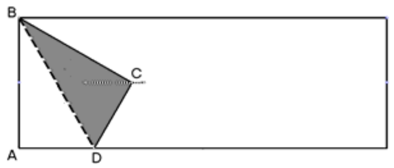
Bouwplaat van een tetraëder (regelmatig viervlak)


NWD 2019

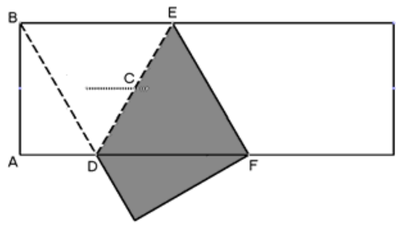
Knip een A4-tje in de lengte doormidden.
Vouw een stukje van de middenvouw. Figuur 1
Vouw door B punt A naar de midddenvouw (C) → D . Figuur 2
Vouw door D punt B naar rand AD (F) → E . Figuur 3
Vouw het geheel om EF → G, H . Figuur 4
Enzovoorts. Vouw tenslotte de strook weer open.
Zo krijg je een (ruime) bouwplaat van een tetraëder.

Figuur 1

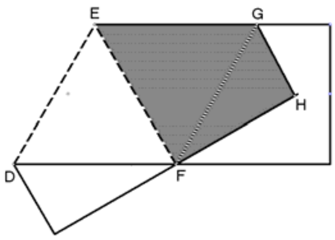
Figuur 2



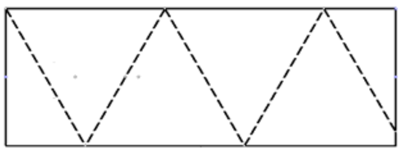
Figuur 3



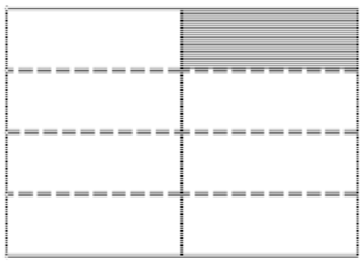
Figuur 4



Figuur 5



Herhaal dezelfde vouwprocedure nu vier keer voor een achtste A4-tje.

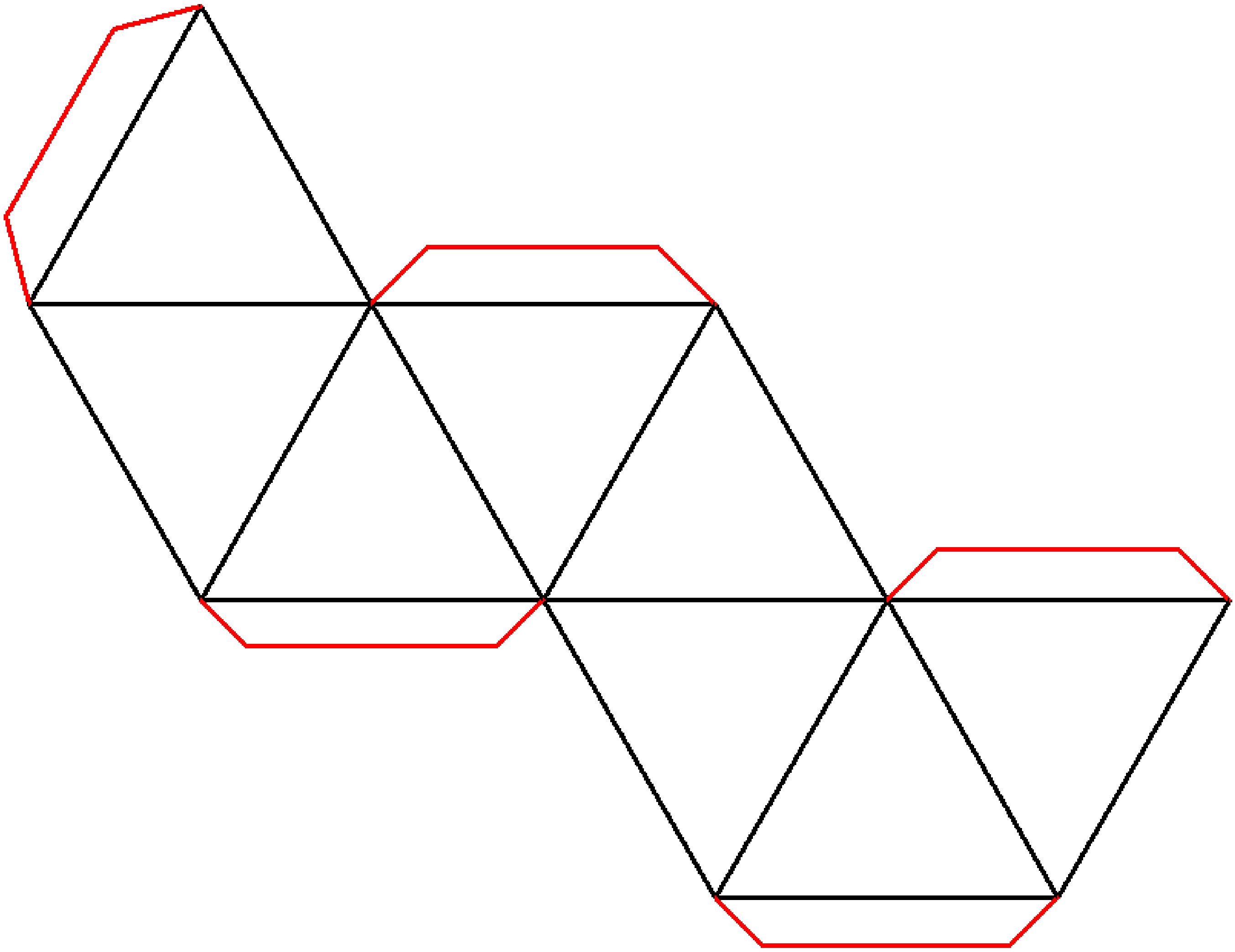


Zorg ervoor dat het viervlak van het half A4-tje open is (geen bodem). Plak hem vast (lijm of plakband).
Stop nu elk van de 4 kleine viervlakken in de punten van het grote viervlak.
Er blijft een gat over in het midden.
Welke vorm heeft het gat?

Bouwplaat van een octaëder

(met geocadabra:)
Bestand Nieuw Ruimtelijk ● Octaëder [Ribbe] 6
Bewerken Ruimtelijke bewerkingen Maak uitslag ▸ Automatisch
[Nu ontvouwt zich de uitslag; als die ontvouwd is, kun je plakrandjes aanbrengen;
let op dat je nu op een kleine afstand van de zijden klikt (bv op eenzesde van de zijde),
waardoor er plakrandjes verschijnen door dat punt bij de zijde waar je klikt;
probeer (voor een stevig model) om en om bij de zijden wel/niet plakrandjes te maken,
ze worden rood getekend, en de bijbehorende rand wordt gemarkeerd]

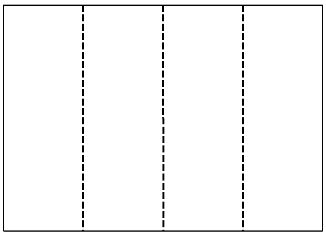
Als je er voor kiest om de Maak uitslag ▸ Handmatig te doen, dan kun je andere bouwplaten maken.
Voor bouwplaten van afgesplitste vlakdelen moet je de bouwplaat handmatig maken.



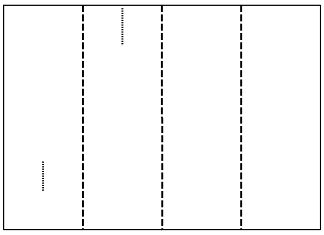
Hoe vouw ik een bouwplaat van een octaëder?

Nodig is een half A4-tje.
Vouw dat in de breedte in vier stroken. Figuur 1
Leg het dwars voor je neer.
Vouw een stukje van de middenvouw van de linker en de tweede strook. Figuur 2

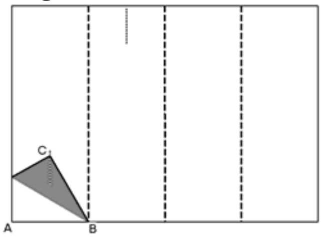
Figuur 1



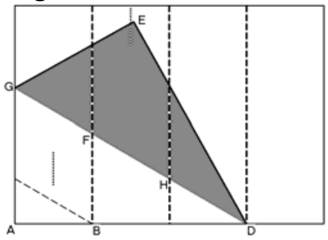
Figuur 2



Figuur 3

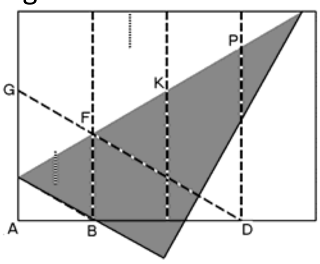


Figuur 4

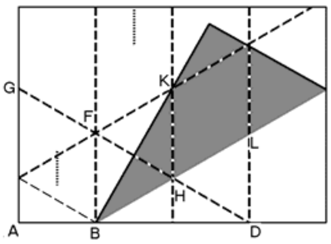


- Vouw door B punt A naar de linker middenvouw (C) . Figuur 3
  Vouw open.
- Vouw door D punt A naar rechter middenvouw (E) → F, G, H . Figuur 4
  Vouw open.
- Vouw GF op BF → K, P . Figuur 5
  Vouw open.
- Vouw door B punt D naar H (DH op KH) → L . Figuur 6
  Vouw open.
- Vouw KL = vouw PK op HK. Figuur 7. → M . Figuur 7
  Vouw open.
- Vouw DM. Vouw open. Nu is de bouwplaat klaar, 8 driehoekjes. Figuur 8
  Alleen de plakrandjes nog toevoegen. Figuur 9

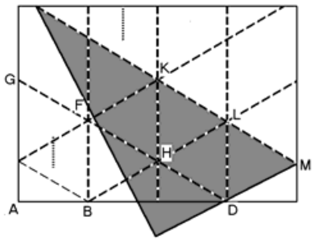
Figuur 5



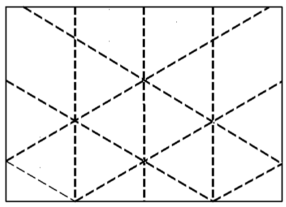
Figuur 6



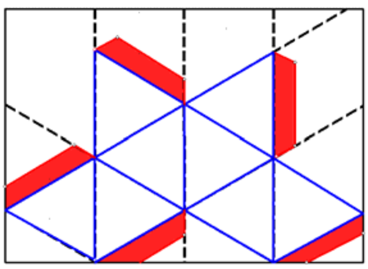
Figuur 7



Figuur 8

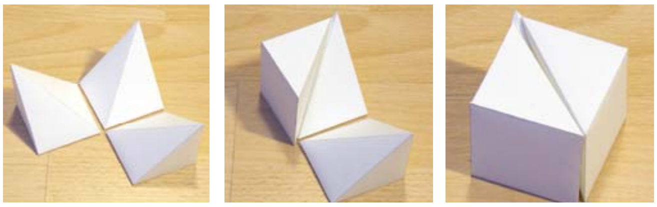


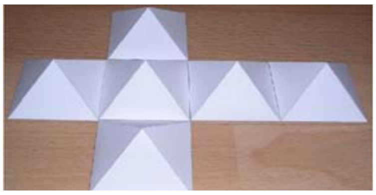
Figuur 9



In een kubus passen verschillende veelvlakken (piramides)

- drie piramides met alle een zijvlak als bodem en de top in een zelfde hoekpunt van de kubus; hiermee kun je “zien” dat de inhoud van een piramide een derde is van de omhullende “balk”. (1)





- zes piramides met alle als top het middelpunt van de kubus; [ook inhoud = $^{1}/_{3}$ G x h binnenste buiten vormen ze een ruitentwaalfvlak (1) Zie figuur rechtsboven.

- een regelmatig viervlak, met zes zijvlak diagonalen; inhoud = $^{1}/_{3}$ van de inhoud van de kubus: $z^3 - 4 \cdot$ inhoud piramides met grondvlak half vierkant: $z^3 - 4 \cdot {}^{1}/_{3} \cdot ½\, z^2 \cdot z = {}^{1}/_{3}\, z^3$

- zes “dakpunten” van een regelmatig twaalfvlak; er blijft dan een gat over in de vorm van een ster Hier kom ik op terug aan het eind van de workshop

(1) Zie ook Euclides 93-5 maart 2018 p.14 WORTELS VAN DE WISKUNDE, Desiree van den Boogaart

In een tetraëder passen 4 tetraëders en een octaëder

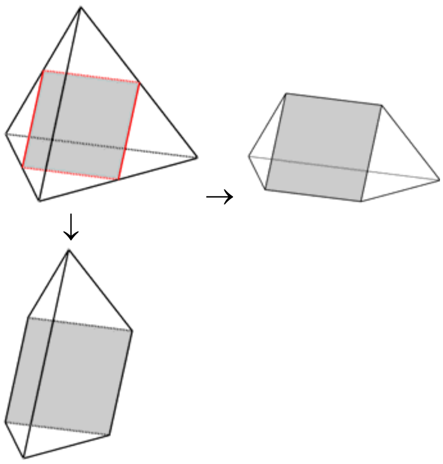
Wanneer je van een massieve tetraëder de vier punten tot halverwege afzaagt, welke vorm blijft dan over?

Je kunt dit doen door van het model de vier punten af te knippen tot bijna de helft van de zijden. Je houdt dan een “draadmodel” over van de octaëder.

Hoe verhoudt de inhoud van de octaëder zich tot de inhoud van het viervlak? De afmetingen van de kleine viervlakken zijn de helft van de grote, dus de inhoud is $^{1}/_{8}$ van de grote. De inhoud van de grote min de vier kleine is dan $1 - 4 \times {}^{1}/_{8} = ½$ van de grote.

Puzzel van twee stukjes

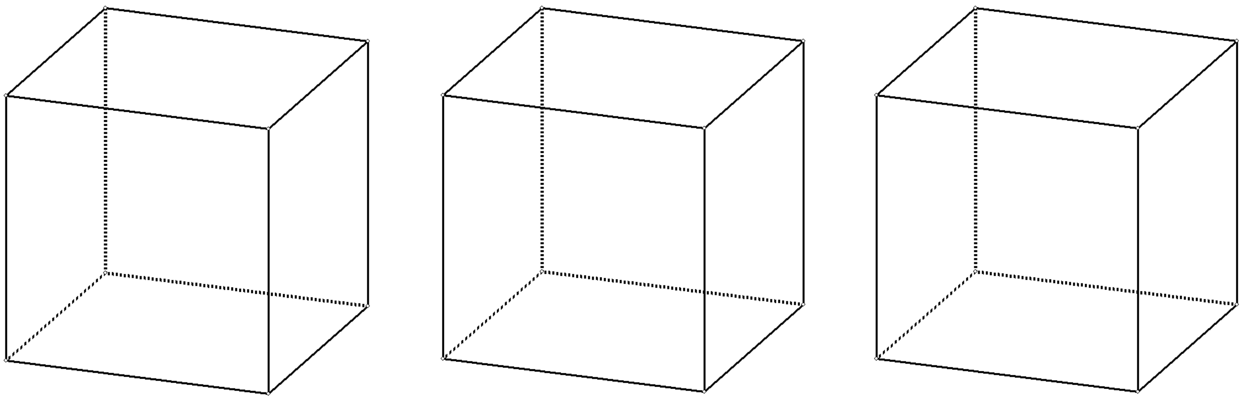
Maak een bouwplaat van een halve tetraëder waarbij je de tetraëder over 4 middens van zijden in twee identieke helften verdeelt. Bewijs dat deze doorsnede precies een vierkant is.



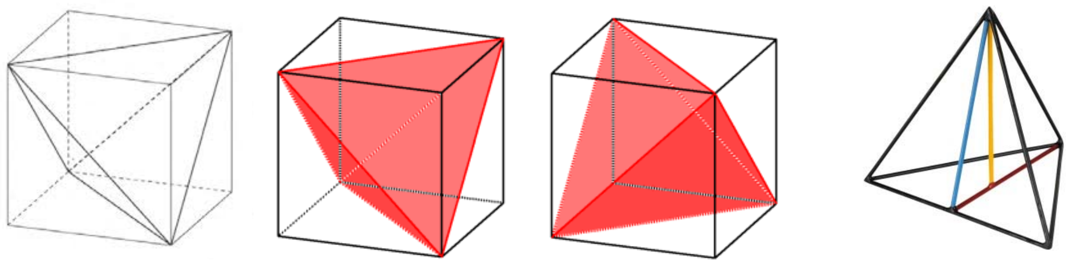
Met gelijkvormigheid (factor ½) bewijs je dat alle zijden gelijk zijn, allemaal halve zijde van de tetraëder. Voor de rechte hoeken kun je bewijzen dat twee tegenoverliggende zijden loodrecht op elkaar staan. Maak een vlak met een zijde en het midden van de tegenoverliggende zijde. De verbindingslijntjes zijn symmetrie-assen = loodlijnen van gelijkzijdige driehoeken. Dus de overstaande zijde staat loodrecht op twee zijden in dat vlak, dus loodrecht op dat vlak. De middenlijntjes zijn parallel met zijden, dus ook onderling loodrecht.

Viervlak in kubus

- Teken op het werkblad in de kubus een viervlak met (zes) zijvlak diagonalen.
- Hoeveel verschillende zijn er?
- Laat zien dat de inhoud van het viervlak $^1/_3$ is van de kubus.
- Als het viervlak rechtop staat is hij dan hoger dan de kubus?



Antwoord:



Stel kubus met ribbe 1. Gelijkzijdige driehoek heeft dan zijden $\sqrt{2}$. De verticale dwarsdoorsnede is dan een gelijkbenige driehoek met 2 zijden van $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ ($\frac{1}{2}\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ in 30^o - 60^0 - 90^o - driehoek) en (schuin opstaande) basis $\sqrt{2}$.

(gele) hoogte *h* kun je berekenen door de oppervlakte van de dwarsdoorsnede op 2 manieren te berekenen:

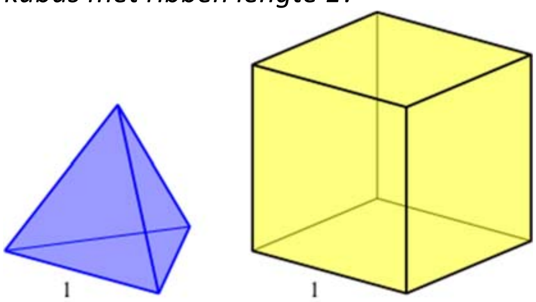
Oppervlakte = ½ x basis (½ $\sqrt{6}$) x *h* = ½ x basis (schuin opstaande ribbe $\sqrt{2}$) x hoogte (hoogtelijn in gelijkbenige driehoek, met Pythagoras $\sqrt{((\frac{1}{2}\sqrt{6})^2 - (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2)=1}$), ook te zien als hoogte van de kubus;

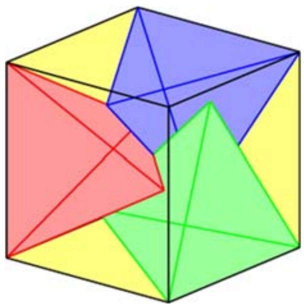
Dit geeft $h = \sqrt{2} \times 1 : (\frac{1}{2}\sqrt{6}) = (2\sqrt{2})/\sqrt{6} = 2/\sqrt{3}$,; dit is >1 dus de tetraëder steekt boven de kubus uit.

BONUS VRAAG

Bij Google: tetraëder Afbeeldingen Wiskundemeisjes januari 2008

Jan van de Craats mailde ons een interessante opgave die hij heel lang geleden verzon voor de Pythagoras-olympiade: *Hoeveel tetraëders (regelmatige viervlakken) met ribbenlengte 1 passen er (maximaal) in een kubus met ribben lengte 1?*





twaalfvlak versus twintigvlak

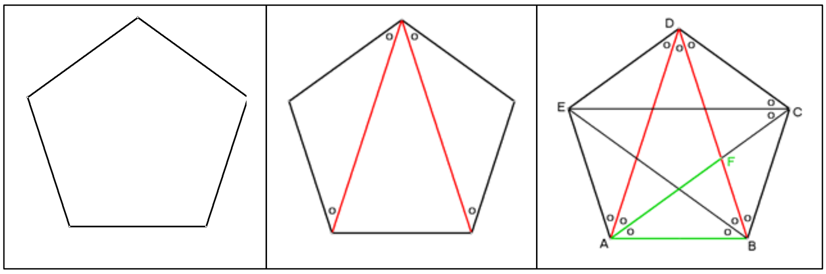
Kun je het aantal ribben en het aantal hoekpunten beredeneren vanuit het aantal zijvlakken?

twaalfvlak	twintigvlak
12 x 5 :2 = 30 ribben	20 x 3 : 2 = 30 ribben
12 x 5 : 3 = 20 hoekpunten	20 x 3 : 5 = 12 hoekpunten

Plaatjes van Piero della Franscesca $\rightarrow$Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Kepler, Dürer

Tensegrity Twintigvlak
TU-Twente

Vijfhoek en de gulden snede

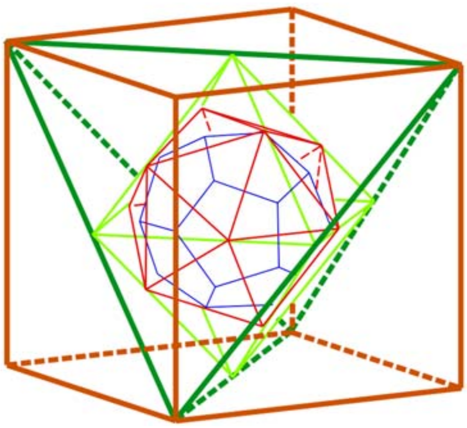


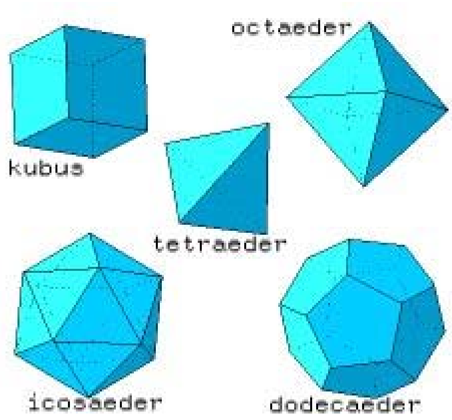
Met de aanwijzingen op **het werkblad** kun je de waarde van de gulden snede berekenen.

In een regelmatige vijfhoek zijn alle hoeken 3x360/5=108^o .
Twee diagonalen vormen aan de buitenkant twee gelijkbenige driehoeken.
De basishoeken zijn in beide driehoeken (180 – 108)/2 = 72/2 = 36^o .
De derde deelhoek tussen twee basishoeken in is dan 108 – 2x36 = 108 – 72, dus ook 36^o.
De vijf diagonalen vormen een vijfpuntster met allemaal hoeken van 36^o.
Diagonaal AC wordt in punt F in twee delen verdeeld.
Deze twee delen hebben de gulden snede als verhouding, die is dezelfde als de verhouding van een zijde en een diagonaal van de vijfhoek: 1 : 1,618 of preciezer: 1 : ½ + ½ √5.
Het bewijs van deze verhouding gaat met behulp van gelijkvormige driehoeken.
Noem de lengte van een zijde van de vijfhoek *z*, en de lengte van een diagonaal *d*.
Dus AC=AD=BD=*d* en AB=CD=*z*.
Alle gemarkeerde hoekjes zijn 36^o.
Merk op dat ΔABF congruent is met ΔDFC (*hzh*). Hoe precies?
Merk op dat ook ΔABF gelijkbenig is. Waarom? Dus AB=AF=*z*.
In ΔABD is $\angle$ABD = 72^o en $\angle$BDA = 36^o, inΔBFA is $\angle$ABF = 72^o en $\angle$BAF = 36^o.
Dus zijn ΔABD en ΔABF gelijkvormig (*hh*).
Hieruit volgt dat AD:AF = AB:BF, ofwel AC:AF= AF:FC(=AC-AF) dus $d:z=z:(d-z)$.
Kruislings vermenigvuldigen geeft $d^2 - zd = z^2 \rightarrow d^2 - zd - z^2 = 0$.
Alles door z^2 delen geeft $({}^{d}/_{z})^2 - ({}^{d}/_{z}) - 1 = 0$. Noem ${}^{d}/_{z} = \varphi$, dan is φ **de gulden snede**.
φ is de (positieve) oplossing van $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. $\varphi = ½ + ½ \sqrt{5}$. Ga dit maar na.
Als je z=1 neemt dan wordt d meteen de gulden snede.

Drie diagonaalvlakken in een twintigvlak

De diagonaalvlakken in een icosaëder hebben de vorm van een zeshoek. De rechthoeken in de diagonaalvlakken hebben 2 overstaande zijden van het twintigvlak als zijde en twee diagonalen met de gulden snede verhouding als zijde. De drie rechthoeken staan onderling loodrecht.
Als je ze in elkaar schuift spannen de hoekpunten van de rechthoeken (3x4=12) precies de hoekpunten van een regelmatig twintigvlak op. Bij de TU-Twente hebben ze met alleen die diagonalen een tensegrity als kunstwerk staan.
Knip de sleuven in de drie rechthoekige diagonaalvlakken als aangegeven op de bouwplaat.

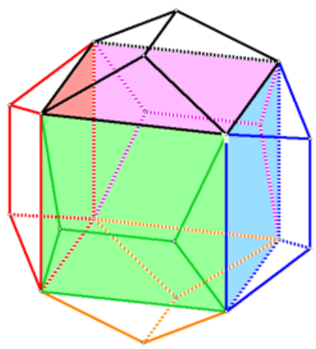




De inhoud van een icosaëder is volgens WIKIPEDIA:
$I = {}^{5}/_{12}\, z^3\, (\sqrt{5} + 3)$

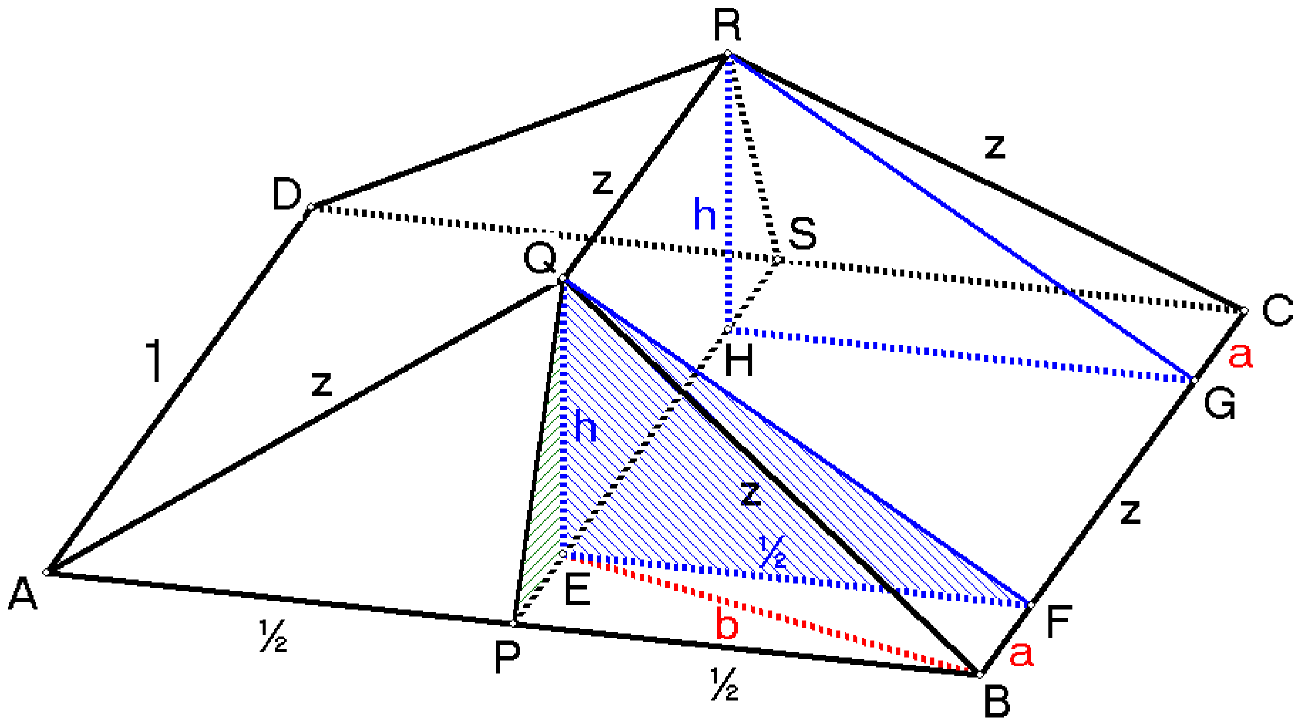
De inhoud van een dodecaëder is volgens WIKIPEDIA:
$I = \frac{1}{4} z^3\, (15 + 7\sqrt{5})$

Vraagje: Hoeveel keer past de inhoud van een dodecaëder in die van een icosaëder
als de lengte van de ribben van beide lichamen even groot zijn?
Antwoord: $0{,}3 \cdot (5+3\sqrt{5}) \approx 3{,}5125$ Ga dit zelf na.



Inhoud dakpunt twaalfvlak

Alle zijkanten van het twaalfvlak (dodecaëder) zijn regelmatige vijfhoeken.
De zijde (**z**) en de diagonalen (**d**) hebben de gulden snede verhouding.
Stel de lengte van de diagonalen op 1. Dan heeft de kubus dus inhoud $1^3 = 1$.
Hoeveel procent van de kubus wordt ingenomen door de stervormige holte?



Driehoek AQB vormt samen met vierhoek BCRQ een regelmatige vijfhoek met zijden **z** en diagonalen met lengte 1.
PS=BC=AB=1, daarom weten we dat $\mathbf{z} = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ ($\approx 0{,}618$). Er geldt dat $\mathbf{z}^2 = 1 - \mathbf{z}$.
FQ en RG zijn loodrecht op BC getekend, dus FG = QR = **z**. BC = BF+FG+GC = $a + \mathbf{z} + a = 1$. Dus $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{z}$.
Dan is $a = BF = CG = (1 - \mathbf{z})/2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{z} = \frac{1-(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2})}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} = {}^1/_8(6 - 2\sqrt{5})$ ($\approx 0{,}191$).
In driehoek BFE geldt de stelling van Pythagoras: $b^2 = a^2 + (\frac{1}{2})^2$.
In driehoek BEQ geldt de stelling van Pythagoras: $h^2 = \mathbf{z}^2 - b^2 = (\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2})^2 - \left((\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{.5})^2 + \frac{1}{4}\right) =$
${}^5/_4 - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4} - ({}^9/_{16} - {}^3/_8\sqrt{5} + {}^5/_{16} + \frac{1}{4}) = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} - {}^9/_8 + {}^3/_8\sqrt{5} = {}^3/_8 - {}^1/_8\sqrt{5} = {}^6/_{16} - {}^2/_{16}\sqrt{5} = {}^1/_{16}(6 - 2\sqrt{5})$ ($\approx 0{,}0955$).
Dit geeft $h^2 = \frac{1}{4}\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})}$; $(\sqrt{5} - 1)^2 = 6 - 2\sqrt{5}$ [**ga dit na**]; dus $h = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{2}\mathbf{z}$!! dus $\angle EBQ = 30^o$.
Ook geldt: $h \cdot \mathbf{z} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{8}(6 - 2\sqrt{5}) = a$! (1)

$I_{dakpunt} = 2 \cdot I_{prisma\ (EFQ.HGR)} + 4 \cdot I_{piramide\ (G.PBFE)} = 2\cdot$"*gronvlak·hoogte*" $+ 4\cdot{}^1/_3\cdot$"*grondvlak·hoogte*" =
$2\cdot EFQ\cdot RQ + 4\cdot{}^1/_3\cdot PBFE\cdot h = 2\cdot \underline{\frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{1}{2}} \cdot \mathbf{z} + 4\cdot {}^1/_3 \cdot \underline{a \cdot \frac{1}{2}} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \mathbf{z} + {}^2/_3\, a \cdot h$; a en h uitdrukken in **z** geeft:
$I_{dakpunt} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\mathbf{z} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathbf{z} + {}^2/_3 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{z}) \cdot \frac{1}{2}\mathbf{z} = \frac{1}{4}\mathbf{z}^2 + {}^1/_6\,\mathbf{z} - {}^1/_6\,\mathbf{z}^2 = {}^1/_{12}\,\mathbf{z}^2 + {}^1/_6\,\mathbf{z} = {}^1/_{12}(1 - \mathbf{z}) + {}^1/_6\,\mathbf{z} = {}^1/_{12} + {}^1/_{12}\,\mathbf{z}$
Met de waarde van **z** krijg je nu $I_{dakpunt} = {}^1/_{12} + {}^1/_{12}(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}) = {}^1/_{24} + {}^1/_{24}\sqrt{5} = {}^1/_{24}(\sqrt{5} + 1)$
Met dank aan Agnes Verweij.

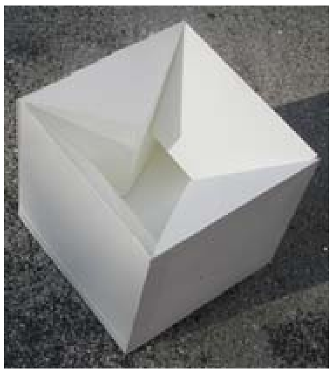
Inhoud ster = Inhoud kubus – Inhoud zes dakpunten = $1 - 6 \cdot {}^1/_{24}(\sqrt{5} + 1) = 1 - \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}$ **en dat is** a **.**
De inhoud van de ster past dus in een plakje van de kubus met breedte BF = a.
Dus de inhoud van de ster is ongeveer 20% van de inhoud van de kubus.

Iets ingewikkelder manier:
(1) [Bedenk dat $h \cdot \mathbf{z} = a$, en $h = \mathbf{z}/a$, dan krijg je :] $I_{dakpunt} = \frac{1}{2}a + {}^4/_3\, a \cdot h = \frac{1}{2}a(1 + {}^4/_3\, h) = \frac{1}{2}a(1 + {}^4/_3 \frac{a}{\mathbf{z}}) =$
$\frac{1}{2}(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5})(1 + {}^4/_3 \cdot \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}}{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{1}{8}(3 - \sqrt{5})(1 + \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{1}{8}(3 - \sqrt{5}) \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5-1}(3 - 5 + 2\sqrt{5})\right) =$
$\frac{1}{8}(3 - \sqrt{5}) \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2(\sqrt{5} - 1)\right) = \frac{1}{8}(3 - \sqrt{5})(1 + \frac{1}{3}\sqrt{5} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{8} \cdot {}^1/_3 \cdot (3 - \sqrt{5})(\sqrt{5} + 2) = {}^1/_{24}(\sqrt{5} + 1)$.

Je kunt ook de formule van de inhoud van een 12-vlak in WIKIPEDIA opzoeken:

$I_{dodecaëder} = \frac{1}{4}\mathbf{z}^3(15 + 7\sqrt{5})$; zijde van de kubus = diagonaal **d** van de vijfhoek met zijden **z**; met **d**=1 is $\mathbf{z} = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$
Daarmee $I_{dakpunten} = I_{12\text{-}vlak} - I_{kubus}$ dus $I_{gat} = I_{kubus} - I_{dakpunten} = I_{kubus} - (I_{12\text{-}vlak} - I_{kubus}) = 2 \cdot I_{kubus} - I_{12\text{-}vlak}$.
Met $\mathbf{z}^2 = 1 - \mathbf{z}$ krijg je $\mathbf{z}^3 = \mathbf{z}(1 - \mathbf{z}) = \mathbf{z} - \mathbf{z}^2 = \mathbf{z} - (1 - \mathbf{z}) = 2\mathbf{z} - 1$.
Dus $I_{gat} = 2\mathbf{d}^3 - \frac{1}{4}\mathbf{z}^3(15 + 7\sqrt{5}) = 2\mathbf{d}^3 - \frac{1}{4}(2\mathbf{z} - 1)(15 + 7\sqrt{5}) =$
$2 \cdot 1^3 - \frac{1}{4}(2(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}) \cdot (15 + 7\sqrt{5}) = 2 - (\sqrt{5} - 2) \cdot (15 + 7\sqrt{5}) = 2 - \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 35 - 30) = 2 - {}^5/_4 - \frac{1}{4}\sqrt{5} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} = a$!

De apotheose: de ster in de kubus



Als je de zes dakpunten van de dodecaëder aan elkaar plakt en dan naar binnen klapt passen ze precies in een kubus. Maar er zit een gat in! Welke vorm heeft het gat? Het is een ster.
Op de werkbladen vind je een bouwplaat van telkens een kwart van de ster.
Om te snappen hoe je die in elkaar moet zetten is het handig om eerst de 6 dakpunten te maken en aan elkaar te plakken. De zijkanten van de dakpunten vormen twee aan twee een regelmatige vijfhoek = een zijkant van de dodecaëder. De ruimte binnen de dakpunten is een kubus. Als je de dakpunten als bouwplaat van een kubus aan elkaar plakt (dus om en om met de richtring van de nok steeds loodrecht op elkaar) en ze naar binnen klapt dan vormen de vierkanten van die dakpunten precies de buitenkant van een kubus. De zes dakpunten passen precies in een kubus.
Maar als je een van die dakpunten open klapt dan zie je een gat in de kubus.
De vorm van elk van de twaalf zijkanten van de ster is die van een regelmatige vijfhoek met een deuk, een vijfhoek waarvan een hoekpunt tov een diagonaal gespiegeld is.
Veel plezier met het maken van de dakpunten en de ster!

zijvlak (12x) van de ster