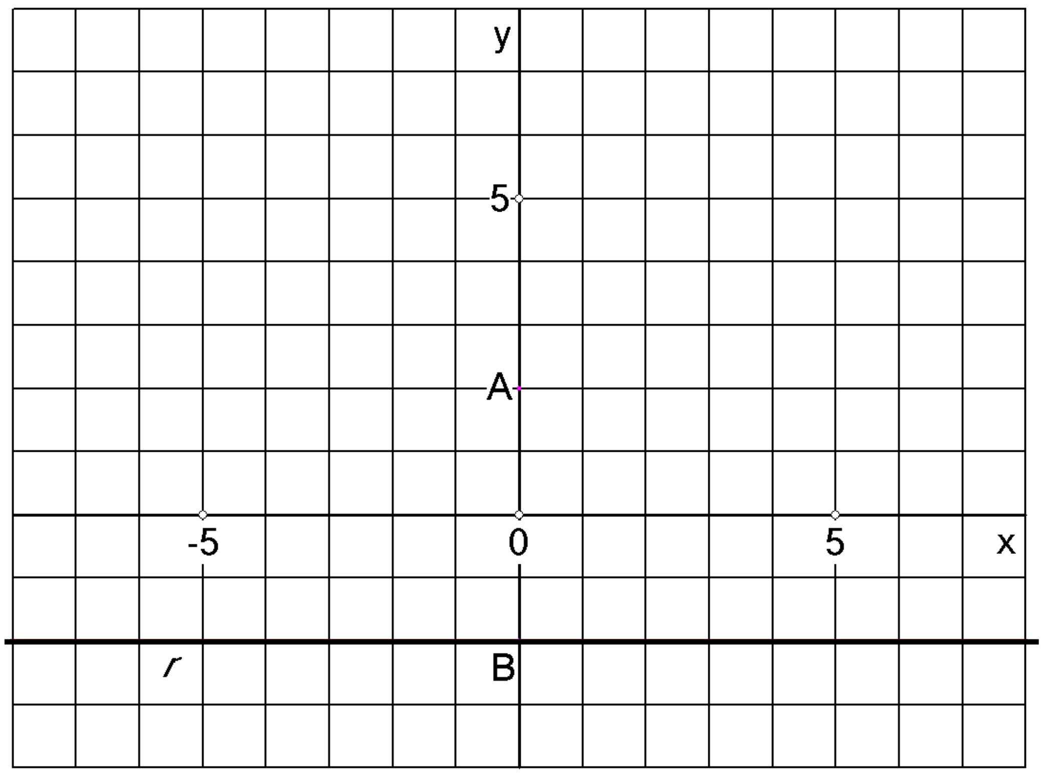
2. Ieder kiest een van de getallen -4, -2, 2, 3, 4 of 5 voor p voor jouw lijn x=p.

3. Snijdt de bij 1. gevonden middelloodlijnen van AE nu met jouw x=p en teken in de ruitjesfiguur het hoogste punt op jouw x=p. Als je denkt dat er een andere middelloodlijn is die een hoger snijpunt heeft, voeg dan die middelloodlijn (bij een nieuwe waarde van a) toe aan je lijstje. Kom je hoger?

4. Welk vermoeden heb je over de getekende punten? En wat kun je zeggen over E in dat geval?

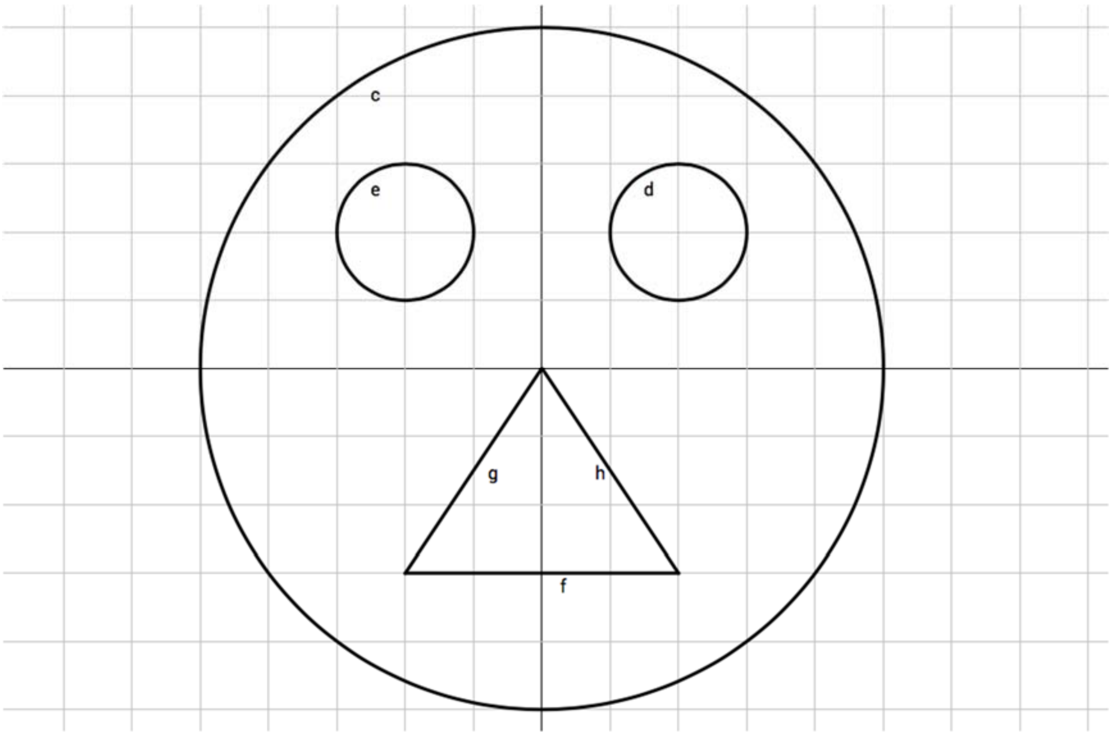
5. Stel met elkaar nu de vergelijking van de middelloodlijn van AE op met E(a,-2).
   Druk de y-coördinaat van het snijpunt met x=p uit in a. Wanneer is deze y-coördinaat het grootst?
   Wat is de formule van de parabool?

Ruitjesfiguur bij Parabool zoeken in venster



Maak een gezicht G&R 5vD p.164 opg. 52 NWD 2017

Werk in tweetallen.
Maak op je GR het hieronder getekende gezicht.
Schrijf eerst in je schrift wat de parametervoorstellingen zijn van de drie cirkels.
Voor de lijnstukken moet je ook nadenken hoe je met hetzelfde domein als van de cirkels niet de hele lijn maar precies de getekende lijnstukken krijgt.



Gelukt?

Probeer ook het gezicht te laten lachen!

Bij het oefenen van cirkels tekenen kun je dit mooi doen op de GR.
Parametervoorstellingen van cirkels en lijnen.
Middelpunten en stralen goed invoeren.
Parametervoorstellingen van lijnen met richtingsvector en startpunten.
Aandachtspunt is het domein om de lijnstukken van de juiste lengte te krijgen.

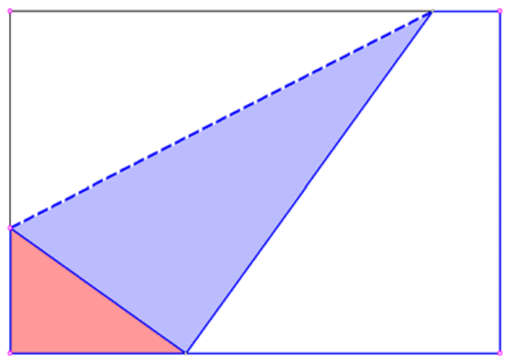
opgave **driehoek** Getal & Ruimte vwoB deel 4 H14 p. 118 opg A28 NWD 2017

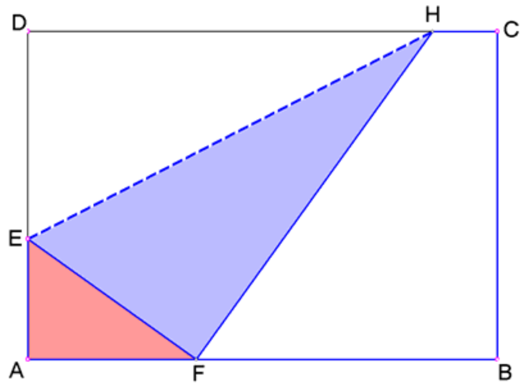
Neem een A4-tje. Ga voor het gemak uit van afmetingen 30 bij 21 cm.
Leg het dwars voor je op tafel.
Vouw het hoekpunt links boven tot op de onderrand.
Er ontstaat nu links onder het gevouwen deel een driehoek.
Schuif met het omgevouwen hoekpunt over de onderrand heen en weer.
De afmetingen van de driehoek veranderen dan voortdurend.
Teken verschillende van deze driehoeken

Welke vraag kun je nu stellen?

Bereken door meten van AF en AE de oppervlakte van deze driehoek.
Wie heeft de grootste oppervlakte?

Stel een formule op van de oppervlakte van de genoemde driehoek.
Verzin zelf welk lijntje je x noemt.





antwoord:
Stel AE = x, dan is DE = 21 – x ; DE = EF dus AF = $\sqrt{(21-x)^2 - x^2} = \sqrt{441 - 42x}$

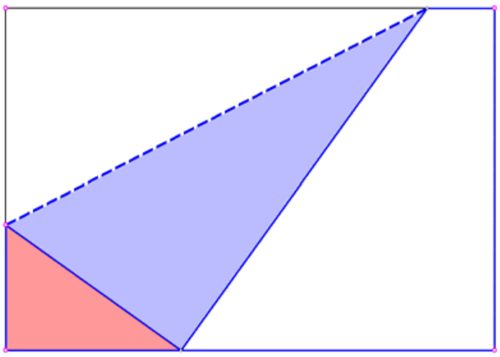
voor de oppervlakte van ΔAFE geldt: opp(x) = ½ AE · AF = ½ x·$\sqrt{441 - 42x}$;
maximaal als opp'(x) = 0
opp'(x) = $\frac{1}{2}\sqrt{441-42x} + \frac{1}{2}x \cdot \frac{-21}{\sqrt{441-42x}} = \frac{1}{2}\left(\frac{441-63x}{\sqrt{441-42x}}\right)$; dus opp is max als x = $\frac{441}{63}$ = 7 cm

Stel DE = x, dan is AE = 21 – x ; DE = EF dus AF = $\sqrt{x^2 - (21-x)^2} = \sqrt{42x - 441}$

voor de oppervlakte van ΔAFE geldt: opp(x) = ½ AE · AF = ½ (21 – x)·$\sqrt{42x - 441}$;
maximaal als opp'(x) = 0
opp'(x) = $\frac{1}{2}\left(-\sqrt{42x-441} + (21-x)\cdot \frac{21}{\sqrt{42x-441}} = \frac{(-63x+882)}{\sqrt{42x-441}}\right.$; dus opp is max als x = $\frac{882}{63}$ = 14 cm

werkblad workshop driehoek NWD 2017

Neem een A4-tje. Ga voor het gemak uit van afmetingen 30 bij 21 cm.
Leg het dwars voor je op tafel.
Vouw het hoekpunt links boven tot op de onderrand.
Er ontstaat nu links onder het gevouwen deel een driehoek. Zie figuur.
Schuif met het omgevouwen hoekpunt over de onderrand heen en weer.
De afmetingen van de driehoek veranderen dan voortdurend.
Teken verschillende van deze driehoeken.



Welke vraag kun je nu stellen?

Kun je ook een (exact) antwoord op de vraag vinden?

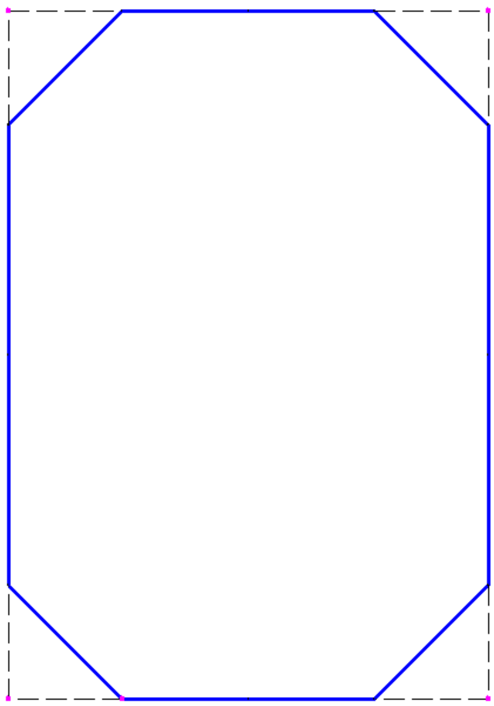
opgave **LIJST** NIEUW in de toets 4v wis A G&R H6 NWD 2017

Van een rechthoekig stuk karton van 70 bij 100 cm wordt een lijst gemaakt.
Van de vier hoekpunten wordt een gelijkbenig rechthoekige driehoek afgeknipt. Zie figuur 1.
Vervolgens worden de randen naar binnen gevouwen. Zo ontstaat er een lijst (grijs gearceerd) rondom een rechthoek. Zie figuur 2.
De oppervlakte van de “lijst” is 2200 cm^2 als je driehoeken afknipt met korte zijden van 20 cm.
a Laat met een berekening zien dat dit klopt.
Neem de lengte x van de korte zijden van de driehoekjes die worden afgeknipt. Er geldt $0 \le x \le 35$.
In de tabel zie je de oppervlakte van de lijst voor verschillende waarden van x.

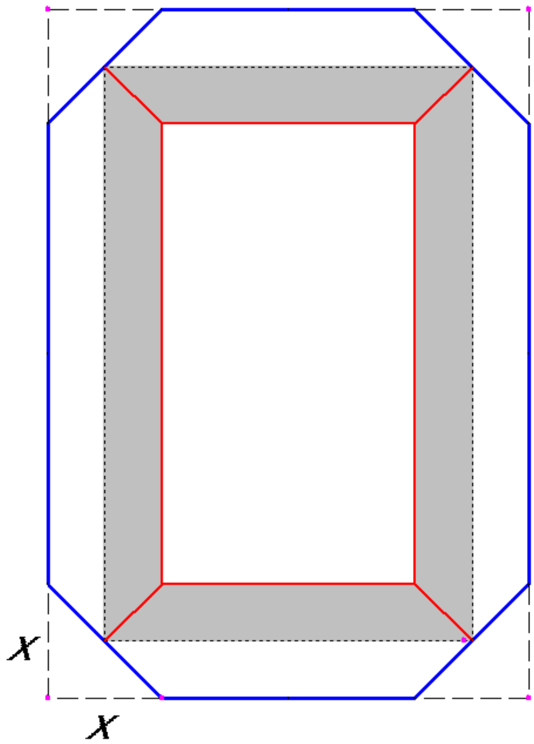
x	20	25	30	35
oppervlakte lijst	2200	2375	2400	2275

Je ziet dat de waarde van de oppervlakte eerst toeneemt en dan weer afneemt.
Er zal voor een zekere waarde van x dus een maximale waarde van de oppervlakte van de lijst zijn.
b Stel een formule van de oppervlakte van de lijst op, uitgedrukt in x, en bereken voor welke exacte waarde van x deze oppervlakte maximaal is.
opmerking: “exacte” kan ook weg; dan hoeven de haakjes niet per se te worden uitgewerkt.

figuur 1



figuur 2



antwoord:
a $(70 - 20)(100 - 20) - (70 - 40)(100 - 40) = 4000 - 1800 = 2200$
$(70 - 25)(100 - 25) - (70 - 50)(100 - 50) = 3375 - 1000 = 2375$

b $(70 - x)(100 - x) - (70 - 2x)(100 - 2x) = -3x^2 + 170x = -3x(x - {}^{170}/_{3})$; dus max als $x = \frac{1}{2} \cdot {}^{170}/_{3} = 28\,{}^{1}/_{3}$

werkblad workshop **LIJST** NWD 2017

Ga uit van een blaadje van 14 cm x 20 cm.

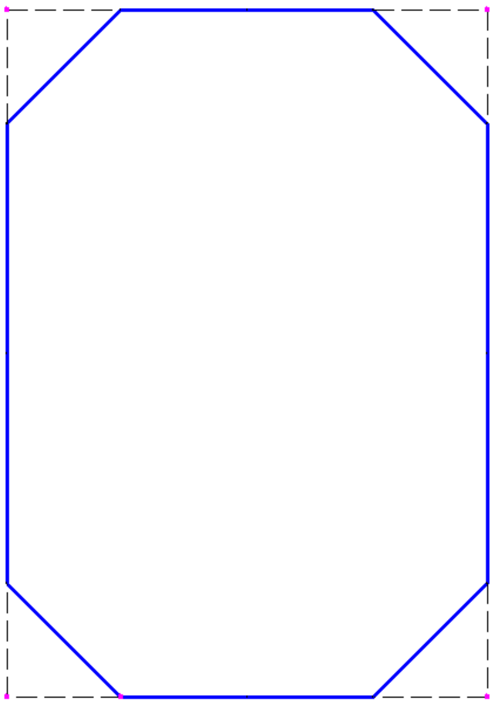
Knip van alle vier de hoekpunten een rechthoekig gelijkbenige driehoek (geodriehoek) af (figuur 1).
kies voor rechthoekszijden x = 4, *x* = 5 of *x* = 6.

Vouw de randen van het blaadje naar binnen om zodat de schuin afgeknipte randjes op elkaar aansluiten (figuur 2).

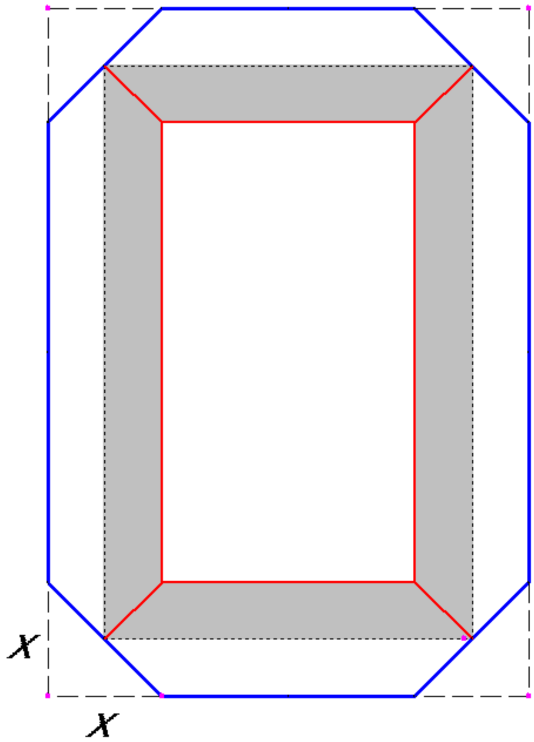
Welke vraag kun je nu stellen?

Kun je de vraag ook (exact) beantwoorden?

figuur 1



figuur 2



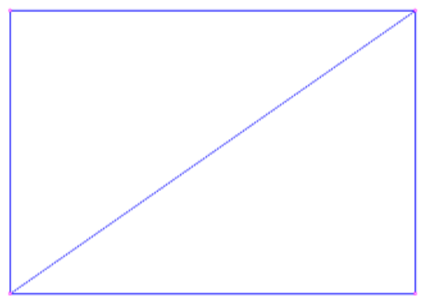
opgave **parallellogram** NIEUW NWD 2017

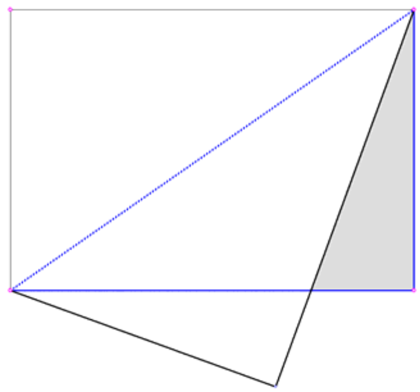
Neem een A4-tje. Ga voor het gemak uit van afmetingen 21 bij 30 cm.

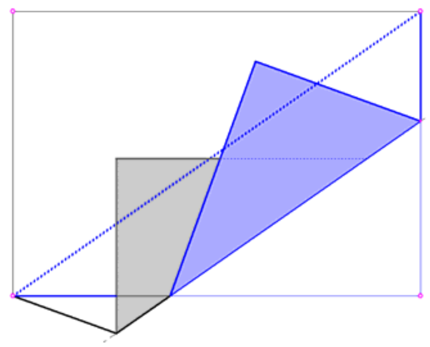
Vouw een diagonaal.
Vouw het dubbelgevouwen blaadje ergens nogmaals evenwijdig aan de diagonaal.
Na openvouwen zie je twee overstaande zijden van een parallellogram.
Teken het hele parallellogram en bereken de oppervlakte ervan.
Wie heeft de grootste oppervlakte?

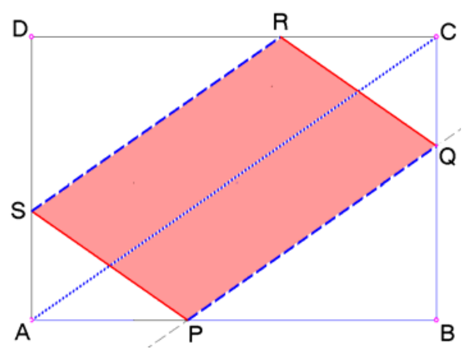
Stel een formule op van de oppervlakte van het parallellogram uitgedrukt in x.
Verzin zelf welk lijntje je x noemt.

Bereken de maximale oppervlakte van het op deze manier verkregen parallellogram.









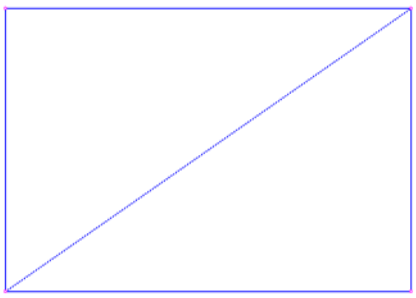
antwoord:
noem PB = x, dan is AP = 30-x, QB:PB = CB:AB = 21:30 = 0,7 , dus QB = 0,7x en QC = 21 – 0,7x

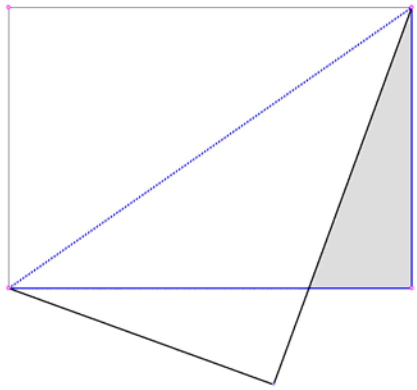
oppervlakte parallellogram is $O(x) = 30 \cdot 21 - (2 \cdot ½ \cdot x \cdot 0{,}7x + 2 \cdot ½ \cdot (30 - x)(21 - 0{,}7x)$
$O(x) = 630 - 0{,}7x^2 - (630 - 42x + 0{,}7x^2) = -1{,}4x^2 + 42x$; max als $x = -42/-2{,}8 = 15$; max = 315 cm^2

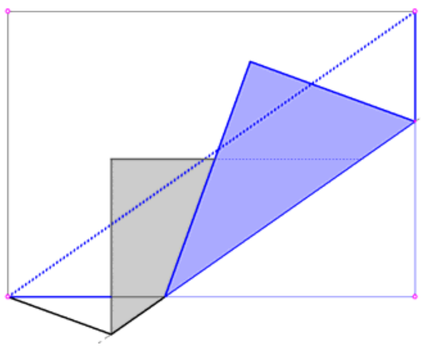
werkblad workshop   parallellogram NWD2017

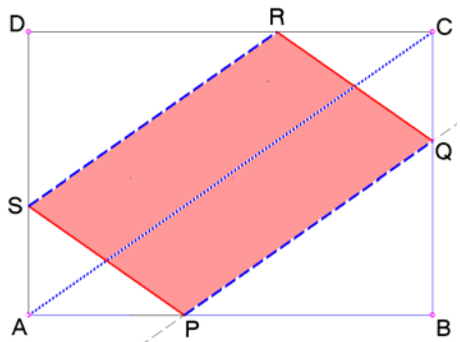
Neem een A4-tje. Ga voor het gemak uit van afmetingen 21 bij 30 cm.

Vouw een diagonaal.
Vouw het dubbelgevouwen blaadje ergens nogmaals evenwijdig aan de diagonaal.
Na openvouwen zie je twee overstaande zijden van een parallellogram.
Teken het hele parallellogram en bereken de oppervlakte ervan.
Voer deze vouwen nog een paar keer uit zodat er verschillende parallellogrammen ontstaan.









Welke vraag kun je stellen?

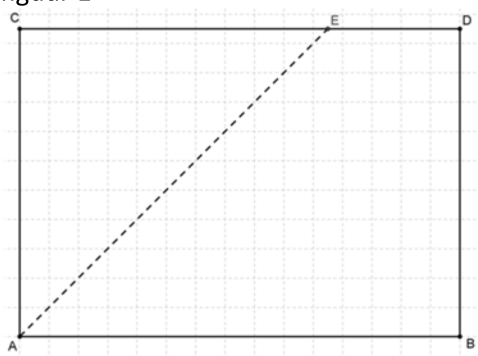
Kun je ook het (exacte) antwoord op de vraag vinden?

opgave **driehoek naar y=x** NIEUW NWD 2017

Neem een A4-tje. Ga voor het gemak uit van afmetingen 21 bij 30 cm.

Leg het blaadje dwars voor je.
Vouw de bissectrice van de rechte hoek links onder.
Leg het blaadje weer open. Zie figuur 1.
Vouw het hoekpunt rechts onder naar de schuine vouw,
dus naar de zojuist gevouwen bissectrice.
Onder de omgevouwen onderkant zie je een driehoek
ontstaan met de gevouwen bissectrice en de onderkant
van het blaadje. Zie figuur 2.

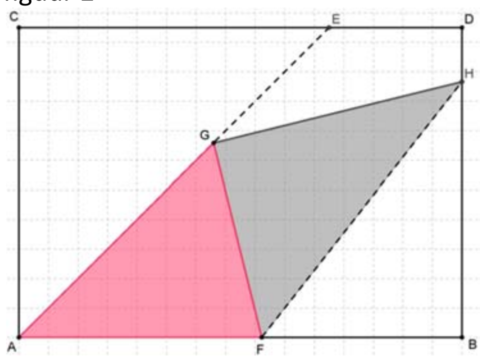
figuur 1



Stel een formule op van de oppervlakte van de (roze) driehoek.
Verzin zelf welk lijntje je x noemt.

Bereken de maximale oppervlakte van de op dezer manier
verkregen driehoek.

figuur 2



antwoord:
Noem AF=x.
Dan is BF = FG = 30 – x.

Neem AG als basis van driehoek AFG, Dan is de hoogte FH = AH = $\frac{x}{\sqrt{2}}$

Met de cosinusregel geldt: $FG^2 = AF^2 + AG^2 - 2AF \cdot AG \cdot \cos\angle GAF$; $\angle GAF = 45°$, AF=x. FG = 30 – x geeft
$(30 - x)^2 = x^2 + AG^2 - 2x \cdot AG \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oftewel $AG^2 - x\sqrt{2} \cdot AG - 60x + 900 = 0$
met de abc-formule is nu $AG = \frac{1}{2}(x\sqrt{2} + \sqrt{(2x^2 - 240x + 3600})$
de oppervlakte van $\Delta AFG = \frac{1}{2} \cdot {}^{x}/_{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}(x\sqrt{2} + \sqrt{(2x^2 - 240x + 3600})$
CALC MAX geeft x=15 (dus precies als je op het midden van de onderkant zit; max oppvl = 112,5

werkblad workshop **driehoek naar y=x** NWD 2017

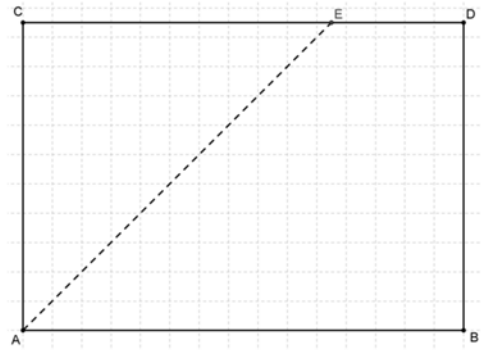
Neem een A4-tje. Ga voor het gemak uit van afmetingen 21 bij 30 cm.

Leg het blaadje dwars voor je.
Vouw de bissectrice van de rechte hoek links onder (y=x).
Leg het blaadje weer open. Zie figuur 1.
Vouw het hoekpunt rechts onder naar de schuine vouw, dus naar de zojuist gevouwen bissectrice.
Onder de omgevouwen onderkant zie je een driehoek ontstaan met de gevouwen bissectrice en de onderkant van het blaadje. Zie figuur 2.

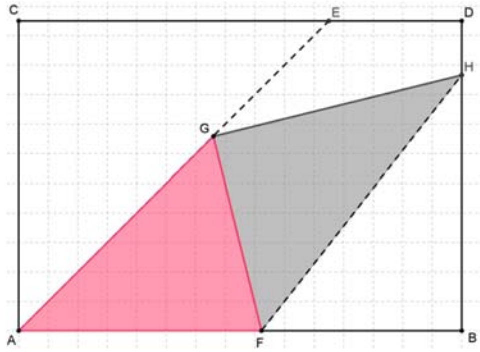
Welke vraag kun je nu stellen?

Kun je ook het (exacte) antwoord op de vraag berekenen?

figuur 1

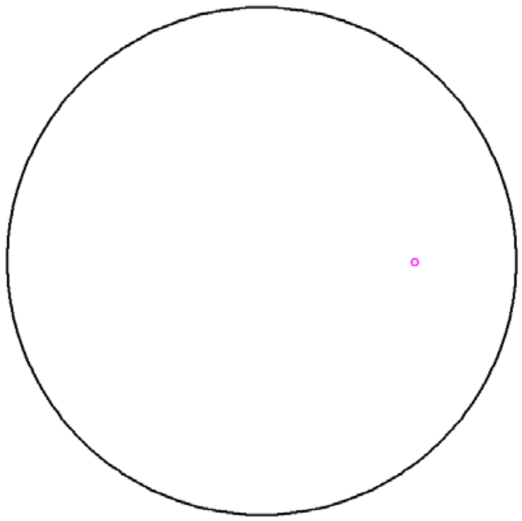


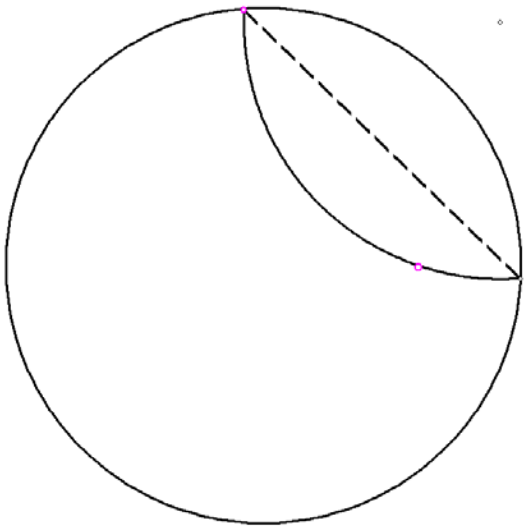
figuur 2



werkblad workshop **Hoe vouw je een ellips?** NWD 2017

Neem een cirkelvormig blaadje.
Zet een stip binnen de cirkel (niet te dicht bij het middelpunt).
Vouw nu ettelijke malen de rand van het blaadje precies tot aan de gezette stip.
Er blijft een vlakdeel van de cirkel zonder vouwen.
Hoe zou je de vorm van dit smetteloze vlakdeel noemen?





Welke vragen en beweringen kun je nu stellen?
Kun je de vragen ook beantwoorden en de beweringen bewijzen?

vragen:
Is de open ruimte inderdaad een ellips, begrensd door de vouwlijnen?
Wat is de definitie van een ellips?
Kun je die definitie hier ook terugredeneren naar de cirkel en het gekozen punt?
Wat hebben de vouwlijnen met de ellips te maken?
De vouwlijnen zijn raaklijnen aan de ellips. Bewijs dat.
Kun je dan ook de exacte plaats van het raakpunt op de vouwlijn vinden?

werkblad workshop **Hoe vouw je een hyperbool?** NWD 2017

1 Teken een cirkel (met middelpunt M en straal b.v. 8 cm). Zie bijlage.
2 Teken een punt A buiten de cirkel. Maak dit punt goed zwart.
3 Vouw punt A een aantal maal om tot een punt V op het gedeelte van de cirkel dat dicht bij punt A ligt.
Goed door het blaadje heen kijken of je het punt A precies op de cirkelrand ziet liggen.

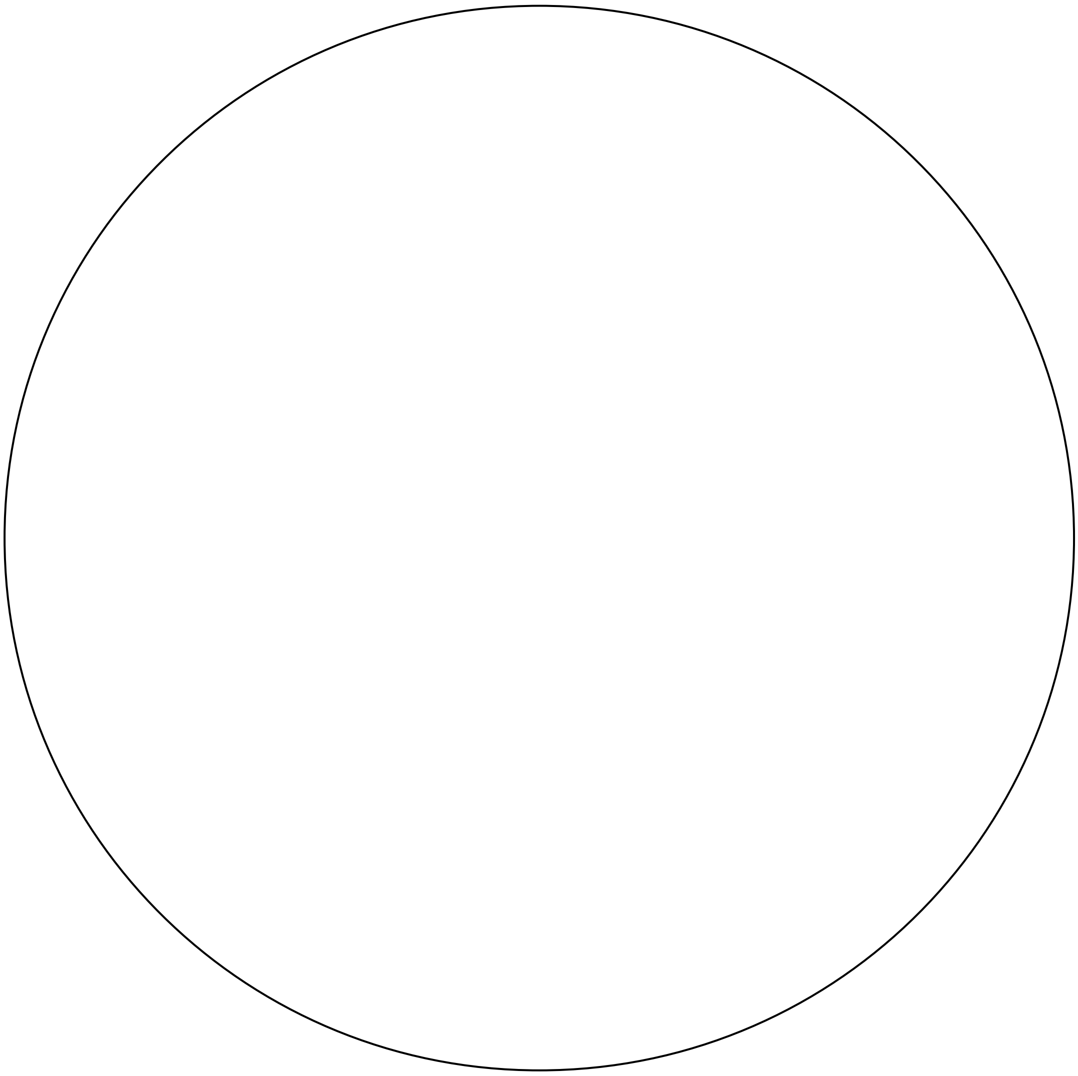
Vragen:
- Wat zijn de vouwen met betrekking tot de hyperbool?
- Wat is de definitie van een hyperbool?
- Je kunt niet naar elk punt op de cirkel vouwen om daarmee punten op de hyperbool te vinden. Waar ligt het uiterste punt op de cirkel waarheen je kunt vouwen mbt de hyperbool?
- Wat zijn de brandpunten van de hyperbool?
- Kun je op de vouwlijn exact het punt aangeven dat op de hyperbool ligt?

Antwoorden:
De vouwlijnen zijn raaklijnen aan de hyperbool. Het zijn in feite de middelloodlijnen van AV.

4 Dit gaat goed totdat je punt V op de cirkel hebt zodat $\angle BVC = 90^o$. BC is de middellijn van de cirkel op lijn AM.
In dat geval heb je de asymptoot van de hyperbool.
Als je punt A naar een punt vouwt dat verder weg ligt dan de V die bij de asymptoot hoort, dan gaat het fout.
5 Om op de vouw het punt van de hyperbool te vinden (waar de vouw dus raakt aan de hyperbool) moet je de straal MV tekenen en doortrekken tot het snijpunt H met de vouw.

Vragen:
- Probeer maar te bewijzen dat het verschil van de afstand van H tot M en de afstand HA constant is. Dat is een definitie van de hyperbool.
- Probeer ook te snappen dat het vouwen naar punten voorbij het punt V van de asymptoot ook echt fout is.
Waarom is dat dan zo?

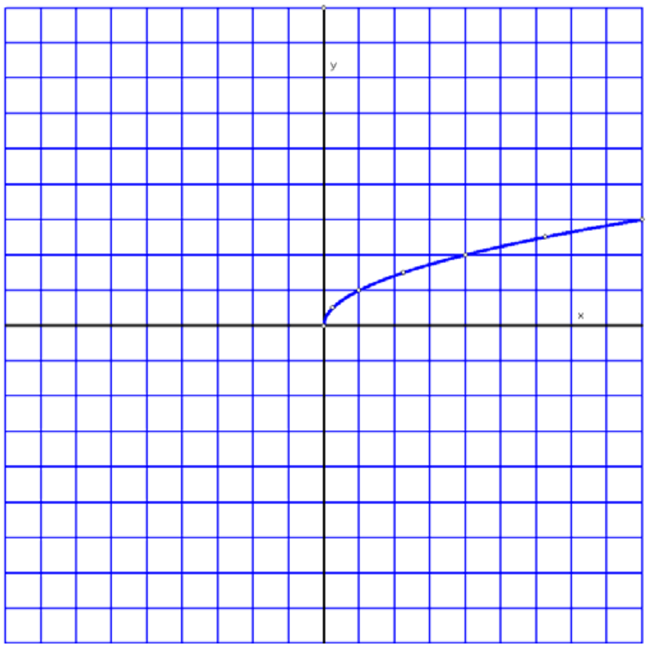
werkblad workshop **hyperbool** NWD 2017



werkblad transformaties met $y = \sqrt{x}$

Het mooiste is als je een transparant ruitjesblaadje hebt met daarop de grafiek getekend.
Anders moet je op de achterkant op de zelfde plek als op de voorkant (a.h.w. doorgedrukt) de grafiek zetten.

Met dit blaadje kun je dan demonstreren
wat er met de grafiek gebeurt bij
. spiegelen in de y-as $y(-x) = \sqrt{(-x)}$
. spiegelen in de x-as $-y(x) = -\sqrt{x}$
. spiegelen in y=x $x = \sqrt{y}$ ofwel $y = x^2$
. spiegelen in O $-y(-x) = -\sqrt{(-x)}$



Hoe zou je dit in je les kunnen doen?
Welke doelen kun je hiermee bereiken?

Het drie deuren probleem:

A B C

Bij een zekere quiz kun je een prijs winnen.
Er zijn drie deuren te zien.
Achter een van de deuren staat de prijs.
De quizmaster heeft achter willekeurig een van de deuren een prijs gezet.
De kandidaat kiest een van de drie deuren waarvan hij denkt (hoopt) dat daar de prijs achter staat.
Vervolgens opent de quizmaster een deur waar geen prijs achter staat.
De kandidaat kan nu bij de eerste keuze van zijn deur blijven of alsnog kiezen voor de andere deur.
Hier is sprake van “de” andere deur, want de geopende deur toont dat daar geen prijs achter staat.

Wat moet de kandidaat doen?
Blijven bij zijn keus of veranderen?

1 2 3

Dit kun je gaan spelen met 3 bekertjes waaronder je een voorwerp (suikerklontje, munt, enz.) legt.
Jij bent de quizmaster en weet onder welk bekertje het voorwerp ligt.
Elke leerling van de klas laat je eerst een bekertje waaronder hij denkt dat het voorwerp ligt.
Jij tilt dan een bekertje op waar geen voorwerp onder ligt.
Vervolgens laat je de leerling verplicht voor de andere beker kiezen dan die hij eerst had aangewezen.
Je tilt dat bekertje op.
Je houdt bij hoeveel leerlingen aan de beurt geweest zijn en noteert het aantal leerlingen dat “de prijs” heeft gewonnen.

Zorg ervoor dat je de prijs telkens onder een willekeurig gekozen bekertje legt.
Met de GR heb ik al vast een Random rijtje met 1, 2 en 3 voor je gemaakt.
Begin ergens in de rij en volg de nummers 1, 2 en 3 erna.

1 3 2 1 2 3 2 2 3 1   1 2 1 3 3 3 2 3 1 2   3 1 1 2 3 2 3 2 2 2   2 2 3 1 2 3 1 3 3 1

In de literatuur wordt dit probleem ook wel het Monty Hall probleem genoemd.

werkblad **Drie deuren probleem** NWD 2017

Voor twee personen, spelleider en kandidaat, (herhaald experiment ipv de hele klas)

Kandidaat:

1 de spelleider gaat je vragen onder welk bekertje een munt (paperclip) ligt:
wijs een voor jou willekeurig bekertje aan
2 de spelleider tilt een (ander) bekertje op waaronder geen munt ligt
3 hij vraagt of je bij je keuze blijft:
je moet altijd zeggen dat je je keuze verandert, dus je kiest het andere bekertje,
dat is het bekertje dat jij niet als eerste gekozen hebt en dat de spelleider niet heeft opgetild

Spelleider:

1 zet de drie bekertjes voor je neer
2 leg onder een van de bekertjes (zonder dat de kandidaat dit ziet) de munt (paperclip)
[om een willekeurige reeks te krijgen moet je eigenlijk een random rij hebben,
voor het gemak heb ik die op dit blad gezet, die kun je dus gebruiken/afstrepen]
3 laat de kandidaat een beker aanwijzen waaronder hij/zij denkt dat de munt ligt
4 til een bekertje op, wat hij/zij niet heeft gekozen, waaronder geen munt ligt
5 vraag de kandidaat om nu nogmaals een beker aan te wijzen waaronder hij denkt dat de munt ligt
6 noteer het aantal keer dat gespeeld is
en het aantal keer dat de kandidaat de prijs heeft aangewezen
7 voer dit experiment 30 keer uit

Bespreek met elkaar of de resultaten voor een uitspraak over dit probleem zorgen.
Hoe zou je dit in de klas doen?

Een random rij voor de beker waaronder jij de paperclip (munt) legt:
Begin ergens in de rij en volg de nummers 1, 2 en 3 erna.

1 3 2 1 2 3 2 2 3 1   1 2 1 3 3 3 2 3 1 2   3 1 1 2 3 2 3 2 2 2   2 2 3 1 2 3 1 3 3 1

1 Van een Rekenkundige Rij is gegeven dat u(n) = u(n – 1) + a;
verder is u(4) = 19 en u(7) = 29,5.

a Bedenk een manier om a en u(0) te berekenen.

b Bereken $\sum_{k=4}^{7} u(k) = \ldots$

2 Van een rekenkundige rij is $s_8 = \sum_{k=0}^{7} u(k) = 148$; verder is u(0) = 1

De directe formule van de rij is u(n) = a·n + b.

a Bedenk een manier om a en b te berekenen.

b Bereken u(8).

3 Voor de rij f(n) geldt vanaf n=0: 2, 2, 4, 6, 10, 16, enz.

a Bereken f(10).

b Op welke (bekende) rij lijkt deze rij?

c Geef de recursievergelijkingen van f(n).

4 Van een rij is u(0) = $\frac{10000000}{823543}$.

Elk volgende getal in de rij is 30% kleiner dan het er aan vooraf gaande getal.

a Waarom is er sprake van een Meetkundige Rij?

b Bereken u(7).

c Bereken $s_4 = \sum_{k=0}^{3} u(k) =$

5 Van een meetkundige rij is u(4) = 243 en u(7) = 9.

De directe formule van deze rij is $u(n)=a\cdot r^n$.

a Bedenk een manier om r en a te berekenen.

b Bereken $s_{10} = \sum_{k=0}^{9} u(k) =$

6

	u0	u1	u2	u3	u4	u5
	0	3	8	15	24	35
hulp	0·2	1·3	2·4	3·5	4·6	5·7

u1 = u0 + 3   3 = … · 1 + …
u2 = u1 + 5   5 = … · 2 + …
u3 = u2 + 7   7 = … · 3 + …   enz.

a Stel de recursievergelijkingen op van u(n): u(n) = u(n – 1) …….

b Berken u(8) en u(81).

c Bereken $s(8) = \sum_{k=0}^{7} u(k) =$

d Stel de directe formule op van u(n). Gebruik de hulptabel die onder de rij staat.

7a Schrijf de eerste 8 termen op van de rij van driehoeksgetallen.

b Stel een formule op van driehoekig gestapelde bollen.; 1, 1+3, 1+3+6, …

Gebruik een hulp tabel van $^1/_6\cdot2\cdot3\cdot4$, $^1/_6\cdot3\cdot4\cdot5$, $^1/_6\cdot4\cdot5\cdot6$, $^1/_6\cdot5\cdot6\cdot7$, ...

5vA oefeningen H9 Rijen antwoorden voorbeeld bij DUOtjes NWD 2017

opg	antwoorden
1a	3a = 10,5 dus a=3,5 ; u(0) = 19 - 4·3,5 = 5
1b	(19+22,5+26+29,5) = 97 of met Σ optie op GR
2a	b=1; 8b + 28a = 148; a=5
2b	u(8) = 1 + 8·5 = 41
3a	… , 26, 42, 68, 110, geeft f(10) = 178
3b	de rij van Fibonacci
3c	f(n) = f(n-1) + f(n-2), f(nMIN) = {2,2}
4a	factor 07; u(n) = u(n-1)·0,7 is meetkundige rij
4b	u(7) = $^{10000000}/_{8232543}$ $\cdot 0{,}7^7 = 1$
4c	s_4 = $u(0)\cdot\frac{r^4-1}{r-1}=\frac{10000000}{823543}\cdot\frac{(0{,}7^4-1)}{-0{,}3}$ 30,75735
5a	$r^3 = {}^1/_{27}$ dus $r = {}^1/_3$; a=19683
5b	s_{10} = $\sum_{k=0}^{9} u(k) = 19683\cdot\frac{(1/3)^{10}-1}{-2/3} = 29524$
6a	u(n) = u(n-1) + 2n + 1; u(0) = 0
6b	u(8) = u(5) + 13+15+17 = 80; u(81) = 6723
6c	Σ = 0+3+8+15+24+35+48+63 = 196
6d	u(n) = n·(n+2); b.v. u(81) = 81·83 = 6723 (klopt)
7a	1 3 6 10 15 21 28 36
7b	$s_n = {}^1/_6\cdot n(n+1)(n+2)$

werkvorm DUO-tjes NIEUW NWD 2017

In 5v wisA heb ik een overhoring over rijen gegeven.
Nadat ik het werk van de klas had nagekeken bleken er nog veel onvoldoendes te zijn.
[Zie 5vA oefeningen H9 Rijen (gegeven aan het eind van Getal en Ruimte wisA deel 3 H9)]

Dus de volgende les maar weer de overhoring onder de aandacht gebracht.
Elke leerling van de klas krijgt bij binnenkomst een nummer.
In 4 rondes worden in wisselende samenstelling de antwoorden van de vragen besproken.
Ik loop rond en help zo hier en daar met tips.

De (goede) antwoorden worden door elke leerling op een ruitjesblad geschreven.
Hopelijk hebben alle leerlingen na deze les de juiste antwoorden van all vragen bij elkaar geschreven.

De klas heeft bijvoorbeeld 16 leerlingen.
Bij binnenkomst deel ik willekeurig de nummers 1 t/m 16 uit.

Bij twee rijen met tweetallen tafels leg ik van voor naar achter de opdrachten A t/m D klaar.
De nummers 1 t/m 8 van de klas gaan in de eerste ronde zitten bij letters A t/m D in de ene rij.
De nummers 9 t/m 16 idem bij de andere rij.
Na 6 minuten wisselen de tweetallen van opdracht (en eventueel van rij).

werkvorm DOORGEVEN NIEUW

In klas 4v wisA heb ik een overhoring over logaritmen gegeven.
Nadat de overhoring is nagekeken blijken er nog veel problemen.

Ik geef in de volgende les aan (door hen zelf gekozen) tweetallen een van de vragen.
Elk tweetal krijgt 10 minuten en schrijft op een ruitjesblad hun namen en het antwoord op de vraag.
Daarna worden de ruitjesbladen met antwoorden doorgeschoven naar een volgend tweetal.
Dat tweetal krijgt 10 minuten om de gekregen antwoorden te bestuderen en bereiden voor hoe ze het antwoord gaan uitleggen aan de klas.
Elke tweetal legt vervolgens voor de klas om beurten uit hoe de aan hen doorgegeven vraag beantwoord moet worden. Zij komen daarvoor naar het bord en vertellen (met zijn tweeën) hoe het moet.

Bij grote klassen is het niet mogelijk om alle antwoorden te laten presenteren.
Kies dan zelf de (moeilijkste) vragen uit voor dit deel van de les.

Aan het eind van de les krijgt elke leerling een blad met alle opgaven (voor thuis, nog eens zelf maken).
De volgende les krijgen ze de antwoorden op alle opgaven.

mijn rol:
de regie uitleg van de bedoeling van de les zorgen voor samenstellen van de koppels
(van te voren opgaven kopiëren en snijden) opgaven en ruitjesbladen uitdelen
waar nodig hulp bieden aan koppels (beetje op weg helpen)
na 10 minuten laten stoppen en doorgeven
na 10 minuten op afroep de antwoorden van de opgaven laten presenteren
er voor zorgen dat alle leerlingen met de uitleg van de juiste opgave mee doen
tussendoor wat samenvatting geven van de antwoorden, aanpak en verband met de leerstof
aanvullende opmerkingen over de leerstof, voor zo ver relevant
evaluatie van de les (wat heb je er van geleerd?)

uitdelen van alle opgaven op A4 aan het eind van de les
volgende les antwoordbladen uitdelen

ervaring: ze vonden het een leuke afwisseling het is een geanimeerde les geworden.
ik heb ervaren dat ze met een dergelijke “presentatie” wel raad weten, dit zijn ze kennelijk wel gewend
het thuis bestuderen en leren van de oefening viel dan wel weer tegen (gezien de resultaten van de so later die week)

kaartjes uitdelen bij binnenkomst in de les; aantal groepjes afhankelijk van de klassegrootte; 4 lln per groepje

1A	1B	1C	1D
2A	2B	2C	2D
3A	3B	3C	3D
4A	4B	4C	4D
5A	5B	5C	5D
6A	6B	6C	6D
7A	7B	7C	7D
8A	8B	8C	8D

[nodig bij DUO-tjes kopiëren, knippen en neerleggen]

A	B	C	D
1^{e} ronde	1^{e} ronde	1^{e} ronde	1^{e} ronde
1&2	3&4	5&6	7&8
2^{e} ronde	2^{e} ronde	2^{e} ronde	2^{e} ronde
3&5	1&16	2&11	4&10
3^{e} ronde	3^{e} ronde	3^{e} ronde	3^{e} ronde
7&15	5&10	1&3	2&12
4^{e} ronde	4^{e} ronde	4^{e} ronde	4^{e} ronde
11&14	2&9	8&16	1&5

A	B	C	D
1^{e} ronde	1^{e} ronde	1^{e} ronde	1^{e} ronde
9&10	11&12	13&14	15&16
2^{e} ronde	2^{e} ronde	2^{e} ronde	2^{e} ronde
8&13	6&15	12&7	9&14
3^{e} ronde	3^{e} ronde	3^{e} ronde	3^{e} ronde
6&16	8&14	9&4	11&13
4^{e} ronde	4^{e} ronde	4^{e} ronde	4^{e} ronde
4&12	7&13	10&15	3&6

A Bespreek met elkaar de antwoorden van opgave 1 en 2

A Bespreek met elkaar de antwoorden van opgave 1 en 2

B Bespreek met elkaar de antwoorden van opgave 3 en 4

B Bespreek met elkaar de antwoorden van opgave 3 en 4

C Bespreek met elkaar de antwoorden van opgave 5 en 6

C Bespreek met elkaar de antwoorden van opgave 5 en 6

D Bespreek met elkaar de antwoorden van opgave 7 en 8

D Bespreek met elkaar de antwoorden van opgave 7 en 8 aantekeningen: