

0 Om te beginnen

Rekenoefeningen:

- a, b, c en d zijn verschillende cijfers.

Hoe moete je a, b, c en d kiezen zodat de vermenigvuldiging klopt?

$$\begin{array}{r} ab \\ cb \times \\ \hline ddd \end{array}$$

Voor het juiste antwoord maak je de (witgemaakte) tekens van de regel hieronder zwart:

- In elke rij en kolom moeten de cijfers 1 t/m 5 komen te staan.

De tekens $\times$: + en $-$ achter de cijfers in de hokjes betekenen dat het geschreven getal het antwoord is van de genoemde bewerking tussen de twee getallen die in het hokje moeten komen.

6+ betekent in dit geval dat de twee cijfers 1 en 5 zijn ($1+5=6$ of $5+1=6$)

of 2 en 4 ($2+4=6$ of $4+2=6$).

Hoe moeten de cijfers 1 t/m 5 in het schema worden gezet zodat aan alle gegeven voorwaarden voldaan is?

Antwoord in de rechter tabel:

3x	6+		20x	2 :
	8x	15x		
6+			3 :	
	1	8x	8+	
2-			2x	

3	5	1	4	2
1	2	3	5	4
2	4	5	1	3
4	1	2	3	5
5	3	4	2	1

1 De Negenproef ⁽¹⁾

Waarom kun je daarmee zeker weten dat een getal deelbaar door 9?

abcdefg is deelbaar door 9 als $a+b+c+d+e+f+g$ deelbaar is door 9

a betekent $a \cdot 1000000 = a(999999+1) = 9 \cdot a \cdot 111111 + a$; bij delen door 9 krijg je rest a

idem voor b, c, d, e, f en g krijg je resp. rest b, c, d, e, f en g.

De totale rest is dan $a+b+c+d+e+f+g$; als dit getal deelbaar is door 9, dan heeft abcdefg bij deling door 9 rest 0.

Gooi 4 keer met een dobbelsteen, zet de cijfers achter elkaar.

Hoe groot is de kans dat het gekregen getal deelbaar is door 9?

Antwoord:

Som is 9	aantal	som is 18	aantal
1116	4	6651	12
1125	12	6642	12
1134	12	6633	6
1224	12	6552	12
1233	12	6543	24
2223	4	6444	4
		5553	4
		5544	
	<u>+</u>		<u>6</u> +
Totaal	56	80	= 136

kans is $136/6^4 = 136/1296 = 17/12 \approx 0,10494$

2 Is 1234567654321 een kwadraat? ⁽¹⁾

Het antwoord is dat je getal het kwadraat van een getal van n enen ($n < 10$) is.

Waarom komt er dan altijd 123...n...321 uit?

Voer de vermenigvuldiging van $111...1 \times 111...1$ maar eens uit. Wat valt je dan op?

3 kettingbreuk met je leeftijd Welk getal benader je daarmee? ⁽¹⁾

Eerst een paar voorbeelden:

$1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(...))))$ stap voor stap:

$1; 1 + 1/1 = 2; 1 + 1/(1 + 1/1) = 3/2; 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/1)) = 1 + 2/3 = 5/3; 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/1))) = 1 + 3/5 = 8/5$ enz.

Herken je deze rij? De delingen van opeenvolgende getallen in de rij van Fibonacci.

De breuk nadert tot gulden snede verhouding $\phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1,618$

$1 + 1/(2 + 1/(2 + 1/(2 + 1/(...)))) = a$ geeft $a = 1 + 1/(1 + a); a^2 = 2 \quad \sqrt{2} = 1,414213562$

Stap voor stap:

$1 + 1/2 = 1,5; 1 + 1/(2 + 1/2) = 1,4; 1 + 1/(2 + 1/(2 + 1/2)) = 17/12 = 1,416667;$

$1 + 2/(2 + 2/(2 + 2/(2 + 2/(...)))) = a$ geeft $a = 1 + 2/(1 + a); a^2 = 3 \quad \sqrt{3} = 1,732050808$

Stap voor stap: $1 + 2/2 = 2; 1 + 2/(2 + 2/2) = 5/3 = 1,6667; 7/4 = 1,75; 19/11 = 1,72727; 26/15 = 1,73333; 71/41 = 1,7317$

of $1 + 2/(2 + 2) = 1,5; 1 + 2/(2 + 2/(2 + 2)) = 1,8; 1 + 2/(2 + 2/(2 + 2/(2 + 2))) = 12/7 = 1,7143$

Je leeftijd pq:

Drie soorten: $1 + p/(1 + q/(1 + p/(1 + q/(...)))) =$ of $p + 1/(q + 1/(p + 1/(...))) =$ of $1 + 1/(p + 1/(q + 1/(p + 1/(q + ...))))$

Voorbeeld:

pq=37: $a = 1 + 3/(1 + 7/(1 + 3/(1 + 7/(1 + 3/(...)))))$ geeft $a = 1 + 3/(1 + 7/a); a - 1 = 3a/(a + 7); a^2 + 3a - 7 = 0;$

$D = 9 + 28 = 37; a = (-3 + \sqrt{37})/2 \approx 1,54138...$

of $a = 1 + 1/(3 + 1/(6 + a)); a - 1 = (6 + a)/(19 + 3a); 3a^2 + 15a - 25 = 0; D = 225 + 300 = 525; a = (-15 + \sqrt{525})/6 \approx 1,31881...$

Je kunt op de GR de optie Rijen (SEQ) gebruiken: $u(n) = 1 + 3/(1 + 7/(u(n-1))); u(1) = 1$ (nMIN=1).

Vrij snel nadert de rij tot de limiet in tig decimalen.

EXTRA VRAAG: Wanneer komt a op een mooi getal uit?

$a = 1 + p/(1 + q/(1 + p/(1 + ...)))$ geeft $a = 1 + p/(1 + q/a); a - 1 = pa/(a + q); (a - 1)(a + q) = pa; a^2 + (q - p - 1)a - q = 0$

$D = (q - p - 1)^2 + 4q$; als $D = k^2$ dan komt a mooi uit: $a = (p + 1 - q + k)/2$

D=4	als q=1 en q-p-1=0, p=0;	01 jaar geeft $a^2 - 1 = 0; a=1$
D=4	als q=0 en q-p-1=-2, p=1;	10 jaar geeft $a^2 - 2a = 0; a=2$
D=4	als q=0 en q-p-1=2, p=3;	30 jaar geeft $a^2 + 2a = 0; a=-2$
D=16	als q=4 en q-p-1=0, p=3;	34 jaar geeft $a^2 - 4 = 0; a=2$
D=16 4+12	als q=3 en q-p-1=-2, p=4;	43 jaar geeft $a^2 - 2a - 3 = 0; a=3$
D=16 4+12	als q=3 en q-p-1=2, p=0;	03 jaar geeft $a^2 + 2a - 3 = 0; a=1$
D=25 9+16	als q=4 en q-p-1=-3, p=6;	64 jaar geeft $a^2 - 3a - 4 = 0; a=4$
D=36 4+32	als q=8 en q-p-1=2, p=5;	58 jaar geeft $a^2 + 2a - 8 = 0; a=2$
D=36 4+32	als q=8 en q-p-1=-2, p=9;	98 jaar geeft $a^2 - 2a - 8 = 0; a=4$
D=36 16+20	als q=5 en q-p-1=-4, p=8;	85 jaar geeft $a^2 - 4a - 5 = 0; a=5$
D=49 25+24	als q=6 en q-p-1=-5, p=10;	///
D=49 9+40	als q=10	///
D=64 36+28	als q=7 en q-p-1=-6, p=12	///

(1) Voor de genoemde drie onderdelen deed ik inspiratie op uit het boek

Van negenproef tot gulden snede Rekenkundige bewerkingen, wiskundige vondsten en puzzels

Door drs. H. J. Stutvoet

Uitg. N.V. Wed J. Ahrend & Zoon, Amsterdam Tweede druk 1948

4 Hoeveel gaatjes komen er?

4.1 antwoord C heeft de juiste vorm van het blaadje

4.2

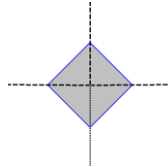
Als je een vouwblaadje n keer dubbelvouwt, en je knipt een hoekje eraf, hoeveel gaatjes krijg je dan?

n	1	2	3	4	5	6	7
G	0	1	2	4	8	16	32
L	2	4	8	16	32	64	128

 n = aantal keer vouwen

G = aantal gaten

L = aantal lagen Voor 1 gat heb je 4 lagen nodig:

Het aantal gaten bij n keer vouwen is dus 2^{n-2} .Met volledige inductie is het bewijs van de formule te geven. Begin bij $n=2$.Bij 2 keer vouwen komt er 1 ($=2^0 = 2^{2-2}$) gaatje.

Bij elke keer vouwen verdubbelt het aantal lagen blaadjes, dus ook het aantal gaatjes in de hoek waar alle dubbel gevouwen lagen bij elkaar zitten.

Als bij n keer vouwen er 2^{n-2} gaatjes zitten, dan wordt dit in de volgende $n+1$ ^{ste} stap $2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1} = 2^{(n+1)-2}$.

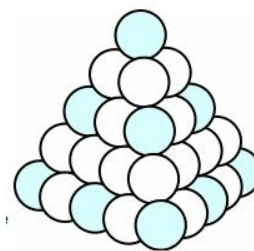
5 Hoe hoog wordt de stapel?

Als je tennisballen gaat stapelen, hoe hoog wordt dan je stapel met 100 ballen?

Een formule voor een stapel met n lagen driehoeken is $B = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$

Bedenk dat het aantal ballen in elke laag eronder het volgende driehoeksgetal is.

$$u_n = \frac{1}{2}n \cdot (n+1)$$



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
$B = s_n$	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220

Bewijs van de formule:

Omdat de ballen een volume vormen kun je stellen dat de formule voor de hele stapel een derdegraads formule is:

$s_n = an^3 + bn^2 + cn + d$; er geldt $s_{n+1} - s_n = u_{n+1}$; [het verschil tussen de stapel met $n+1$ lagen en n lagen is precies u_{n+1}]
 $a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) + d - (an^3 + bn^2 + cn + d) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ [linkerlid moet gelijk zijn aan rechterlid voor alle n]
 $a(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + b(n^2 + 2n + 1) + cn + c + d - an^3 - bn^2 - cn - d = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$; haakjes uitwerken geeft:
 $3an^2 + (3a + 2b)n + a + b + c = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$; dit geeft $3a = \frac{1}{2}$, $3a + 2b = \frac{1}{2}$, $a + b + c = 1$; dus $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = 0$.

Aantal ballen van boven naar beneden: 1+3+6+10+15+21+28+36+45+55+ ...

Van onder af gestapeld worden de volgende aantallen verkregen:

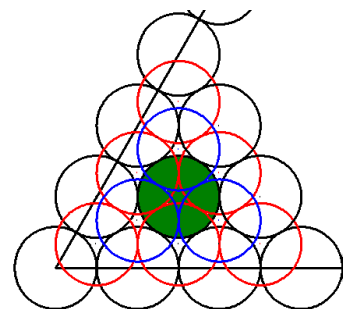
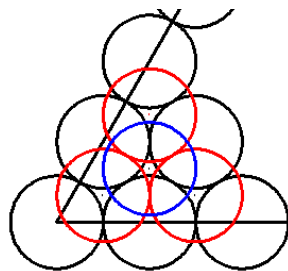
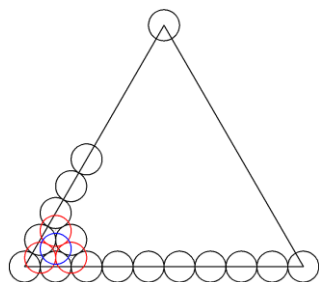
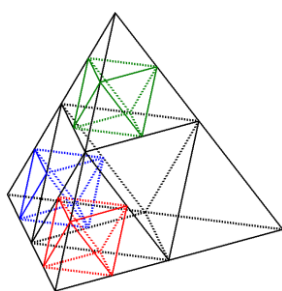
bij 1 laag: 1 bij 2 lagen: 3,4 bij 3 lagen: 6,9,10 bij 4 lagen: 10,16,19,20 bij 5 lagen: 15,25,31,34,35

bij 6 lagen: 21,36,46,52,55,56 bij 7 lagen: 28,49,64,74,80,83,84 bij 8 lagen: 36,64,85,100 ! hebbes (110,116,119,120)

Met 100 tennisballen maak je dus een stapel van vier lagen, met als onderste laag 36 ballen..

De hoogte bereken je met de middelpunten van de ballen. Die vormen gestapelde tetraëders. Dan moet er nog 2 keer de straal (= 1 diameter) van de tennisbal bij. Neem aan dat de diameter 67 mm is.

In de eerste figuur kun je zien hoe de tetraëders van de middelpunten telkens tetraëders vormen in een groter viervlak. In de tweede figuur zie je het (gedeeltelijke) bovenaanzicht van de onderste laag van de stapel, drie (rode) ballen van de tweede laag en 1 blauwe van de derde laag. De derde figuur geeft hiervan een detail.



In de laatste figuur zie je hoe de lagen op elkaar zitten. Rood op zwart, blauw op rood en de groene van de vierde laag ligt precies boven een zwarte uit de eerste laag.

De hoogte van een tetraëder met ribbe a is $\frac{1}{3}a\sqrt{6}$. In dit geval is $a = 67$ mm.

[De hoogte van een gelijkzijdige driehoek met zijde a is $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$. De inhoud van een tetraëder met ribbe a is $\frac{1}{12}a^3 \cdot \sqrt{2}$.]

Voor vier lagen heb je drie keer de hoogte van een tetraëder nodig: $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 67 \cdot \sqrt{6} = 67\sqrt{6} \approx 164,116$.

De totale hoogte met 100 tennisballen is dan $67 + 67\sqrt{6} \approx 231$ mm, dus ongeveer 23 cm.

Van internet:

de **diameter** van de bal moet tussen de 65,4 en 68,6 mm (2,57-2,70 inch) zijn; de **massa** tussen de 56,0 en 59,4 gram; de **stuiterhoogte**: de bal moet tussen de 1,38 en 1,51 meter hoog opstuiteren van een betonnen ondergrond, als hij van ongeveer 2,54 m (100 inch) hoogte wordt losgelaten.

6 Wanneer je een recept hebt om een regelmatige vijfhoek te vouwen, hoe weet je dan dat die vijfhoek echt regelmatig is? Zie hieronder.

7 Wanneer je een module van een ruitenvlak vouwt, hoe weet je dan dat de diagonalen van de ruit exact de verhouding $\sqrt{2} : 1$ heeft? Zie hieronder.

8 Wanneer je vijf kubussen in een uitgespaard hoekpunt in een kringetje strak in elkaar steekt, dan lijken ze met elkaar een regelmatige vijfhoek te vormen. Hoe zeker weet je dat? Zie hieronder.

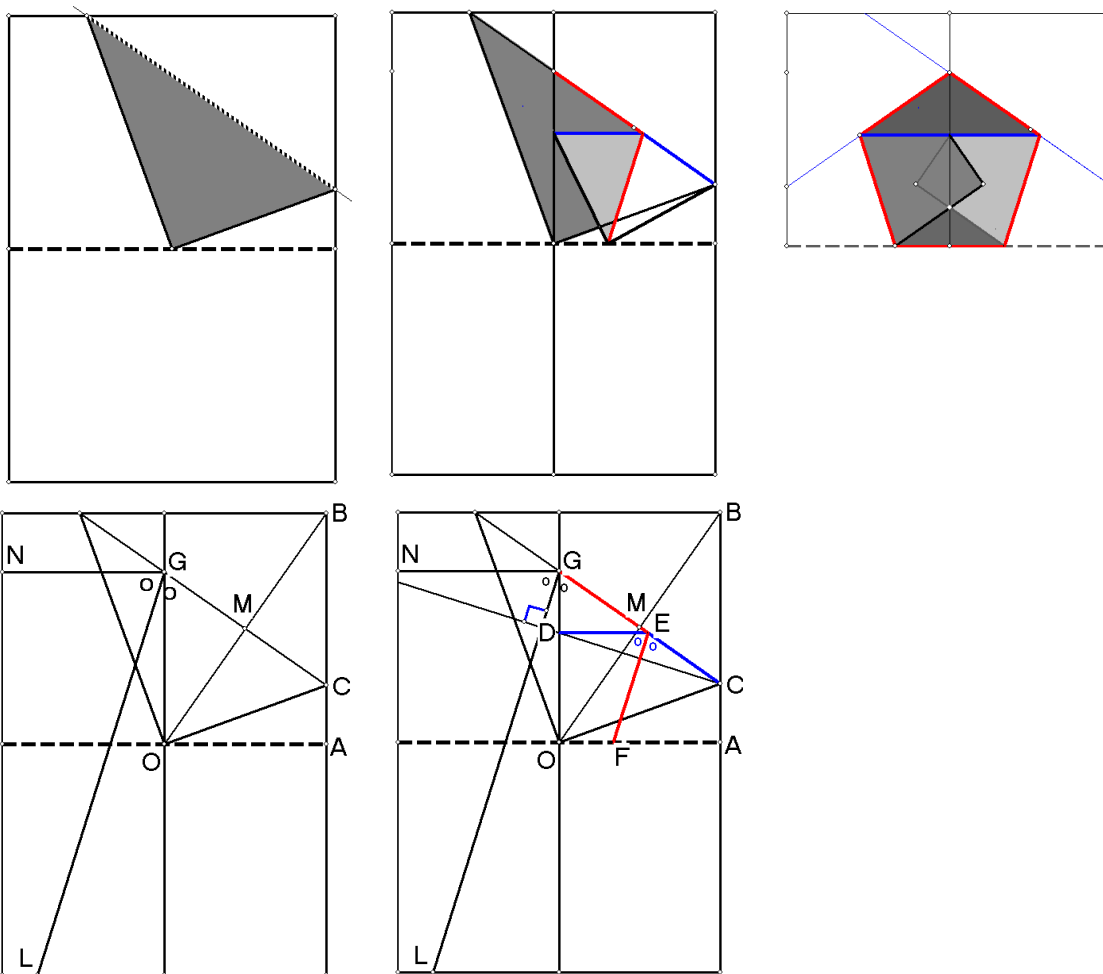
9 Je ziet een doosje. Wat komt er uit?

Als je een afgezaagde kubus in een doosje met een vierkante bodem wilt opbergen, hoe hoog wordt dat doosje dan, en welke afmetingen heeft dan het kleinste vierkant dat als bodem kan dienen? Zie hieronder

BONUS

10 Hoe vouw je een ruit met diagonalen in de verhouding van de gulden snede? Zie hieronder.

Module van een regelmatige vijfhoek uit een A4 (met twee flappen)



Bekijk bij het lezen van het onderstaande de vijf getekende figuren in samenhang.

Hiermee worden de vouwen uitgelegd om tot de vijfhoek te komen.

Daarna worden de berekeningen uitgevoerd met de lijnen in het kwart A4 rechtsboven.

Ik neem dan een rechthoekig assenstelsel door O, dus met OA als x-as en OG als y-as.

Vouw een A4 middendoor. (OA)

Vouw het punt rechtsboven (B) naar het midden (met een klein vouwtje aangeven) van de vouw (O). ⁽¹⁾

De nieuwe vouw (CG) is de middelloodlijn tussen deze twee punten (O en B).

Nu moet punt C naar een punt D op OG gevouwen worden zodat de nieuwe vouw (EF), de middelloodlijn van CD is, en zo komt te liggen dat DE horizontaal is, dus evenwijdig met OA. ⁽²⁾

Punt E ligt na het vouwen op CM, precies zodat $CE = DE$, met $DE \parallel OA$.

Dit betekent dat de middelloodlijn (EF) van CD de deellijn is van hoek CED.

Daartoe heb ik eerst de deellijn (GL) van hoek CGN (is F-hoek met de gezochte hoek CED) getekend.

Nu moet CD loodrecht op EF komen, waarbij EF evenwijdig met GL moet zijn.

Dus als ik nu door C de loodlijn teken op GL, dan is het snijpunt van die loodlijn met OG het gevraagde punt D.

Nu zijn EF en EG zijden van de vijfhoek, en is OF een halve zijde.

Dus de vraag is om na te gaan of $EF = EG = 2 \cdot OF$.

Daarvoor gebruik ik de volgende figuur.

We berekenen in volgorde de coördinaten van M, C, D, E, F en G.

Stel $OA=1$, dan is $AB=\sqrt{2}$ omdat de verhouding van de zijden van een A4-tje $1 : \sqrt{2}$ is. Ook te vinden op WIKIPEDIA.

M is het midden van OB: • M ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$)

De helling van OB is $\sqrt{2}$.

CM staat loodrecht op OB, dus de helling van CM is $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

CM: $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{3}{4}\sqrt{2}$;

C heeft $x = 1$; dit geeft $y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$: • C(1, $\frac{1}{4}\sqrt{2}$)

Noem $\angle DEG = \alpha$ (de hellingshoek van CM en CG is dan $-\alpha$).

(1) Dus $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dan is $\angle DEC = 180^\circ - \alpha$, $\angle DEK = \frac{1}{2}\angle DEC = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$

Hoek EDK is de hellingshoek van CD.

$\angle DKE = 90^\circ$, dus is $\angle EDK = 90^\circ - \angle DEK = \frac{1}{2}\alpha$

Er geldt $\alpha = 2 \cdot (\frac{1}{2}\alpha)$. Gebruik van de dubbele hoek formule geeft

$$\tan \alpha = \tan(2 \cdot (\frac{1}{2}\alpha)) = \frac{2\tan(\frac{1}{2}\alpha)}{1-\tan^2(\frac{1}{2}\alpha)}, \text{ dus met (1) krijg je } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\tan(\frac{1}{2}\alpha)}{1-\tan^2(\frac{1}{2}\alpha)}$$

Dit geeft $\tan^2(\frac{1}{2}\alpha) + 2\sqrt{2} \tan(\frac{1}{2}\alpha) - 1 = 0$; Discriminant $= (2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 12 = (2\sqrt{3})^2$

Dus $\tan(\frac{1}{2}\alpha) = \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$. Lijn CD is dalend en heeft dus helling $-(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

De formule van lijn CD, lijn door C(1, $\frac{1}{4}\sqrt{2}$) met helling $-(\sqrt{3} - \sqrt{2})$, wordt $y = (-\sqrt{3}+\sqrt{2})(x-1) + \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

D is het snijpunt met de y-as; $x=0$ geeft $y = (-\sqrt{3}+\sqrt{2}) \cdot (-1) + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{2}$ ($\approx 0,6714$) : • D(0, $\sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{2}$)

DE is evenwijdig met OA, dus $y_E = y_D = \sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{2}$; E ligt op lijn CM, dus $\sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{3}{4}\sqrt{2}$.

Dit geeft $x = (1\frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} = 3 - \sqrt{6}$ ($\approx 0,55$) : • E($3 - \sqrt{6}$, $\sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{2}$)

De helling van EF = $\tan(\angle DEK) = \tan(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{\tan(\frac{1}{2}\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

De formule van lijn EF, lijn door E($3 - \sqrt{6}$, $\sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{2}$) met helling $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, wordt $y = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}(x-3+\sqrt{6}) + \sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{2}$.

F is het snijpunt met de x-as;

$y=0$ geeft $x-3+\sqrt{6} = (\frac{3}{4}\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; $x = \frac{3}{4}\sqrt{6} - 1\frac{1}{2} - 3 + \sqrt{6} + 3 - \sqrt{6} = \frac{3}{4}\sqrt{6} - 1\frac{1}{2}$ ($\approx 0,337$) : • F($\frac{3}{4}\sqrt{6} - 1\frac{1}{2}$, 0)

G is het snijpunt van lijn CM met de y-as; $x=0$ geeft $y = \frac{3}{4}\sqrt{2}$: • G(0, $\frac{3}{4}\sqrt{2}$)

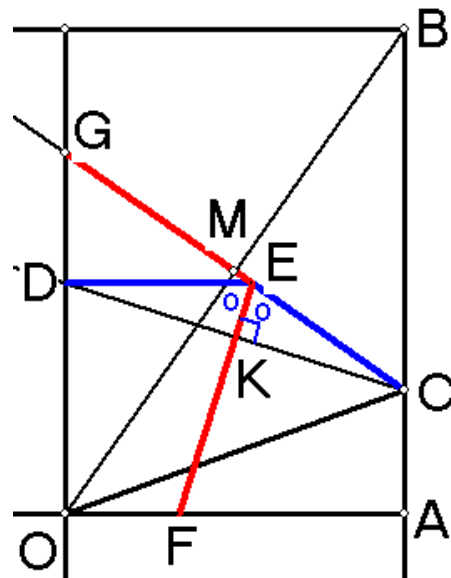
Nu nog checken of $EF = EG = 2 \cdot OF$

$EF^2 = (4\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{2})^2 = 20,25 - 15\frac{3}{4}\sqrt{6} + 18,375 + 3 - 1\frac{1}{2}\sqrt{6} + 1,125 = 42,75 - 17,25\sqrt{6}$, dus $EF \approx 0,7045$

$EG^2 = (3 - \sqrt{6})^2 + (\sqrt{3} - 1\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 = 9 - 6\sqrt{6} + 6 + 3 - 3\sqrt{6} + 4,5 = 22,5 - 9\sqrt{6}$, dus $EG \approx 0,6742$

$2 \cdot OF = 2 \cdot (\frac{3}{4}\sqrt{6} - 1\frac{1}{2}) = 1,5\sqrt{6} - 3 \approx 0,6742$!

Check: $(1\frac{1}{2}\sqrt{6} - 3)^2 = 2,25 \cdot 6 - 9\sqrt{6} + 9 = 22,5 - 9\sqrt{6}$, dus $EG = 2 \cdot OF$, EG en 2OF zijn wel even lang.



dubbele hoek formule:

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

⁽¹⁾ Doe dit ook voor de andere drie hoekpunten van het A4-tje.

Vouw dan de twee helften (over lijn OA) op elkaar.

⁽²⁾ Vouw ook de linkerhelft op dezelfde manier naar punt D.

Module van een ruit voor een ruitentwaalfvlak (rombische dodecaëder)

1 Vouw een recht kruis.

2 Vouw het hoekpunt rechtsonder naar het midden op de bovenrand. Zie figuur 1. Vouw weer open.

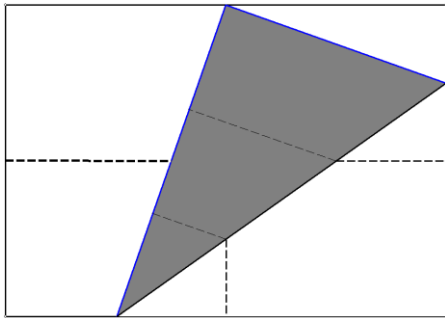
Merk op dat de diagonale vouwlijn de vouwen van het rechte kruis precies in het midden snijdt.

3 Vouw de andere hoekpunten op een zelfde manier naar het midden van de randen.

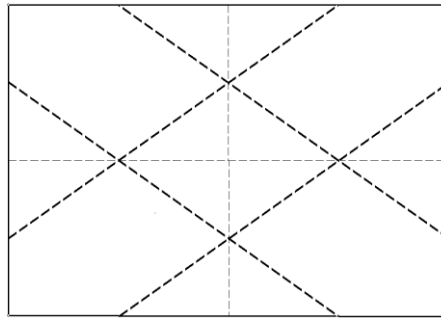
Je krijgt dan een "Andreaskruis" van diagonale vouwen. Zie figuur 2.

Omdat de verhouding van de zijden van een A4-tje $1 : \sqrt{2}$ is heeft de ruit in het midden diagonalen met dezelfde verhouding $1 : \sqrt{2}$. Deze ruit is dus al de ruit die we nodig hebben voor het ruitentwaalfvlak. Zie figuur 3.

We gaan verder vouwen totdat we een module hebben met twee flappen.

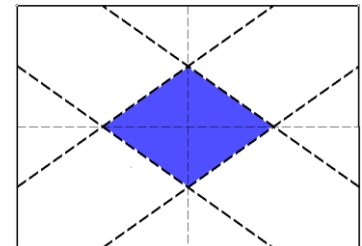


Figuur 1



Figuur 2

Dit is de ruit die we moeten hebben.



Figuur 3

4 Vouw nog twee verticale lijnen door de kruispunten van de diagonalen op de middenvouw van het rechte kruis.

5 Vouw de vier hoekpunten naar binnen langs vouwen vanaf de uiteinden van de diagonale vouwen. Zie figuur 4.

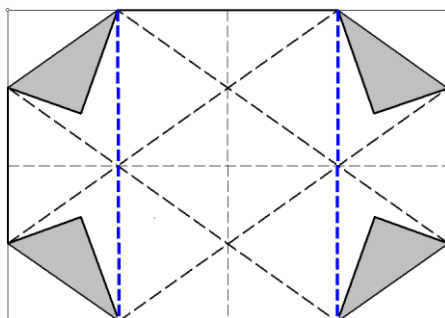
6 Vouw de strook linksonder (met de omgevouwen hoek) over de diagonale vouw omhoog. Zie figuur 5.

Nu komt het moeilijkste deel. Houd een vinger op de donker gearceerde driehoek, zodat die op tafelgedrukt wordt. 7

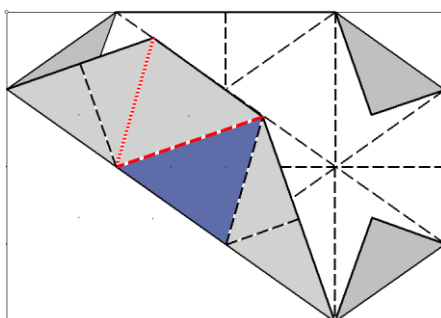
Vouw een zigzag met **dalvouw** (----) en **bergvouw** (.....). Zie figuur 6.

8 Draai het blad een halve slag en herhaal de zigzagvouw aan de andere kant.

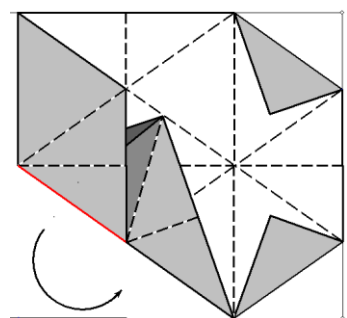
9 Aan de rechterkant ligt nu een ruit onder de laatste zigzag. Til de open kant van die ruit omhoog en schuif de zigzagvouw onder die ruit. Nu zie je een ruit in het midden met twee driehoekige flappen. De module is klaar.



Figuur 4



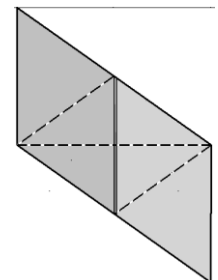
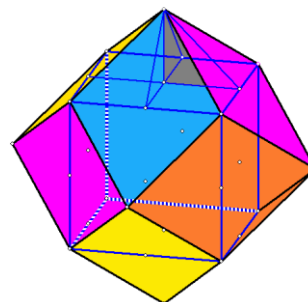
Figuur 5



Figuur 6

Als je goed kijkt zitten er openingen aan de onderkant ben de bovenkant van de ruit. Maak nog elf van deze modules en steek de flappen in de openingen van de ruiten. Als je vier kleuren gebruikt (maal 3 dezelfde) dan kun je een mooi gekleurd ruitentwaalfvlak maken met in elk hoekpunt de vier verschillende kleuren.

Een ruitentwaalfvlak kun je ook krijgen door vanuit het middelpunt van een kubus zes piramides te maken met als grondvlak een zijde van de kubus, en dan de kubus binnenste buiten te keren, door op elke zijkant van de kubus aan de buitenkant zo'n piramide te zetten.



De module

Je kunt op YouTube een filmpje bekijken met de vouwinstructie: <https://www.youtube.com/watch?v=qv0FGGQGkKY>

Module voor het vouwen van een kubus (met deuk in een hoekpunt)

Bekijk het filmpje op YouTube van Erik van Haren

<https://www.youtube.com/watch?v=leqbTw1FmJM>

Daarin zie je hoe je een module van een zijvlak van een kubus kunt vouwen uit een vierkant blaadje. Maar ik gebruik een andere module. Daarmee kun je ook een “deuk” in de kubus gevouwen krijgen. In feite wordt hiermee een punt van de kubus, halverwege drie zijden, afgezaagd en naar binnen geklapt.

Deze manier gaat als volgt. Neem zes vierkante blaadjes.

Herhaal het vouwrecept voor elk blaadje.

1 Maak kleine vouwtjes op de rand waarmee je de middens van twee overstaande zijden markeert.

2 Vouw twee keer een kwart blaadje naar de gemarkeerde middens van de zijden. Vouw weer open.

Zie figuur 1

3 Markeer de middens van de ander twee zijden door een klein vouwtje.

4 Vouw ook nu twee keer een kwart blaadje naar de gemarkeerde middens. Niet open vouwen. Zie figuur 2 en 3.

5 Vouw de vorige twee kwart blaadjes naar het midden en 90° open. Klaar voor de kubus. Zie figuur 4 en 5.

6 Steek alle zes modules voorzichtig in elkaar.

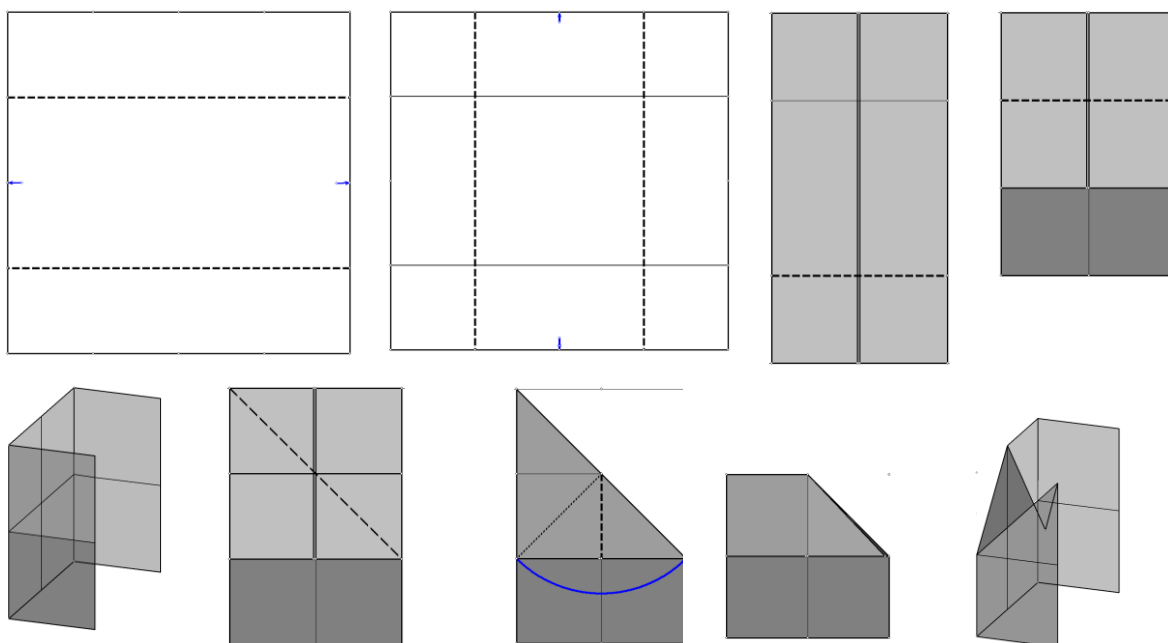
Voor de deuk moet je bij drie van de zes blaadjes nog iets verder gaan.

7 Eindig als in figuur 4. Vervolgens vouw je het bovenste vierkant diagonaal. Zie figuur 6

8 Breng het punt links onder van de bovenste flap met een zigzagvouw naar het punt rechts onder. Zie figuur 7 en 8.

9 Rechtsboven zit nu een spitse punt. Vouw die 90° open. Zie figuur 9.

10 Steek drie van deze deuken in elkaar, samen met drie gewone modules (van stap 5).

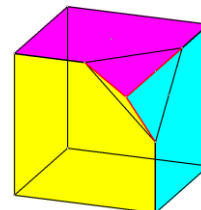


Bovenaanzicht 5 kubussen in het rond

Als je de vijf kubussen in elkaar steekt dan vormen ze een rondje.

In het bovenaanzicht zie je dan een vijfhoek.

Is deze regelmatig? Oftewel zijn alle hoeken 108° ?



De punten van de kubussen steken in elkaar in het midden van de zijden.

In een bovenaanzicht liggen ze als het ware gespiegeld in de lijn door die middens.

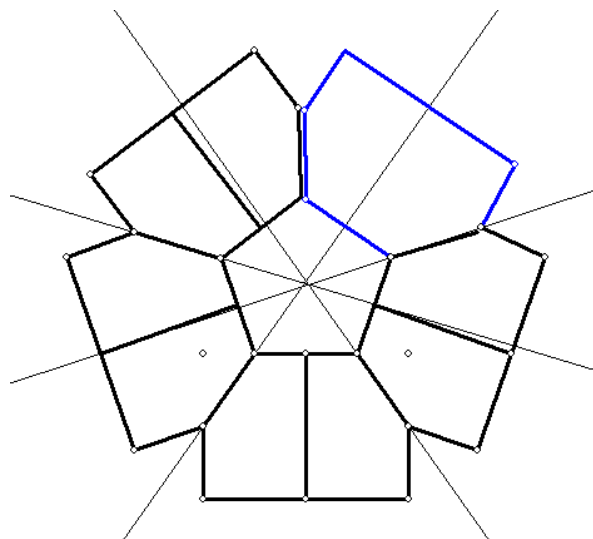
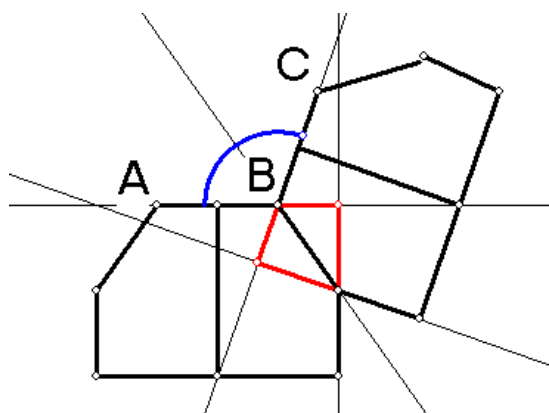
De rode driehoekjes zijn dus niet zichtbaar maar geven aan waar de ingestoken hoekpunten zitten.

Zie de linker tekening.

Met een tekenprogramma heb ik het bovenaanzicht een aantal keer gespiegeld.

Je ziet dat de gespiegelde figuren niet precies aansluiten, dus krijg je het vermoeden dat het niet mooi uitkomt.

Probeer $\angle ABC$ eens te berekenen met behulp van de gegevens van de bovenaanzichten.

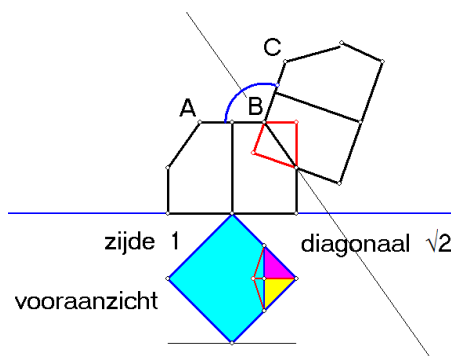


De vraag is hoe groot is $\angle ABC$? Als het mooi uitkomt dan zou de hoek 108° moeten zijn.

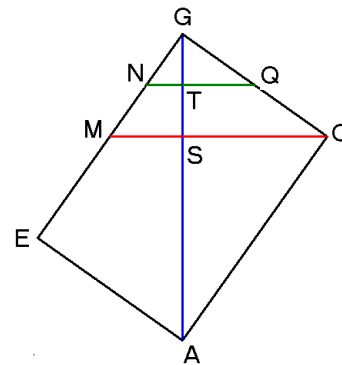
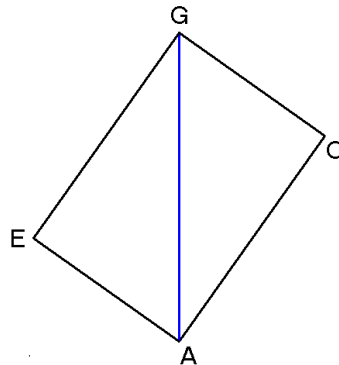
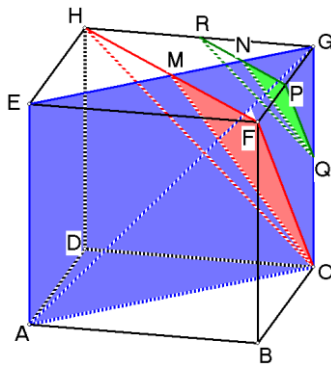
Stel de zijde van de kubus is 1. Noem $\angle ABC = \varphi$.

Dan is in een van de rode driehoekjes $\tan\left(\frac{1}{2}\varphi\right) = \frac{1/2}{1/4\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, dus $\frac{1}{2}\varphi = 54,73561\dots^\circ$; dus $\varphi \approx 109,5^\circ$.

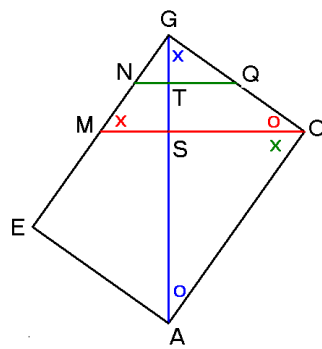
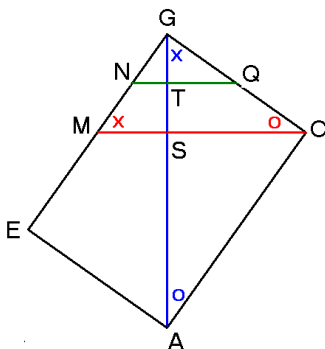
De kubussen sluiten dus niet precies mooi aan.



kubus op zijn punt



- 1 teken een diagonaalvlak in een kubus [met ribben 8] (ACGE), zie figuur 1.
- 2 teken de rechthoek zodat AG verticaal staat (bedenk dat $AE=8$, $AC=8\sqrt{2}$, $AG=8\sqrt{3}$), zie figuur 2.
[op ruitjespapier kun je met een passer makkelijk $8\sqrt{2}$ tekenen (hoe?) en dan $8\sqrt{3}$ (hoe?)]
- 3 teken het midden M van EG, het midden N van MG, het midden Q van CG, en de lijntjes CM en QN
Noem de snijpunten van CM en QN met AG resp. S en T, zie figuur 3.
- 4 je kunt met behulp van gelijkvormige driehoeken bewijzen dat zowel CM als QN loodrecht staan op AG
[je moet nu gebruik maken van het feit dat de zijden van ACGE 8 en $8\sqrt{2}$ zijn, dus geldt $GM=4\sqrt{2}$]
bewijs dat $\triangle ACG$ gelijkvormig is met $\triangle CGM$ volgens zhz;
[gebruik $\angle ACG = \angle CGM$ (beide 90°) en $AC : CG = 8\sqrt{2} : 8$ en $CG : GM = 8 : 4\sqrt{2}$, beide verhoudingen zijn $\sqrt{2} : 1$]
- 5 bewijs nu dat CM (en QN) loodrecht staat op AG
als gevolg van de gelijkvormigheid krijg je de zogenoemde nulletje – kruisje hoeken [kort gezegd: $o + x = 90^\circ$];
als in een driehoek een rechte hoek zit dan zijn de andere twee hoeken (o en x) samen 90° , zie figuur 4.
 $\angle CAG = o$, dan is $\angle GCM = o$; $\angle CGA = x$, dan is $\angle GMC = x$; omdat $\angle GCM + \angle SCA = 90^\circ$ is ook $\angle SCA = x$, zie figuur 5.
maar nu is $\angle CAS + \angle ACS = 90^\circ$, dus $\angle ASC = 90^\circ$, waarmee bewezen is dat CM loodrecht staat op AG
Een gevolg is dat (twee keer) drie hoekpunten van een kubuswoning vloeren in de woning vormen die loodrecht staan op de verticale as.



6 bewijs dat het bovenaanzicht van de kubus een regelmatige zeshoek is, zie figuur 6.

[bedenk dat de driehoeken tussen drie hoekpunten van de kubus (die een vloer vormen) een gelijkzijdige driehoek vormen (waarom?), dus de projectie van zo'n driehoek is ook een gelijkzijdige driehoek]

7 bereken de straal van de cirkel die de zeshoek (van het bovenaanzicht) omschrijft, gebruik figuur 5.

[bedenk dat dit SC is]

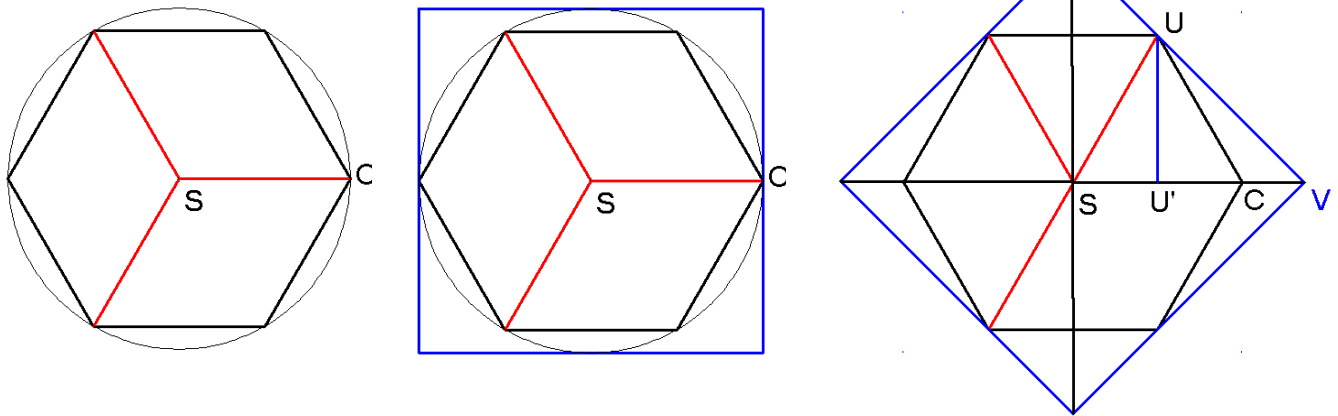
Je kunt gebruik maken van de middelevenredige stelling in een rechthoekige driehoek: $h^2 = p \cdot q$.

[in dit geval in $\triangle ACG$ is $h=SC$, $p=GS$ en $q=AS$; uit de zandloper ACSMG volgt dat $GS : AS = 1 : 2$,

dus $GS = \frac{8}{3}\sqrt{3}$ en $AS = \frac{16}{3}\sqrt{3}$, dus $SC^2 = 128:3 = 64 \cdot 6/9$, dus $SC = \frac{8}{3}\sqrt{6} \approx 6,532$]

8 zoek naar een kleinst mogelijk vierkant om een regelmatige zeshoek;

probeer wat mogelijkheden uit, gebruik symmetrie



9 bereken de zijde van dit kleinste vierkant, zie figuur 8.

[gebruik dat $\triangle SCU$ gelijkzijdig is en dat $\triangle U'VU$ en $\triangle SVW$ "geodriehoeken" zijn;

bedenk $SU' = \frac{1}{2}SU = \frac{4}{3}\sqrt{6}$, dus $UU' = \frac{4}{3}\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{2}$; $U'V = UU' = 4\sqrt{2}$;

$SV = SU' + U'C = \frac{4}{3}\sqrt{6} + 4\sqrt{2}$; $VW = SV \cdot \sqrt{2} = (\frac{4}{3}\sqrt{6} + 4\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = \frac{8}{3}\sqrt{3} + 8 \approx 12,619$]

NB de zijde van het vierkant om de cirkel is $\frac{16}{3}\sqrt{6} \approx 13,064$, zie figuur 7.

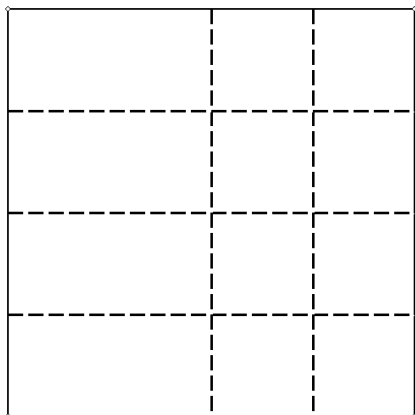
10 bereken de hoogte van het doosje waar de afgezaagde kubus op het afgezaagde vlakje rechtop in moet

[deze hoogte is $AT = \frac{5}{6}AG = \frac{5}{6} \cdot 8\sqrt{3} = \frac{20}{3}\sqrt{3} \approx 11,547$]

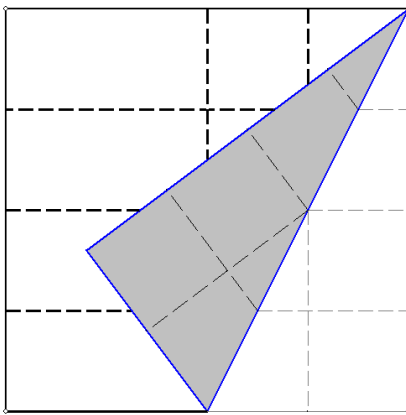
Module van een ruit voor rombische triacontaëder (ruitendertigvlak)

Neem een vierkant vouwblaadje. Noem de lengte van een zijde 2.

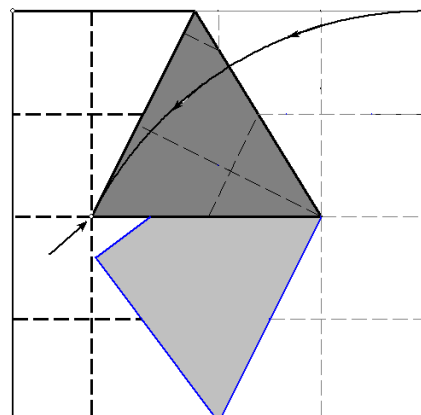
1 Vouw 2 keer door midden (horizontaal en verticaal) en weer open, en drie keer op een kwart (2 keer horizontaal en 1 keer, rechts, verticaal). Zie figuur 1.



Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3

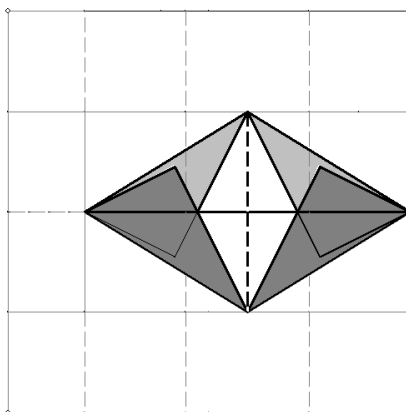
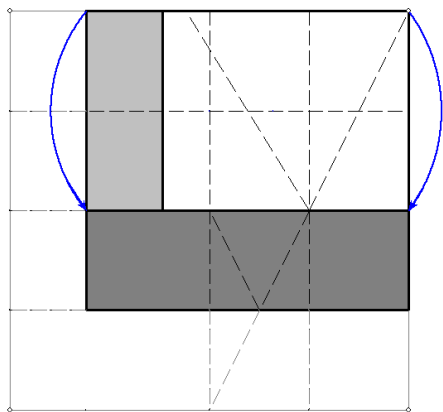
2 Vouw de punt rechtsonder (B) naar boven langs de (gevouwen) lijn met helling 2. Zie figuur 2.

3 Vouw de punt rechtsboven (C) naar de horizontale middellijn (C'). Zie figuur 3.

4 Vouw een verticale lijn door C' waar in de vorige stap het hoekpunt rechtsboven terecht kwam. Zie figuur 3.

5 Vouw alles open. Je hebt nu op de horizontale middenvouw de lengte $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ uitgezet, van de rechterzijkant tot aan het laatst genoemde punt (C').

6 Vouw de laatst gemaakte verticale vouw en daarna over de horizontale onderste en bovenste kwart lijnen. Zie figuur 4.



Figuur 5

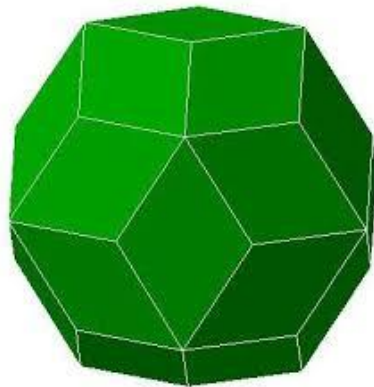
De verkregen rechthoek is de omhullende van de gevraagde ruit.

7 Vouw de verkregen rechthoek over een verticale lijn middendoor. Vouw weer open.

8 Vouw nu de vier diagonale lijnen die de randen van de ruit vormen. Zie figuur 5.

9 Van elke module kunnen nu twee flappen naar binnen gevouwen worden zodat een opening ontstaat. De andere twee flappen blijven om zo in openingen van andere ruiten te kunnen worden gestoken.

10 Vouw dertig van deze modules en schuif ze in elkaar. Bij elke volgende ruit die je inbrengt even kijken hoe de flappen moeten zitten. Je kunt met vijf (keer 6) kleuren een dertigruit maken met in elk hoekpunt verschillende kleuren bij elkaar. Bedenk al doende hoe de kleuren moeten aansluiten om een regelmatig patroon te krijgen.



1 De Negenproef

Schrijf je geboortedatum op met 6, 7 of 8 cijfers b.v. 2461949.

Is dit getal deelbaar door 9?

Hoe bewijs je dat het getal abcdefgh deelbaar is door 9?

Voor gevorderden:

Gooi 4 keer met een dobbelsteen.

Zet de geworpen cijfers achter elkaar.

Hoe groot is de kans dat dit getal deelbaar is door 9?

2 Kwadraten

Gooi met een dobbelsteen; <4 gegooid? Gooi nog eens. Tel de uitkomsten bij elkaar op.

Is je totaal nog <3, gooi nog eens.

Schrijf nu het getal op met de cijfers 1, 2, 3, t/m je totaal, en dan weer afnemend tot 1.

Bijvoorbeeld:

Stel dat je totaal aantal ogen is 7, schrijf dan het getal 1234567654321 op.

Is het getal dat je hebt opgeschreven een kwadraat?

Onderzoek waarom het getal $1234\dots n(n-1)(n-2)\dots 321$ het kwadraat is (met $3 \leq n \leq 9$).

Bewijs je vermoeden.

3 Kettingbreuken

3.1 Kies een letter K of B.

Bereken stap voor stap de eerste zeven stappen van de volgende kettingbreuk (mag met de rekenmachine):

$1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(...))))$ op de volgende manier (schrijf alle tussenstappen als breuk $\frac{\text{teller}}{\text{noemer}}$):

Voor wie B heeft gekozen: $1; 1+1= \dots ; 1+1/(1+1)= \dots ; 1+1/(1+1/(1+1))= \dots ; 1+1/(1+1/(1+1/(1+1)))= \dots$

Voor wie K heeft gekozen: $1; 1+1/1= \dots ; 1+1/(1+1/1)= \dots ; 1+1/(1+1/(1+1/1))= \dots ; 1+1/(1+1/(1+1/(1+1/1)))= \dots$

Vergelijk de rij van K en van B. Herken je deze rij?

3.2 Hoe bereken je het getal waar de kettingbreuk naar toe gaat?

$a = 1 + 2/(2 + 2/(2 + 2/(2 + \dots)))$ kun je schrijven als $1 + 2/(1 + 1/(2 + 2/(2 + \dots)))$

Hieruit kun je lezen dat $a = 1 + 2/(1 + a)$. Zie je dat?

Bereken a .

3.3 Maak op de volgende manier de kettingbreuk van je leeftijd pq:

$1 + p/(1 + q/(1 + p/(1 + q/(1 + \dots))))$ of $p + 1/(q + 1/(p + 1/(q + 1/(p + 1/(q + \dots))))$

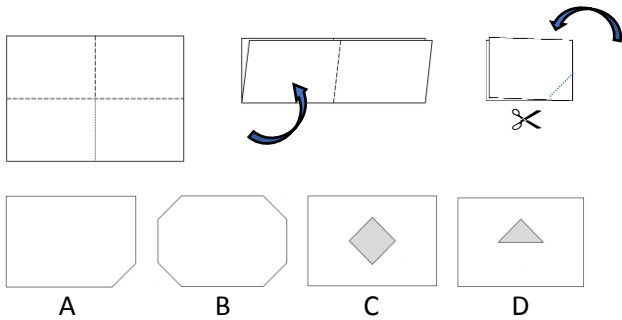
Naar welk getal convergeert jouw kettingbreuk?

4 Hoeveel gaatjes?

4.1 Twee keer dubbel vouwen *

Vouw een blaadje 2 keer dubbel. Knip een hoekje af waar de vouwen bij elkaar zitten.

Vouw het blaadje open. Hoe ziet het blaadje er uit?



* Naar een voorbeeld uit de Centrale Eindtoets van CITO over domein Meten en meetkunde (zie Euclides 95-2 p. 15).

4.2 n keer dubbelvouwen

Vouw een A4-tje een n keer dubbel, kies uit $n = 3, 4, 5, 6, 7$ (als dat lukt).

Knip een hoekje af van het punt waar alle vouwen bij elkaar zitten.

Hoeveel gaatjes verwacht je bij n keer vouwen?

Vouw het blaadje weer open. Klopt je vermoeden?

Kun je een bewijs geven voor je vermoeden?

5 Hoe hoog wordt een stapel met 100 tennisballen?

Doe een gok: ... cm

Je kunt tennisballen op verschillende manieren stapelen.

Je kunt de ballen per laag in vierkanten leggen of in (gelijkzijdige) driehoeken.

Je kunt de volgende laag aanbrengen in de kuiltjes van telkens vier ballen of van telkens drie ballen.

[Je moet er met steunlatjes wel voor zorgen dat ze niet wegrollen.]

Als je elke laag de ballen in een driehoek legt dan wordt de stapel het hoogst.

5.1 Hoeveel ballen zitten er in een laag?

Als je de bovenste laag nr. 1 noemt, kun je dan een formule opstellen voor het aantal ballen in laag n ?

5.2 Hoeveel ballen zitten er in een stapel van n lagen?

Een formule voor het totaal aantal ballen in een driehoekige piramide met n lagen is $\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$.

Controleer of de formule van het totaal aantal ballen van een stapel met n lagen klopt, met als bovenste laag 1 bal.

Voor gevorderden: kun je bewijzen dat de formule juist is?

5.3 Hoe hoog is een stapel van 3+1 ballen? (1)

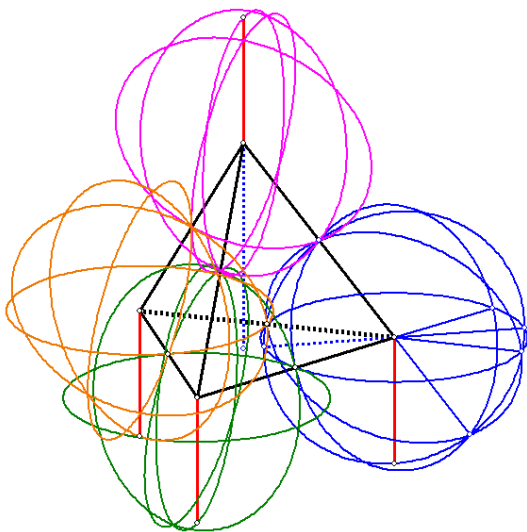
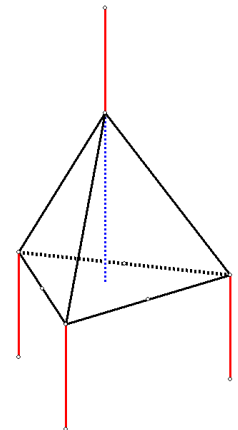
De middelpunten van een stapel van 4 ballen vormen de hoekpunten van een tetraëder.

Je kunt berekenen dat de hoogte van die piramide met ribben a gelijk is aan $\frac{1}{3}a\sqrt{6}$.

5.4 Hoeveel lagen kun je maken met 100 ballen?

Bedenk dat je bij het stapelen van tennisballen eerst de onderste laag vol moet leggen, daarop de volgende enz. De stapel met 100 ballen zal daarom geen volledige piramide vormen, maar bij een bepaalde laag ophouden.

Hoe hoog wordt een stapel met 100 tennisballen?



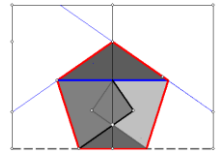
(1) Zoek op wat de diameter is van een tennisbal.

6 Vouwen van een dodecaëder

Neem een half A4-tje. Volg de vouwinstructie.

Met 12 gevouwen modules kun je een regelmatig 12-vlak, een dodecaëder, in elkaar zetten.

Kun je bewijzen of de vouwinstructie exact een regelmatige vijfhoek oplevert?

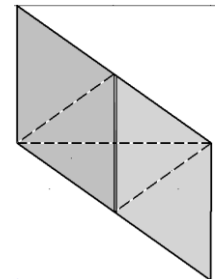


7 Vouwen van een ruiten 12-vlak

Neem een vierkant blaadje. Volg de vouwinstructie.

Met 12 gevouwen modules kun je een ruiten 12-vlak, rombische dodecaëder, in elkaar zetten.

Kun je bewijzen of de vouwinstructie exact een ruit met diagonalen $\sqrt{2} : 1$ oplevert?



8 Vouwen van een kubus met een deuk

Neem een vierkant blaadje. Volg de vouwinstructie.

Neem nog een vierkant blaadje.

Volg de vouwinstructie van de module voor de deuk

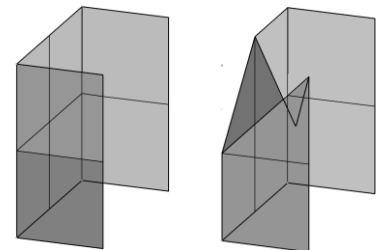
Combineer drie modules van de gewone kubus met drie van een deuk.

Maak een ketting van vijf van deze kubussen met deuk door elke volgende

Kubus met een hoekpunt in de deuk van de vorige te steken.

Ze vormen dan met zijn vijven een rondje.

Passen ze precies zodat van boven gezien in het midden een regelmatige vijfhoek wordt gevormd? Hoe bewijst je dit?

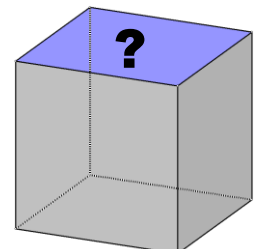


9 Je ziet een doosje. Wat komt er uit?

In het doosje zit een kubus met een deuk, staand op de deuk.

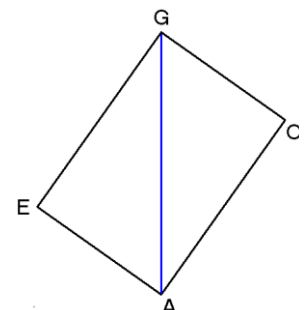
9.1 Bovenanzicht

Hoe ziet het bovenanzicht van een kubus, staand op zijn punt, er uit?



9.2 Straal

Hoe groot is de straal van de cirkel om het bovenanzicht als de ribbe van de kubus 8 cm is? Gebruik een verticale dwarsdoorsnede van de kubus.



9.3 Zo klein mogelijk

Maak een tekening van het bovenanzicht in een zo klein mogelijk vierkant.

Bereken de (exakte lengte van de) zijden van dit vierkant.

9.4 De ster van vorig jaar (de apotheose)

Beredeneer hoe de ruimte er uit ziet die de ster open laat.

Zie de hand-out van NWD 2019 Wiskunde daar zit wat in.

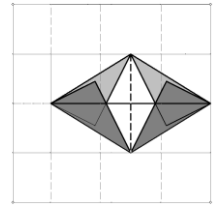
BONUS

10 Vouwen van een ruiten 30-vlak

Neem een vierkant blaadje. Volg de vouwinstructie.

Met 30 gevouwen modules kun je een ruiten 30-vlak, rombische triacontaëder, in elkaar zetten.

Kun je bewijzen of de vouwinstructie exact een ruit met diagonalen $\phi : 1$ oplevert?



Hoe construeer je op een ruitjesblad een dwarsdoorsnede van een kubus op zijn punt?

Neem ribbe $AB=AE=8$.

Kies een roosterpunt A. Teken punten $P(x_A+8, y_A)$ en $Q(x_A, y_A+8)$.

Teken een horizontale lijn (AP) door A. Teken een verticale lijn (AQ) door A.

Teken cirkel (P, $PQ=8\sqrt{2}$). R is het snijpunt van de verticale lijn door P en de getekende cirkel: $PR=8\sqrt{2}$.

Teken cirkel (A, $AR=8\sqrt{3}$). G is het snijpunt van de verticale lijn (AQ) door A met deze cirkel: $AG=8\sqrt{3}$.

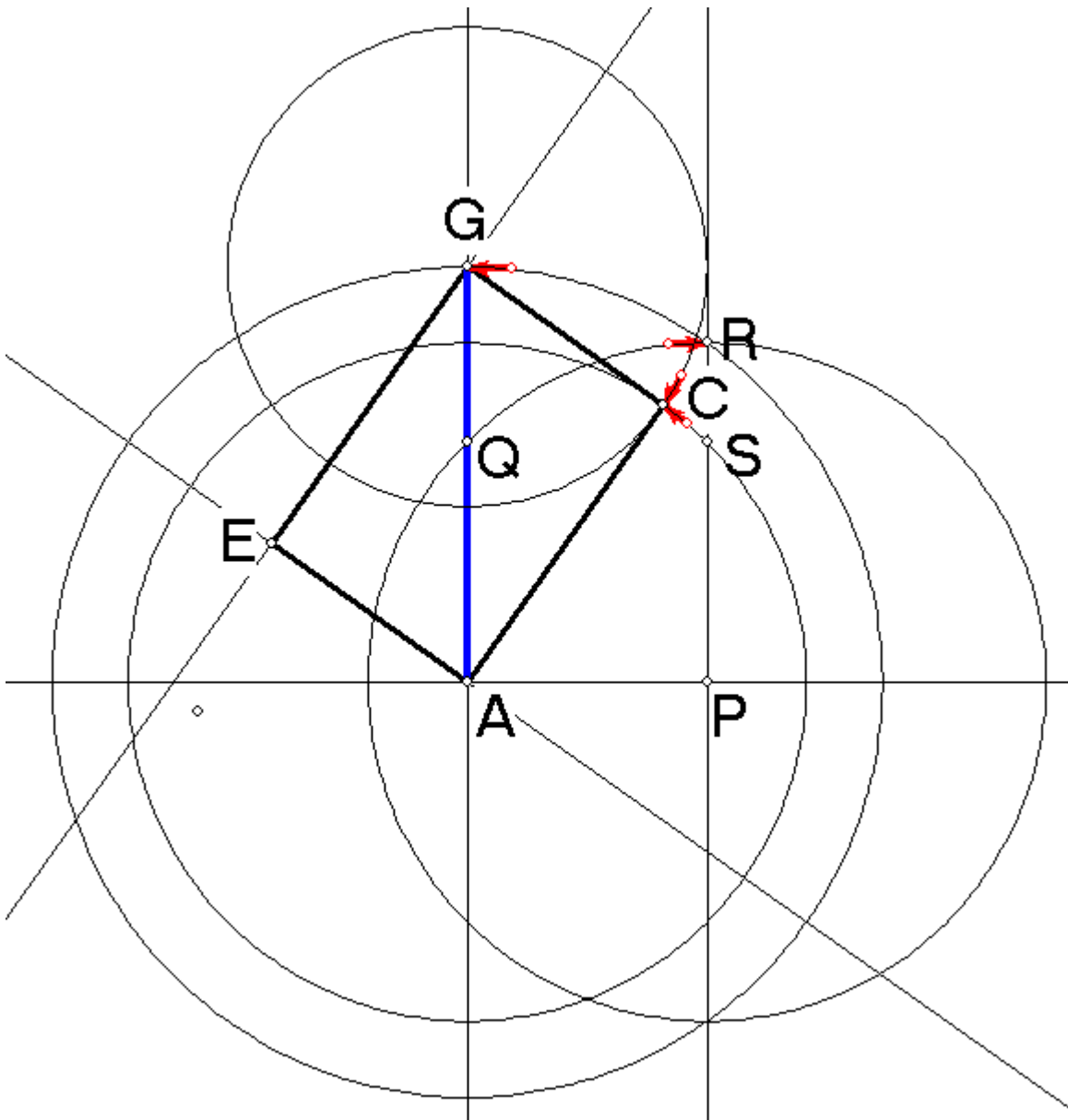
Dit is de verticale as van de kubus op zijn punt.

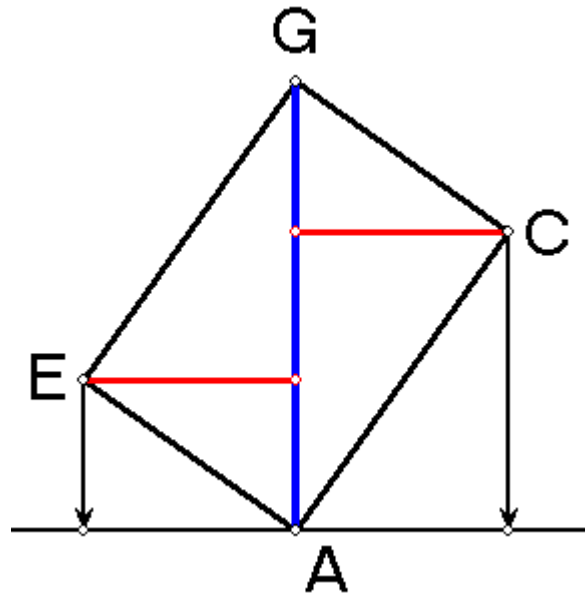
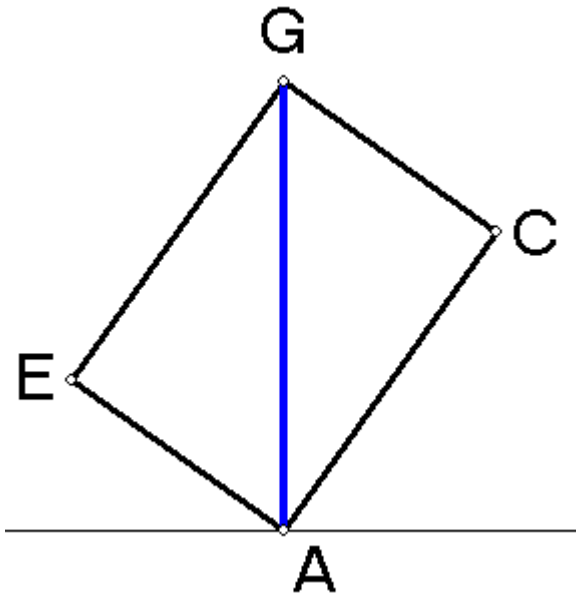
Rechthoek ACGE heeft zijden $8\sqrt{2}$ en 8.

Teken $S(x_P, y_P+8)$. Teken cirkel (A, $AS=8\sqrt{2}$) en cirkel (G, 8). C is het snijpunt van deze twee cirkels.

E is het snijpunt van de lijn door A evenwijdig met GC en de lijn door G evenwijdig met AC.

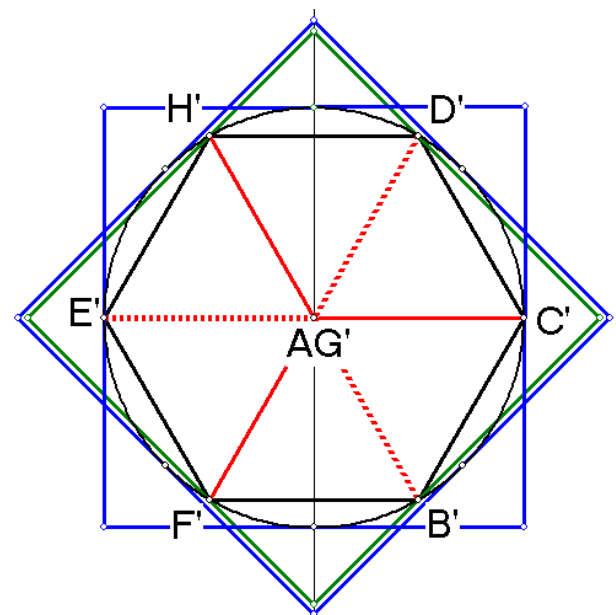
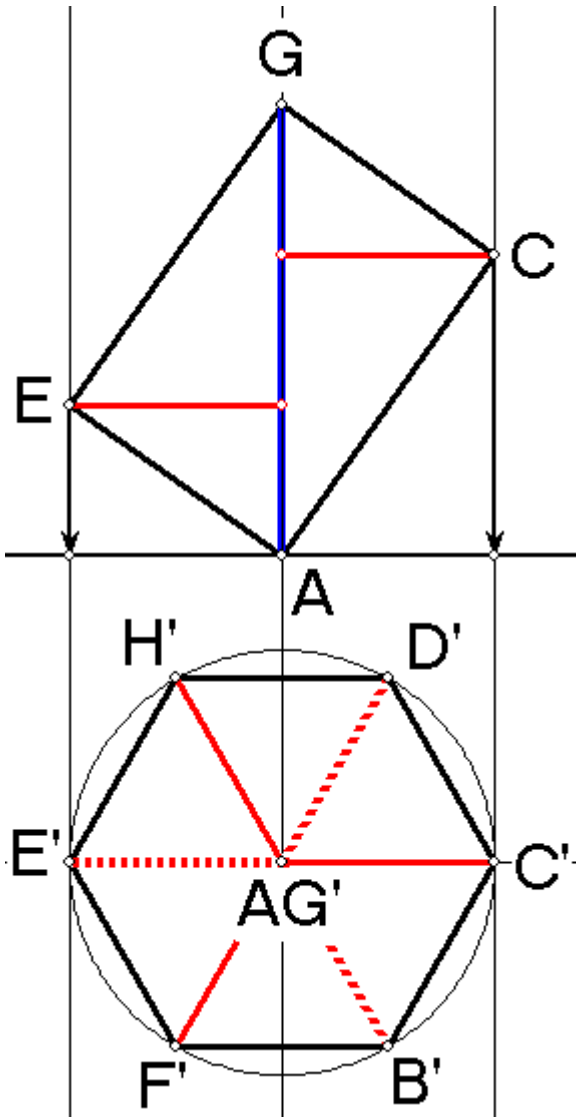
[of je tekent het snijpunt (E) van de cirkels (A, 8) en (G, $8\sqrt{2}$)]





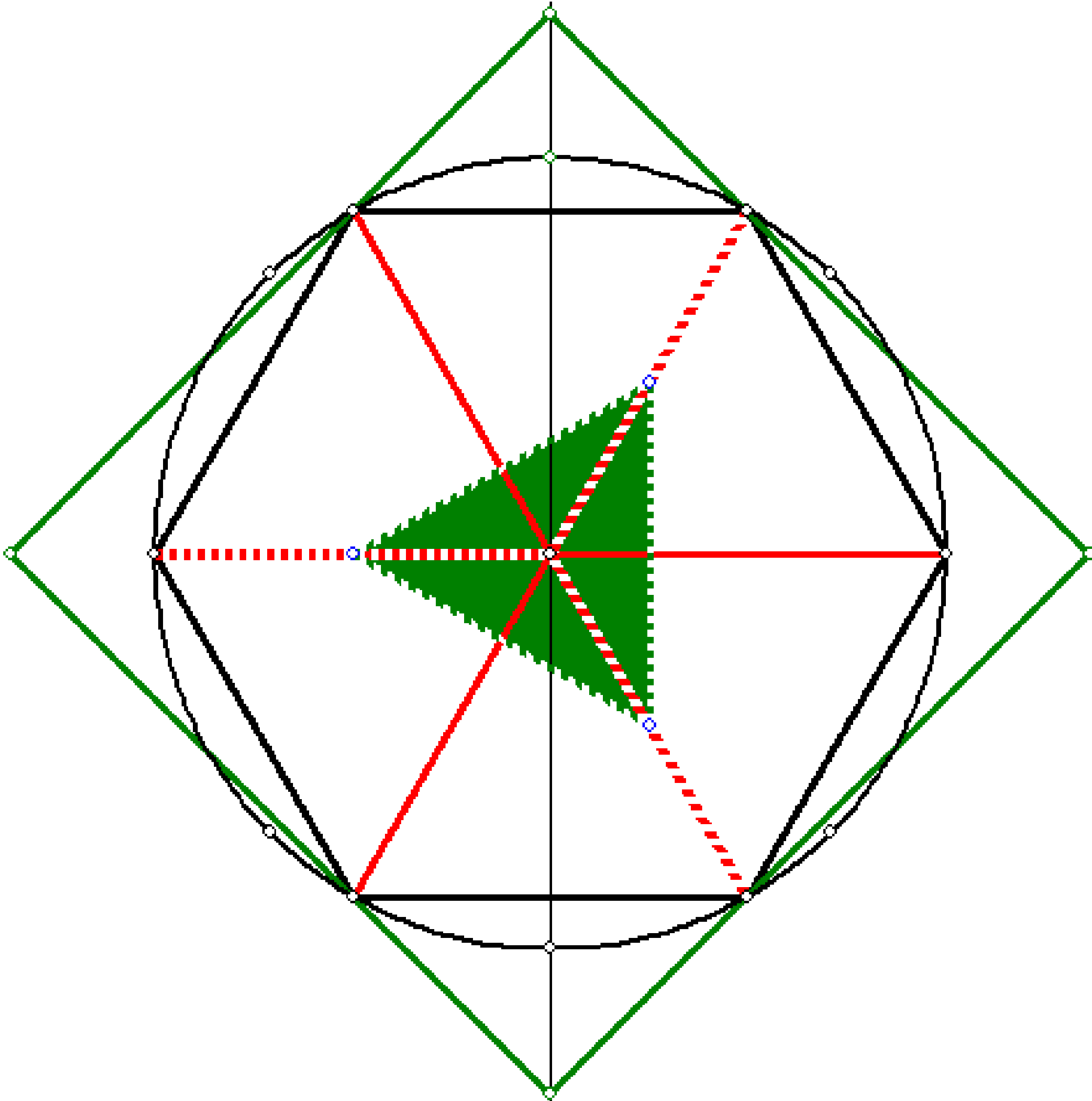
Naar het bovenaanzicht van de kubus

De projecties van de punten B, C, D, E, F en H komen op een cirkel met straal $\frac{8}{3}\sqrt{6} \approx 6,532$.

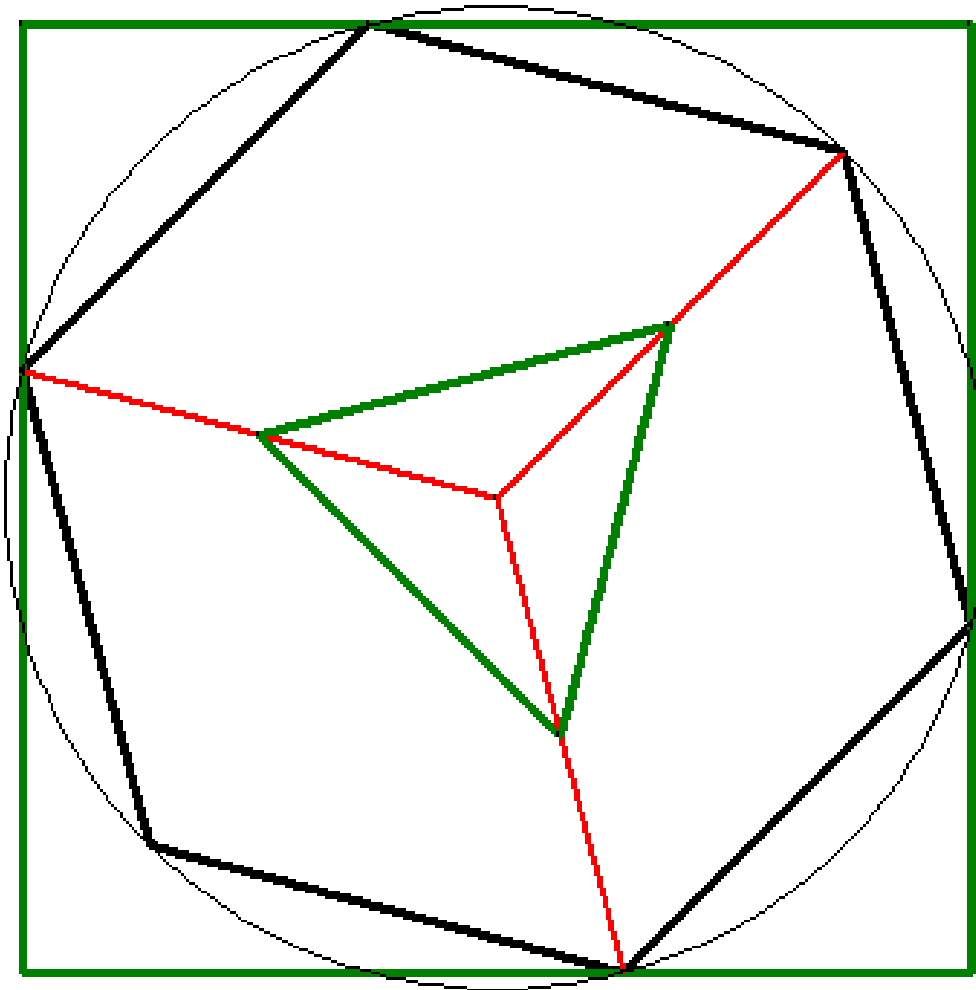


Kleinste doosje om kubus op zijn punt (groen)

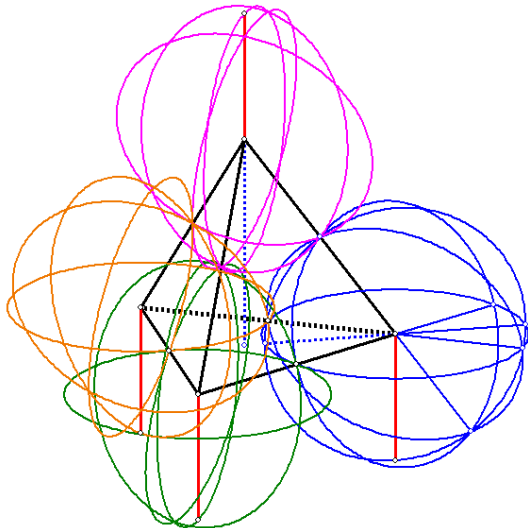
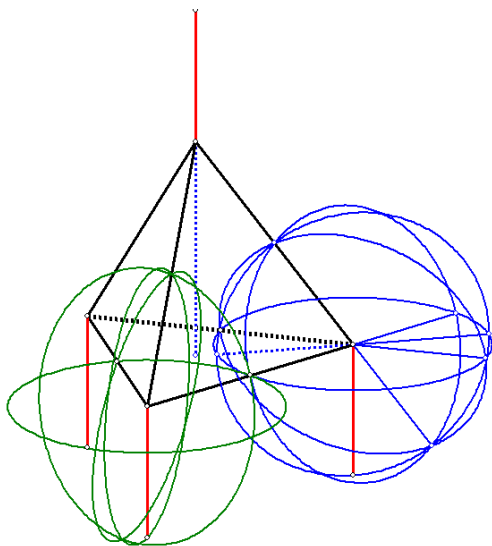
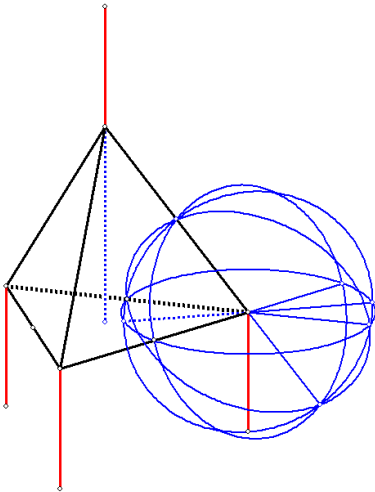
Kleinste doosje om kubus op zijn kant met de plaats van de deuk



Deze is makkelijker te kopiëren



Plaatjes met middelpunten van gestapelde tennisballen



3x	6+		20x	2 :
	8x	15x		
6+			3 :	
	1	8x	8+	
2-			2x	

3x	6+		20x	2 :
	8x	15x		
6+			3 :	
	1	8x	8+	
2-			2x	

3x	6+		20x	2 :
	8x	15x		
6+			3 :	
	1	8x	8+	
2-			2x	

3x	6+		20x	2 :
	8x	15x		
6+			3 :	
	1	8x	8+	
2-			2x	

3x	6+		20x	2 :
	8x	15x		
6+			3 :	
	1	8x	8+	
2-			2x	

3x	6+		20x	2 :
	8x	15x		
6+			3 :	
	1	8x	8+	
2-			2x	

3x	6+		20x	2 :
	8x	15x		
6+			3 :	
	1	8x	8+	
2-			2x	

3x	6+		20x	2 :
	8x	15x		
6+			3 :	
	1	8x	8+	
2-			2x	

3x	6+		20x	2 :
	8x	15x		
6+			3 :	
	1	8x	8+	
2-			2x	

3x	6+		20x	2 :
	8x	15x		
6+			3 :	
	1	8x	8+	
2-			2x	

3x	6+		20x	2 :
	8x	15x		
6+			3 :	
	1	8x	8+	
2-			2x	

3x	6+		20x	2 :
	8x	15x		
6+			3 :	
	1	8x	8+	
2-			2x	